

Sobre alguns problemas de mecânica do 10^o ano



*João J. Tremoço**
*Célia A. de Sousa***

Questionamos a ideia profundamente arraigada em alguns manuais do 10^o ano de escolaridade de que é possível analisar situações da vida prática usando o conceito de ponto material. Referimos alguns exemplos deste procedimento que estão em conflito com conceitos básicos, nomeadamente o conceito de trabalho de uma força. Discutimos a necessidade de reanalisar o conceito de trabalho de modo a resolver essas situações usando uma metodologia fundada nas noções de trabalho e energia. Apresentamos, finalmente, aplicações úteis neste contexto.

A mecânica é uma teoria microscópica uma vez que procura descrever todos os elementos de um sistema. Poderá a Mecânica do ponto material/sistema de partículas explicar, por exemplo, efeitos dissipativos em corpos macroscópicos? Verificámos, após consultar alguns manuais escolares do 10º ano, que esta questão é bastante pertinente. De facto, a este nível tenta-se aplicar a mecânica a situações do quotidiano envolvendo corpos macroscópicos. São exemplos bem conhecidos um carro que trava (ou arranca), um bloco que desliza numa superfície com atrito, etc. Embora tenhamos verificado que, em geral, a abordagem deste tema é feita correctamente, o mesmo não se pode dizer relativamente aos problemas-tipo apresentados na maioria desses manuais. Na realidade, encontrámos frequentemente problemas referentes a objectos que não podem ser tratados como pontos materiais. Noções como centro de massa (CM), pseudotrabalho e trabalho interno são fundamentais para a correcta interpretação dessas questões, apesar de não fazerem parte dos conteúdos programáticos do actual 10º ano. Na ausência destes conceitos torna-se irrealista qualquer tentativa de análise desses problemas usando a linguagem de energia e trabalho. De facto, o conceito de trabalho leccionado no 9º ano só é útil para o ponto material e para o corpo rígido em translação pura. Esta problemática foi levantada em finais da década de 70 por Erlichson [1] e Penchina [2] e apesar de outros autores [3-8] terem depois focado a necessidade de um melhor entendimento do conceito de trabalho, do Princípio do Trabalho-Energia e sua generalização a um sistema de partículas, são poucos os livros de introdução à Física [9] e os manuais escolares [10] que fazem eco destas questões.

**Ponto material:
Princípio do Trabalho-Energia**

O trabalho mecânico realizado pela resultante das forças, F , que actuam num corpo que se desloca entre A e B,

$$W_F = \int_{AB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad , \quad (1)$$

só é bem definido quando se trata de um **ponto material** ou de um **corpo rígido** com movimento de translação. Usando a Segunda Lei da Dinâmica para um ponto material, $F = m a$, obtemos, da integração da equação (1), o resultado conhecido como Princípio do Trabalho-Energia

$$W_F = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{1}{2} m v_0^2 \quad , \quad (2)$$

que relaciona o trabalho de todas as forças que actuam na partícula com a variação da sua energia cinética.

Para explicitar melhor o significado físico desta equação considere-se um bloco que sobe um plano inclinado sem atrito por aplicação de uma força, F_1 (Fig. 1).

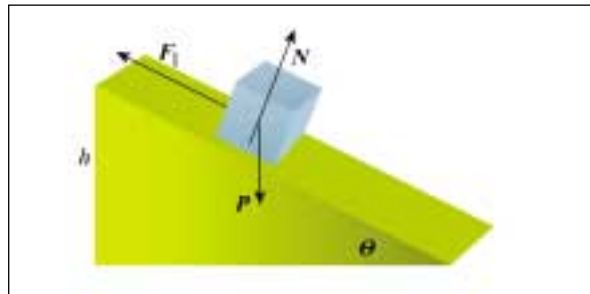


Fig. 1 Corpo que sobe um plano inclinado por acção de uma força F_1

A equação (2) toma então a forma

$$W_{F_1} = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_m \quad , \quad (3)$$

que mostra que a variação da energia mecânica do sistema é igual ao trabalho realizado pelas forças não incluídas na energia potencial. O trabalho envolve assim uma transferência de energia para o corpo. O aumento da sua energia cinética manifesta-se nas variações da sua velocidade e o aumento da energia potencial está associado às alterações da configuração do sistema.

Corpo que desce um plano inclinado

Vamos analisar um problema-tipo que aparece nos manuais do 10º ano e que se refere a um corpo que desce um plano inclinado. Na situação em que o atrito é desprezável, vem, por aplicação da equação (2),

$$(m g \sin\alpha) d = \frac{1}{2} m v^2 \quad , \quad (4)$$

sendo d o comprimento do plano inclinado e admitindo que o corpo parte do repouso. Esta igualdade fornece toda a informação possível sobre os aspectos mecânicos e energéticos do sistema.

A situação mais realista da descida do corpo sobre um plano inclinado com atrito também é abordada em alguns manuais que, na sua maioria, resolvem o problema a partir da relação

$$(m g \sin\alpha - F_a) d = \frac{1}{2} m v^2 \quad , \quad (5)$$

em que F_a é o módulo da força de atrito. Esta metodologia, que permite obter o resultado pretendido, por exemplo o cálculo de d a partir de v ou vice-versa, envolve no entanto dois pressupostos incorrectos: admite que o corpo pode ser considerado uma partícula e calcula o trabalho da força de atrito como $-F_a d$.

De facto, como justificaremos adiante, a resolução desta

questão não pode ser baseada no Princípio do Trabalho-Energia para um ponto material. Neste princípio (equação (2)), as energias envolvidas são externas. Quando estamos perante sistemas onde há efeitos dissipativos as equações (2) e (3) não são válidas. Nesta situação, o trabalho dissipativo (termodinâmico) da força de atrito conduz a um aumento não da energia cinética macroscópica do corpo, mas da energia cinética das moléculas que o constituem (**energia cinética interna**). O objecto não pode ser visto como um simples ponto material.

Sistemas de partículas

Ao procurar descrever um sistema de partículas deformáveis ou sujeito a forças dissipativas, podemos adoptar duas metodologias distintas mas complementares. Na exploração de aspectos de natureza exclusivamente cinemática, como é sugerido em vários problemas de manuais do 10º ano, relacionam-se forças exteriores com variações da velocidade. Esta abordagem exige, no entanto, a introdução do conceito de pseudotrabalho e da equação do pseudotrabalho-energia também chamada equação do centro de massa. O outro ponto de vista tem a ver com os aspectos relacionados com as transformações de energia e sua contabilização. Esta tarefa, que requer a introdução do conceito de energia interna, pode ser levada a cabo generalizando o Princípio do Trabalho-Energia o que conduz à **Primeira Lei da Termodinâmica**.

Equação do Centro de Massa

Se integrarmos a Segunda Lei da Dinâmica para um sistema de partículas, $\sum F_{\text{ext}} = M a_{\text{CM}}$, em que as forças externas estão aplicadas no CM, chegamos a uma expressão formalmente idêntica ao Princípio do Trabalho-Energia,

$$\int_{AB} \sum F_{\text{ext}} \cdot d\mathbf{r}_{\text{CM}} = \Delta E_{\text{c}}^{\text{CM}}, \quad (6)$$

onde $d\mathbf{r}_{\text{CM}}$ é o deslocamento do centro de massa do sistema.

Não encaramos a equação (6) como uma extensão do Princípio do Trabalho - Energia, embora o método para obter as equações (2) e (6) seja o mesmo. De facto, apesar da semelhança formal, o significado físico do primeiro membro de ambas as equações é diferente. Num sistema de partículas, as forças externas não estão todas aplicadas necessariamente no CM e os respectivos pontos de aplicação não têm obrigatoriamente o mesmo deslocamento que o CM. Pode mesmo acontecer, como veremos em alguns exemplos, que algumas das forças aplicadas nem sequer realizem trabalho por o seu ponto de aplicação não se deslocar. Consequentemente, nem

todas as parcelas do primeiro membro da equação (6) correspondem a trabalho real de acordo com o conceito de trabalho traduzido pela equação (1). Daí a designação de pseudotrabalho, ou trabalho do CM, para o primeiro membro da equação (6) bem como a de Teorema do Pseudotrabalho - Energia, ou equação do CM, para a própria equação (6). O segundo membro da igualdade apenas representa a variação da energia cinética de translação do CM.

Resumindo, o *trabalho do CM* é o trabalho que *realizaria* uma força, igual à resultante das forças, se actuasse ao longo do percurso seguido pelo CM do sistema.

A resolução da questão do corpo de massa M que desliza com atrito ao longo de um plano inclinado torna-se bastante clara à luz da metodologia baseada na equação do CM. A equação (5) deve então ser substituída por

$$(Mg \sin\alpha - F_a) d_{\text{CM}} = \frac{1}{2} M v_{\text{CM}}^2, \quad (7)$$

em que d_{CM} e v_{CM} representam, respectivamente, o deslocamento e a velocidade do CM.

Generalização do Princípio do Trabalho-Energia

Ao aplicarmos a Lei do Trabalho-Energia a um sistema deformável de partículas teremos que generalizar o trabalho que consta do primeiro membro de modo a incluir as forças interiores. Devemos então escrever o *Princípio do Trabalho-Energia para o sistema de partículas* como:

$$W_{\text{int}} + W_{\text{ext}} = \Delta E_{\text{c}}^{\text{total}}, \quad (8)$$

em que o segundo membro representa agora a variação da energia cinética total do sistema de partículas.

Designando por U , energia própria do sistema, a soma da energia cinética total de todas as partículas ($E_{\text{c}}^{\text{CM}} + E_{\text{c}}^{\text{int}}$) com a energia potencial de interacção entre essas partículas ($E_{\text{p}} + E_{\text{p}}^{\text{int}}$), vem

$$\Delta U = W_{\text{ext}}, \quad (9)$$

onde W_{ext} é o trabalho realizado sobre o sistema por todas as interacções não incluídas na energia potencial. Uma vez que a energia transferida para o sistema através das suas fronteiras pode apresentar-se sob a forma de trabalho, W , e/ou calor, Q , podemos reescrever a equação (9) na forma

$$\Delta U = Q + W, \quad (10)$$

historicamente designada por **Primeira Lei da Termodinâmica**.

Aplicações

Apresentaremos de seguida um conjunto de exemplos que elucidam os aspectos discutidos. Privilegiamos casos para os quais é incorrecta a hipótese de ponto material e que podem ser enquadrados em duas situações distintas:

- i) sistemas onde estão envolvidas forças de atrito dissipativas;
- ii) sistemas sobre os quais actuam forças externas que não realizam trabalho.

As duas últimas aplicações serão destinadas a sistemas cujas deformações são significativas e têm como principal objectivo mostrar que o deslocamento do ponto de aplicação de algumas forças e o deslocamento do CM do sistema podem ser diferentes.

Plano inclinado com atrito

Voltemos então ao plano inclinado com atrito explorando agora os aspectos energéticos. Como já referimos, encontramos manuais que, tentando estudar a energética deste sistema dissipativo, o fazem de forma incorrecta pois não faz sentido falar em energia dissipada na partícula, nem identificar a quantidade $-F_a d$ como trabalho da força de atrito. De facto, as rugosidades na interface dos corpos em contacto conduzem a uma distribuição discreta das forças de coesão, que assim se concentram em pequenas áreas onde o contacto é efectivo. Quando há movimento entre as superfícies, as rugosidades deformam-se. Segundo este modelo, o trabalho dissipativo da força de atrito é calculado a partir do deslocamento médio efectivo que é menor que o deslocamento do CM [6]. Resume-se em seguida toda a informação que a Primeira Lei da Termodinâmica, aplicada aos sistemas “corpo” e “corpo + plano inclinado”, bem como a equação do CM (equação (7)) podem fornecer.

Considerando que são desprezáveis as trocas de calor entre os sistemas e as respectivas fronteiras ($Q \cong 0$) podemos escrever

Primeira Lei da Termodinâmica para o “bloco + plano inclinado”:

$$Mgh = \Delta\left(\frac{1}{2} Mv_{CM}^2\right) + \Delta E_{bloco}^{int} + \Delta E_{plano}^{int} \quad (11)$$

Primeira Lei da Termodinâmica para o “bloco”:

$$Mgh - \mu N d_{ef} = \Delta\left(\frac{1}{2} Mv_{CM}^2\right) + \Delta E_{bloco}^{int} \quad (12)$$

Estas equações permitem tirar algumas conclusões:

- i) Nem todo o trabalho das forças externas é convertido em energia cinética como acontece na ausência de efeitos dissipativos. Parte desse trabalho é transferido para o bloco e para o plano inclinado contribuindo para o aumento de temperatura destas partes do sistema (ver equações (11) e (12)).

- ii) Apesar da inerente dificuldade do cálculo do trabalho da força de atrito por se desconhecer o deslocamento efectivo, d_{ef} , prova-se que, neste caso, o trabalho realizado por essa força, $-\mu N d_{ef}$, é numericamente igual ao simétrico da variação da energia interna do plano inclinado. De facto, subtraindo as equações (11) e (12), obtém-se

$$\mu N d_{ef} = \Delta E_{plano}^{int} \quad (13)$$

- ii) Da equação do CM (7) e da equação (12) conclui-se também que

$$\mu N (d_{CM} - d_{ef}) = \Delta E_{bloco}^{int} \quad (14)$$

Uma vez que $\Delta E_{bloco}^{int} > 0$ verifica-se que, de facto, $d_{ef} < d_{CM}$.

- iv) As equações (13) e (14) conduzem a

$$\mu N d_{CM} = \Delta E_{bloco}^{int} + \Delta E_{plano}^{int} \quad (15)$$

Chamamos, no entanto, a atenção para o facto de $-\mu N d_{CM}$ não corresponder ao trabalho da força de atrito mas ao respectivo trabalho do CM. A diferença entre estas duas quantidades decorre do carácter deformável do sistema, como mostra a equação (14).

Automóvel que acelera/trava

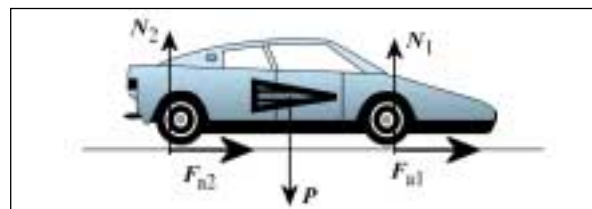


Fig. 2 Carro que arranca do repouso, sem derrapar, numa superfície horizontal por acção da resultante das forças de atrito.

O exemplo do automóvel que trava ou acelera numa estrada horizontal é incluído frequentemente nos manuais do 10º ano. Tal como na aplicação anterior, as questões subjacentes à sua resolução merecem alguns comentários. Um deles tem a ver com a aplicação do Princípio do Trabalho-Energia que pressupõe a hipótese de ponto material.

Arranque/travagem sem derrapagem

A força responsável pelo arranque sem derrapagem de um automóvel no plano horizontal é a resultante das forças de atrito estático que, como mostra a Fig. 2, tem o sentido do movimento.

A resolução do problema, baseada no Princípio do Trabalho-Energia, conduz à situação paradoxal de existir

uma força resultante que não realiza trabalho mas contribui para a variação da velocidade do carro. Isto prova que a hipótese de ponto material é inadequada. O carro deve ser considerado um sistema deformável de partículas e a equação do CM resolve o aparente paradoxo conduzindo a

$$F_a d_{CM} = \mu_e M g d_{CM} = \Delta \left(\frac{1}{2} M v_{CM}^2 \right) \quad (16)$$

A situação do carro que trava até parar sem derrapar é equivalente à do arranque, pelo que a equação do CM permite, por exemplo, calcular o valor da força média de atrito dados d_{CM} , v_{CM} e M .



Travagem/arranque com derrapagem

A análise desta situação, tendo como base a equação do CM, é análoga à situação sem derrapagem. Por outro lado, para tirar conclusões relativamente à energia envolvida no processo recorre-se à **Primeira Lei da Termodinâmica**. Ao estudarmos a situação da travagem (arranque) com derrapagem teremos que considerar que as rodas bloqueiam. A diminuição (aumento) da energia cinética está associada a um trabalho exterior da força de atrito cinético. As consequências da derrapagem, aumento da temperatura dos pneus e o seu rasto na estrada fazem prever que a energia cinética inicial aparece, nomeadamente, como energia interna destas zonas do sistema. Para avaliarmos a energia envolvida, por exemplo na travagem, é aconselhável escolher como sistema o “carro+estrada”. Assim, temos:

$$\Delta \left(\frac{1}{2} M v_{CM}^2 \right) + \Delta E_{carro}^{int} + \Delta E_{estrada}^{int} = 0 \quad (17)$$

A análise das situações abordadas em “Arranque/travagem sem derrapagem”, à luz da Primeira Lei da Termodinâmica, é semelhante à do caso discutido agora. A diferença mais significativa decorre da natureza da força de atrito que é diferente nos dois casos (com e sem derrapagem).

Homem que salta

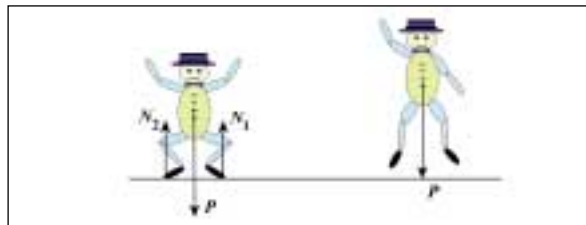


Fig. 3 Salto na vertical de um indivíduo à superfície da Terra.

Os restantes exemplos, apesar de não constarem dos manuais do 10º ano, são importantes do ponto de vista conceptual, pois ajudam a distinguir de forma fundamental a equação do CM da Primeira Lei da Termodinâmica e constituem sugestões susceptíveis de fomentar a discussão com os alunos.

Exploremos então a situação em que um indivíduo salta verticalmente para cima como está representado na Fig. 3.

O valor médio da resultante da força exercida pelo chão na pessoa é designado por \bar{N} . No instante em que a pessoa abandona o solo tem uma velocidade v_{CM} e o seu CM sobe a uma altura h_{CM} . A equação do CM conduz a

$$(\bar{N} - Mg) h_{CM} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 \quad (18)$$

A quantidade $\bar{N} h_{CM}$ não representa trabalho real pois o deslocamento do ponto de aplicação da reacção normal é nulo. Se aplicarmos agora a Primeira Lei da Termodinâmica ao sistema “indivíduo+Terra” obtemos outro tipo de informação. Uma vez que não há transferência de energia para o sistema sob a forma de trabalho e admitindo que o aumento de temperatura é insuficiente para haver trocas de calor com o exterior, os termos mais significativos da **Primeira Lei da Termodinâmica** conduzem a

$$\Delta \left(\frac{1}{2} M v_{CM}^2 \right) + Mgh_{CM} + \Delta E_{p\text{ quim}} = 0 \quad (19)$$

Verificamos então que o aumento da energia cinética do CM da pessoa, assim como da energia potencial gravítica do sistema, é feito à custa de uma diminuição da energia potencial química.

Discos que chocam

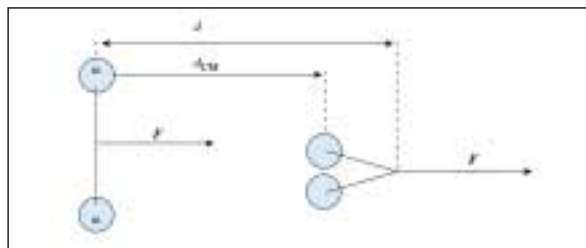


Fig. 4 Discos que chocam ao serem puxados por um fio.

Vamos agora analisar o sistema que consiste em dois discos, inicialmente em repouso, ligados por um fio numa superfície horizontal sem atrito [3,5]. Ao ponto médio do fio é aplicada uma força constante, o que provoca posteriormente o choque inelástico dos discos como mostra a Fig. 4. A velocidade dos discos quando chocam é v_{CM} . As equações são:

$$F d_{CM} = \frac{1}{2} (2m)v_{CM}^2, \quad (20)$$

que resulta da equação do CM, e

$$F d = \frac{1}{2} (2m)v_{CM}^2 + \Delta E^{int}, \quad (21)$$

que resulta da Primeira Lei da Termodinâmica aplicada ao sistema constituído pelos dois discos.

A alteração na forma do sistema conduz a que d seja maior que d_{CM} pelo que o trabalho da força F é maior do que o trabalho do CM. A diferença entre estas duas quantidades corresponde, como mostram as equações (20) e (21), à energia interna que aumenta durante o choque.

Conclusão

Consultámos alguns manuais do 10º ano para avaliar a forma como certas questões mecânicas são abordadas. O nosso estudo suscita-nos alguns comentários finais. O significado do Princípio do Trabalho-Energia deve ser salientado. Não se trata de uma nova lei, embora seja de grande importância por várias razões. Em primeiro lugar, revela-se útil na resolução de questões onde é fácil calcular o trabalho das forças que actuam e onde se pretende obter as velocidades em determinadas posições, permitindo deduzir uma relação em estreita correspondência com o Princípio da Conservação da Energia Mecânica. Por outro lado, o Princípio do Trabalho-Energia pode ser encarado como ponto de partida para a sua generalização a um sistema de partículas, quando estão presentes efeitos dissipativos. Só nestas condições é possível contabilizar variações de energia interna, obtendo-se um princípio geral de conservação de energia. Esta metodologia permite aprofundar o conceito de energia.

A equação do CM não substitui a generalização do Princípio do Trabalho-Energia, embora seja útil para resolver algumas questões cinemáticas. De facto, esta equação é particularmente interessante por permitir obter soluções usando uma metodologia fundamentada em ideias de energia e de trabalho, sem referência explícita a forças internas, energia rotacional e vibracional. São estes últimos conceitos que tornam a generalização do Princípio do Trabalho-Energia difícil de entender e aplicar por parte de alguns alunos. Subjacente a estas questões está o conceito de ponto material e suas limitações.

Salientamos também que o trabalho realizado por forças

de atrito é, em geral, mal calculado. Ao estabelecermos a distinção entre equações puramente mecânicas que resultam da Segunda Lei de Newton, por um lado, e a Primeira Lei da Termodinâmica, por outro, esta questão torna-se mais clara. As duas equações só coincidem quando estamos perante pontos materiais. Para sistemas deformáveis, onde se incluem sistemas sujeitos a forças de atrito dissipativas, as equações do CM e a da Primeira Lei da Termodinâmica têm conteúdos e significados diferentes. Há numerosos casos que envolvem forças que realizam trabalho nulo, embora se verifique uma alteração da energia cinética: locomoção ou corrida a pé num plano horizontal, subida de escadas, alpinismo, etc. De facto, este tipo de actividades, úteis na compreensão do Princípio de Conservação da Energia e de questões cinemáticas, são mais consentâneas com o espírito dos programas do que a longa lista de problemas que surgem em alguns manuais e que os alunos tendem a resolver mecanicamente. As novas propostas de programas do 10º ano [11], ao sublinhar as condições de validade da representação de sistemas complexos pelo respectivo CM, poderão introduzir alterações importantes neste domínio.

* Escola Secundária de Montemor-o-Velho,

3140 Montemor-o-Velho

joao.tremoco@clix.pt

** Departamento de Física, Universidade de Coimbra,

3004 -516 Coimbra

celia@teor.fis.uc.pt

Referências

- [1] Penchina, C., "Pseudowork-energy principle", *American Journal of Physics* 46, 295-296 (1978).
- [2] Erlichson, H., "Work and kinetic energy for an automobile coming to a stop", *American Journal of Physics* 45, 769 (1977).
- [3] Sherwood, B. A., "Pseudowork and real work", *American Journal of Physics* 51, 597-602 (1983).
- [4] Arons, A. B., "Developing the energy concepts in introductory physics", *The Physics Teacher* 27, 506-517 (1989).
- [5] Arons, A. B., "Teaching Introductory Physics", (John Wiley & Sons, New York, 1997).
- [6] Sherwood, B. A. e Bernard, W. H., "Work and heat transfer in the presence of sliding friction", *American Journal of Physics* 52, 1001-1007 (1984).
- [7] Mallinckrodt, A. J. e Left, H. S., "All about work", *American Journal of Physics* 60, 356-365 (1992).
- [8] Left, H. S. e Mallinckrodt, A. J., "Stopping objects with zero external work: Mechanics meets thermodynamics", *American Journal of Physics* 61, 121-127 (1993).
- [9] Halliday, D., Resnick, R., e Walker, J., "Fundamentals of Physics", 4th ed. Extended (John Wiley & Sons, New York, 1993).
- [10] Bello, A., Costa, E., e Caldeira, H., "Ritmos e Mudanças (novo)", Física 10º ano, Porto Editora, Porto, 2000.
- [11] Ministério da Educação, "Projecto de Programa, Física e Química-A (10º Ano), Componente de Física" em <http://www.des.min-edu.pt>