Como queimar um papel à luz de Sírio

Guilherme de Almeida

g.almeida(a)vizzavi.pt

Todos nós já experimentámos incendiar um papel utilizando uma lupa. Escassos segundos bastam para o fazer, mesmo utilizando uma lupa de tamanho modesto. Que tamanho deveria ter uma lupa capaz de fazer o mesmo utilizando a luz da estrela Sírio (α Canis Majoris)? Neste artigo propomo-nos determinar quantitativamente que características deveria ter essa lupa, que se adivinha gigantesca. Como é óbvio, trata-se de mera exploração conceptual, pois tal projecto revela-se — como o leitor verá — irrealizável por diversas razões.

1. A experiência tradicional

O papel queima devido à intensa concentração dos raios solares na sua superfície. Queima mais rápido se a superfície for escura, por exemplo uma página de jornal, escolhendo uma zona com uma fotografia. O papel branco demora mais tempo, dado que uma grande parte da energia é reflectida e só uma fracção dela é que é absorvida pelo papel. É por isso que o papel, se for branco, fica insuportavelmente brilhante quando a convergência se maximiza.

É um erro muito comum pensar que a luz solar, ao atravessar a lente vai convergir num ponto. Na verdade, a lente produz, no papel, quando se procura a mínima área iluminada, a imagem real do Sol. Se a lente tiver a distância focal f, tendo o Sol o diâmetro aparente θ de cerca de $0{,}5° = 0{,}5\ \pi/180$ radianos $= 8{,}727\times10^{-3}$ rad, o diâmetro da imagem solar será $d = f\times\theta$, com θ expresso em radianos e d nas mesmas unidades de f. Por exemplo, se $f = 15$ cm, obtemos

$$d = 15\times8{,}7270\text{x}10^{-3} = 0{,}13095 \text{ cm} \approx 1{,}31 \text{ mm.}$$

Com lentes do mesmo diâmetro e distâncias focais sucessivamente maiores, o diâmetro da imagem solar será cada vez maior e a convergência acabará por ser insuficiente para incendiar o papel. Por exemplo, uma lente de 6 cm de diâmetro (D) e 15 cm de distância focal[1] exposta ao Sol consegue incendiar um papel, dado que a luz que atravessou a lente cuja área é $A_1 = \pi\times3^2 \approx 28{,}27$ cm^2 convergirá num pequeno círculo de 0,131 cm de diâmetro, de área muito menor, $A_2 = \pi(0{,}0655)^2 \approx 0{,}0135$ cm^2. Neste caso, $A_1/A_2 = 28{,}27/0{,}0135 \approx 2094$. Consegue-se nesta situação aumentar a concentração de energia em mais de duas mil vezes.

Porém, se uma lente do mesmo diâmetro tiver, por exemplo, 1 m de distância focal (100 cm) muito dificilmente incendiará um papel, pois a imagem do Sol por ela produzida no papel terá o diâmetro d' dado por

$$d' = 100\times8{,}7270\text{x}10^{-3} = 0{,}8727 \text{ cm} \approx 8{,}73 \text{ mm.}$$

[1] Um parâmetro útil é a relação focal f/D, quociente da distância focal da lente pelo diâmetro, expressos nas mesmas unidades. Neste exemplo, com $f = 15$ cm e $D = 6$ cm, $f/D = 15/6 = 2{,}5$. No caso de fontes luminosas não pontuais (como é o caso do Sol), e para uma dada fonte, a concentração de luz no plano focal é inversamente proporcional ao quadrado de f/D. Como é óbvio, esta grandeza é adimensional.

A concentração de energia no papel, na pequena área ocupada pela intensa imagem solar, seria $(60/8,73)^2$ = 47,24 vezes superior àquela que chegaria à mesma área de papel sem o auxílio da convergência da lente: daí a maior dificuldade em incendiar o papel. Mas se a lente tivesse 2 m de distância focal (com o mesmo diâmetro), então o diâmetro da imagem solar seria 2×8,73 mm e o factor de concentração valeria apenas 11,81: o papel não arderia de modo algum.

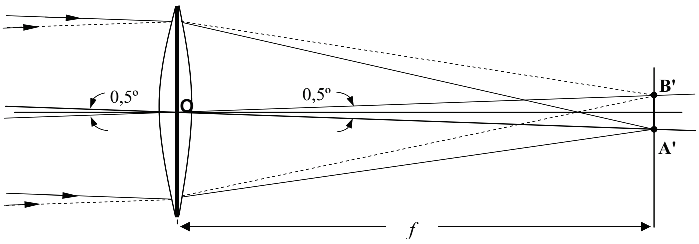

Fig. 1 - Os raios luminosos emitidos do bordo superior do Sol, A, e do bordo inferior, B, produzem no plano focal da lente as imagens conjugadas A' e B', respectivamente. A medida do segmento AB é o diâmetro da imagem do Sol. O ângulo A'ÔB' é evidentemente o diâmetro aparente do Sol (Guilherme de Almeida 2013).

2. O caso da estrela Sírio[2]

Será que, com uma lente adequada, se conseguiria incendiar um papel usando a luz de Sírio? É o que vamos ver. A magnitude aparente de Sírio é –1,5 e a do Sol vale –26,8 [1]. A razão entre os fluxos luminosos recebidos por unidade de área sobre a Terra (iluminações), para o Sol (E_{Sol}) e para Sírio ($E_{Sírio}$) será

$$\frac{E_{Sol}}{E_{Sírio}} = 2{,}512^{(m_{Sírio}-m_{Sol})} = 2{,}512^{[-1{,}5-(-26{,}8)]} = 2{,}512^{25{,}3},$$

ou seja $$\frac{E_{Sol}}{E_{Sírio}} = 1{,}320 \times 10^{10} \qquad (1)$$

Assim sendo, a lente necessária para se poder queimar o papel com a luz de Sírio deveria ter uma área colectora $1{,}320\times10^{10}$ vezes maior do que aquela que queima um papel com a luz do Sol. E uma relação de áreas de $1{,}320\times10^{10}$ significa uma relação de diâmetros de

$$\sqrt{1{,}320 \times 10^{10}} = 1{,}149\times10^5$$

Logo, se a menor lente que permite incendiar um papel com relativa rapidez tiver 6 cm de diâmetro, usando a luz do Sol, a lente capaz de fazer o mesmo com a luz de Sírio deveria ter um diâmetro

$$D' = 6 \times 1{,}149 \times 10^5 = 689\,348 \text{ cm} \approx 6{,}893 \text{ km}.$$

À parte a dificuldade construtiva, e pondo de lado a dificuldade em arranjar tanto vidro, essa enorme lente com cerca de 6,9 km de diâmetro incendiaria o nosso papel, e convém saber que a relação focal da lente gigante seria a mesma da lente pequena (porque o factor de escala é linear), assegurando os nossos resultados[3]. O problema parece resolvido. Mas estará mesmo resolvido?

3. Dificuldades inesperadas

Sendo pequena a lente usada para o Sol, a sua espessura é pouco significativa, da ordem de 0,8 cm. Quase não absorve radiação luminosa. Porém, ao passar para a "lente de Sírio", aumentámos essa lente cerca de $1{,}15\times10^5$ vezes em diâmetro, o que significa aumentar a sua espessura pelo mesmo factor, o que nos leva para uma espessura colossal de $0{,}8\times1{,}15\times10^5$ cm, aproximadamente 90 000 cm (ou seja, 0,9 km). Como o vidro óptico mais vulgar, o *crown* absorve cerca de 1 % da radiação por cada centímetro de espessura (transmite 99 %). Uma espessura de 90 000 cm transmitirá

$$0{,}99^{90\,000} \approx 1{,}47 \times 10^{-393} ,$$

ou seja, uns míseros $1{,}47\times10^{-391}$ %, ou ainda, dito de outra forma, apenas passará uma parte em $6{,}8\times10^{392}$! A lente seria praticamente opaca, e para melhor nos apercebermos disso basta recordar que o filtro clássico para observação visual do Sol em luz branca transmite uma parte em 10^5. Esta lente absorveria o equivalente a 79 filtros destes, colocados

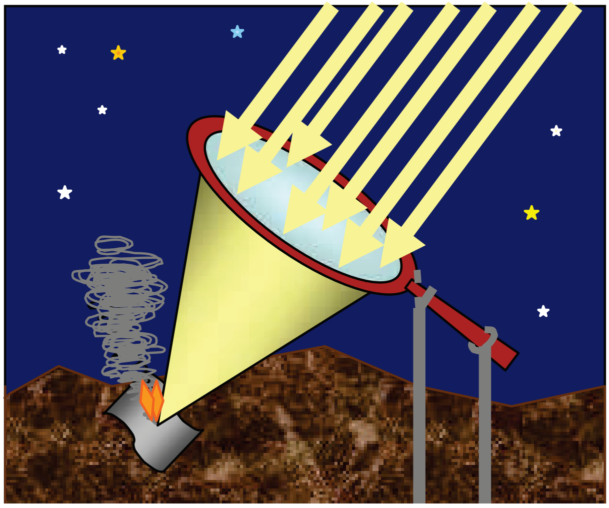

Fig. 2 - Uma lente colossal que resulta numa solução impossível (Guilherme de Almeida 2013).

[2] *Sírio* (α do Cão Maior) é a estrela de maior brilho *aparente* em todo o céu, a seguir ao Sol. Trata-se pois da mais forte candidata, a seguir ao Sol, à experiência conceptual que pretendemos desenvolver. É uma das estrelas mais próximas de nós (está a 8,7 anos-luz) e é intrinsecamente 21 vezes mais brilhante do que a nossa estrela. Note-se que a distância de 8,7 anos-luz é 550 000 vezes maior do que a distância média da Terra ao Sol.

[3] Em rigor, deveríamos incluir o diâmetro aparente de Sírio (visto da Terra) nos nossos cálculos. No entanto tal diâmetro aparente (ou diâmetro angular) é incrivelmente pequeno: 0,005936″, ou seja, aproximadamente 1/300 000 do diâmetro aparente do Sol. Nesse caso, a imagem de Sírio não será resolvida no plano focal da lente, pois o disco de Airy será muito maior do que a hipotética imagem de Sírio no plano focal. Assim sendo, e desprezando aberrações ópticas, a luz de Sírio iria concentrar-se num pequeno disco iluminado com o diâmetro do disco de Airy (e uma parte ainda menor, que desprezaremos, nos anéis de difracção). Como a lente é praticamente opaca, o problema deixa de se colocar. Mas retomaremos a questão mais adiante, na hipótese de usar um espelho côncavo.

em série à passagem da luz! Perante isto, podemos desprezar justificadamente as perdas por reflexão na primeira e segunda superfícies dessa lente, que são de uns meros 5 % por face! Sendo a lente praticamente opaca, apesar de ter a área colectora de luz necessária aos requisitos, é óbvio que não cumpriria os nossos objectivos, mesmo que pudesse ser construída. Esta solução revela-se impossível.

Tudo isto para não falar na massa de vidro necessária para fabricar essa lente, que será $(1{,}15\times10^5)^3 \approx 1{,}5\times10^{15}$ vezes superior à massa da lente pequena. Valendo esta última uns modestos 60 g (isto é, 0,060 kg), a lente gigantesca teria, já pronta e desbastada, $0{,}060\times1{,}5\times10^{15}$ kg, algo como 90 mil milhões de toneladas de vidro. Impossível segundo qualquer ponto de vista.

4. Uma solução possível, pelo menos em princípio

Dada a impossibilidade funcional da lente acima referida, mesmo que fosse construída, por excessiva absorção da luz, resta a possibilidade de utilizar um enorme espelho paraboloidal. Esse espelho imenso precisaria de ter os referidos 6,9 km de diâmetro, ou seja, um diâmetro 22,6 vezes superior ao do gigantesco radiotelescópio de Arecibo (que tem 305 m de diâmetro). Para dar uma perspectiva mais realista, convém sublinhar que num círculo de 6,3 km de diâmetro cabem 5713 campos de futebol.

Não precisamos de nos preocupar com o diâmetro da imagem de Sírio no papel. Tal diâmetro nunca seria demasiado grande, pois o diâmetro *aparente* desta estrela é apenas 0,005936″, ou seja, menos de 1/300 000 do diâmetro aparente do Sol (em rigor 1/303234). Portanto, a imagem de Sírio, focada no papel, seria sempre minúscula e na melhor das hipóteses determinada pela difracção e não pelo diâmetro aparente de Sírio. O diâmetro do disco[4] de difracção (δ) da imagem de uma estrela, no plano focal de um sistema óptico convergente, para o comprimento de onda λ, vale

$$\delta = \frac{2{,}44\,\lambda\, f}{D}, \qquad (2)$$

onde f é a distância focal do espelho e D o seu diâmetro [2].

A massa deste imenso espelho seria naturalmente colossal, não inferior à da lente acima referida (90 mil milhões de toneladas), exigindo recursos materiais imensos e dificuldades construtivas enormes. Se fosse possível construir esse espelho, incliná-lo apontando-o para Sírio e fazê-lo seguir esta estrela (outro desafio inesperado a ultrapassar, devido à sua enorme massa e dimensões), o sucesso seria

[4] Mais rigorosamente o diâmetro do primeiro anel escuro da figura de difracção. O conceito é abordado na Ref. [2].

garantido, contrariamente à lente de que falamos antes. De facto, uma aluminização recente apresenta um factor de reflexão de 88 % seria eficaz, se pudesse ser construído.

5. Refinando a solução, para uma conclusão mais realista

Na verdade, apurando o cálculo, o espelho não precisará de ser tão grande como acabámos de referir, pois (desprezando aberrações ópticas) a concentração de luz no plano focal será muito maior do que no caso do Sol visto que o disco de Airy é muitíssimo menor do que o diâmetro da imagem solar. Supondo $f/D = 2{,}5$ e $\lambda = 550$ nm $= 550\times10^{-9}$ m, o diâmetro do disco de Airy valerá

$$\delta = 2{,}44\times550\times10^{-9}\times2{,}5\ \text{m} \approx 3{,}36\times10^{-6}\ \text{m}.$$

Como o que nos interessa é a intensificação da concentração de energia e vimos que se requer que tal factor valha (a exemplo do verificado no início deste artigo) 2094, que *agora* deverá ser ainda multiplicado por $1{,}320\times10^{10}$, que é a razão entre o fluxo luminoso que chega a cada cm^2 do espelho exposta à luz do Sol relativamente ao que sucede com igual área do espelho, exposta à luz de Sírio, para que se obtenha a mesma concentração final de energia, no papel (como se mostra na Eq. 1). A *área* do espelho (desprezando perdas por reflexão) deverá ser $2094\times1{,}320\times10^{10} = 2{,}764\times10^{13}$ vezes superior à do disco de Airy, ou seja, o diâmetro do espelho deverá ser

$$D = \delta\sqrt{2{,}764\times10^{13}} \approx 5{,}26\times10^{6}\ \delta\ , \qquad (3)$$

o que nos conduziria a $D \approx 17{,}8$ m.

Antes que nos entusiasmemos, empolgados com este resultado ideal, convém saber que a turbulência atmosférica, fazendo variar rapidamente a direcção dos raios luminosos, espalha-os no plano focal segundo um disco que raramente corresponderá a menos de 2” de diâmetro aparente no céu (correspondendo a resoluções da ordem de 1”), o que já nos coloca, por efeito da turbulência, na situação de fonte extensa, pelo que deveremos refazer o cálculo para um diâmetro aparente de 2” (2” = $9{,}70\times10^{-6}$ rad) e já não para o disco de Airy. Por exemplo, para um espelho de 5 metros de distância focal, o disco de difusão no plano focal apresenta um diâmetro d'', de

$$d'' = 9{,}70\times10^{-6}\ \text{rad}\times f = 9{,}70\times10^{-6}\times5\ \text{m} = 4{,}85\times10^{-5}\ \text{m}. \qquad (4)$$

Para assegurar a concentração de energia requerida, o diâmetro do espelho deverá ter $5{,}26\times10^{6}$ vezes superior a este, ou seja valerá

$$D'' = 5{,}26\times10^{6}\times4{,}85\times10^{-5}\ \text{m} \approx 255\ \text{m}. \qquad (5)$$

Como um espelho aluminizado apenas reflecte 88 % do fluxo luminoso nele incidente, precisaremos de o fazer um pouco maior, com o diâmetro $D''' > D''$, para compensar as perdas por reflexão e obter a concentração final de energia que desejamos. A sua nova área deverá ser $1/0{,}88 \approx 1{,}14$

vezes maior e o novo diâmetro[5], deverá ser

$D''' = \sqrt{1{,}14}\, D'' \approx 1{,}07\, D''$. Obtemos então $D''' = 1{,}07 \times 255 \approx 273$ m.

Este espelho, embora já não seja tão gigantesco como o do primeiro cálculo, precisaria de ter uma distância focal muitíssimo pequena em relação ao seu diâmetro. Ou seja, uma relação focal $f/D = 5/273 \approx 0{,}018$. Seria extremamente "cavado" e praticamente impossível de construir. Para dar uma ideia concreta, basta referir que os espelhos de relação focal mais curta, que se fazem para telescópios têm $f/D = 2$. Não nos adianta aumentar-lhe a distância focal, pois o diâmetro do disco de maior concentração de energia aumentaria na mesma proporção (cf. Eq. 4), o que por sua vez iria obrigar-nos a aumentar o diâmetro do espelho de igual modo (cf. Eq. 5).

Se fosse possível construir este espelho, ultrapassando todos os factores complicativos no plano construtivo, seria finalmente possível queimar o tal papel à luz cintilante de Sírio, numa noite gélida de Inverno.

Por decisão pessoal do autor, este artigo não está escrito segundo as regras do novo Acordo Ortográfico.

[5] O leitor interessado pode refazer o cálculo relativo à lente, para caso de Sírio, tendo em conta o novo diâmetro da área de máxima concentração de luz, com ou sem turbulência (calculando para os diâmetros referidos). Chegará à conclusão de que essa lente teria um factor de transmissão tão baixo que ainda seria praticamente opaca.

Guilherme de Almeida foi professor de Física e Química (até 2010) em cinco escolas secundárias e no Colégio Militar. Ensinou alunos de todos os níveis (8.º ao 12.º ano), principalmente 12.º ano. É autor de sete livros, nomeadamente "Sistema Internacional de Unidades", "Roteiro do Céu", "Telescópios", "Galileu Galilei" e "O Céu nas Pontas dos Dedos", além de mais de 80 artigos. Interessa-se pela divulgação das observações astronómicas e da Física.

www.platanoeditora.pt/?q=N/AUTHORSHOW/92&maid=292

Referências

[1] Ferreira, Máximo & Almeida, Guilherme de, "Introdução à Astronomia e às Observações Astronómicas", Plátano Editora, Lisboa, 7.ª edição, 2004 (ISBN-978-972-770-267-1).

[2] Almeida, Guilherme de, "Telescópios", Plátano Editora, Lisboa, 2004 (ISBN-978-972-770-282-4).

[3] Almeida, Guilherme de, "O Céu nas Pontas dos Dedos", Plátano Editora, Lisboa, 2013 (ISBN-978-972-770-928-1). Para a localização de Sírio no céu nocturno.

[4] Almeida, Guilherme de, "Roteiro do Céu", Plátano Editora, Lisboa, 2010 (ISBN-978-972-770-243-5). Para a localização de Sírio no céu nocturno.