



Física do filme *Interstellar*

Pedro V. P. da Cunha

Dep. Física, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade de Coimbra, R. Larga, 3004-535 Coimbra

cunhapcc@gmail.com

Resumo

O filme *Interstellar*, que estreou recentemente nos cinemas, fascinou o público com imagens de buracos negros, *wormholes*, planetas extraterrestres e alguma física muito estranha como ondas gigantes e uma forte dilatação do tempo. Serão todos estes fenómenos pura ficção ou têm algum fundamento científico? Este artigo tem como objectivo discutir alguns destes temas, concluindo-se que há mais ciência envolvida no filme do que à partida seria de esperar.

Introdução

O filme de ficção científica de título *Interstellar* [1] retrata um futuro não muito longínquo do presente, no qual a civilização humana está à beira do colapso. Devido à propagação incontrolável de pestes agrícolas, há uma grande escassez de alimentos e alterações na composição da atmosfera, ameaçando levar a humanidade à extinção dentro de poucas gerações. Neste contexto, é organizada uma viagem interplanetária em busca de um planeta potencialmente habitável e no qual seja possível reconstruir a civilização. Fazendo uso de um misterioso *wormhole* que surgiu no sistema solar, e que constitui um portal para outra galáxia, a expedição viaja até um sistema planetário com vários candidatos, circundando um buraco negro supermassivo denominado *Gargantua*. Um dos planetas visitados, o planeta de Miller, possui muita água no estado líquido e orbita muito perto do buraco negro. Neste planeta os astronautas observam efeitos curiosos de gravitação, como ondas gigantes, e fenómenos de Relatividade Geral, como grandes dilatações do tempo (uma hora no planeta corresponde a sete anos na Terra).

Tendo em conta que o revisor científico do filme é Kip Thorne, uma das maiores referências internacionais na área da

gravitação, é interessante questionar até que ponto estes fenómenos estão retratados de forma verosímil e científica. Parte deste artigo é aliás fortemente baseado num livro da sua autoria [2], no qual é discutida também a forma como o buraco negro e o *wormhole* foram representados graficamente, com um rigor científico inédito no cinema. No entanto, nem tudo no filme é rigoroso, nomeadamente a parte final após um dos astronautas entrar em *Gargantua*, que é extremamente especulativa [2]. O livro é fortemente recomendado a leitores que procurem uma discussão científica mais completa dos fenómenos do filme. Contudo, este é muito pouco explícito em termos de cálculos matemáticos, sendo pertinente discutir alguns aspectos do filme em mais detalhe.

Gargantua

Em Relatividade Geral a gravidade é descrita como uma consequência da geometria do espaço-tempo, sendo a mesma alterada pela matéria no Universo. Para um buraco negro como *Gargantua* a geometria deverá ser bem descrita pelo espaço-tempo de Kerr [3], solução das equações de campo de Einstein para um buraco negro com rotação. Este espaço-tempo depende de dois parâmetros: $m = GM/c^2$ e $a = J/(Mc)$, em que G é a constante de gravitação universal, c é a velocidade da luz no vácuo, M é a massa de *Gargantua* e J é o momento angular deste. O parâmetro a , também chamado de rotação, tem de satisfazer a condição:

$$a^2 \leq m^2, \quad (1)$$

ou seja, o buraco negro tem um rotação máxima

permitida. Uma possível interpretação heurística para esta restrição é o facto de as forças centrífugas não poderem superar a atracção gravitacional do buraco negro. Para o caso limite em que a rotação é máxima, os buracos negros são chamados de extremos e concluiu-se curiosamente que *Gargantua* tem de se encontrar praticamente nesse limite de forma a satisfazer a dilatação do tempo mencionada no filme (ver final do artigo).

Um aspecto peculiar deste espaço-tempo é o acoplamento entre a coordenada temporal e a angular, chamado de *frame dragging*. Este é um desvio angular no sentido de rotação do buraco negro, sofrido por um referencial relativamente a observadores no infinito, induzido pela própria curvatura do espaço-tempo. Isto significa que mesmo um observador com zero momento angular é desviado angularmente, consequência da rotação intrínseca do espaço-tempo.

Uma analogia para este efeito é o movimento de uma folha na superfície de um lago com um movimento em espiral ao entrar num buraco de escoamento. Mesmo se localmente a folha não tiver movimento relativamente à superfície de água, um observador na margem irá observar uma rotação da folha induzida pela circulação da água.

Forças de maré

Como a atracção gravitacional é dependente da distância, a “face” do planeta de Miller voltada para *Gargantua* sofre uma maior atracção que a parte posterior. Estas variações do campo gravítico ao longo do planeta dão origem a forças de maré e zonas promotoras de maré alta e baixa, tal como no planeta Terra. Estas regiões dependem à partida apenas da orientação entre o planeta de Miller e *Gargantua* e portanto deverão estar fixas relativamente a este último. Na Relatividade Geral as forças de maré estão associadas à aceleração do desvio geodésico $S^{\hat{a}}$ num referencial local ortonormado [4], e são proporcionais à curvatura do espaço-tempo, contemplada no tensor de Riemann $\mathcal{R}^{\hat{a}}_{\hat{\tau}\hat{\tau}\hat{b}}$:

$$\frac{D^2 S^{\hat{a}}}{d\tau^2} = \mathcal{R}^{\hat{a}}_{\hat{\tau}\hat{\tau}\hat{b}} S^{\hat{b}}. \quad (2)$$

Explicitamente no equador do buraco negro obtemos curiosamente o mesmo resultado obtido pelas leis de Newton [5], se tomarmos R como a distância do observador a um buraco negro de massa M :

$$\frac{D^2 S^{\hat{r}}}{d\tau^2} = \frac{2GM}{R^3} S^{\hat{r}}, \quad (3)$$

$$\frac{D^2 S^{\hat{\theta}}}{d\tau^2} = -\frac{GM}{R^3} S^{\hat{\theta}}. \quad (4)$$

Estas equações traduzem respectivamente as forças de maré ao longo da direcção longitudinal a *Gargantua* e a uma direcção perpendicular a esta.

Órbita do planeta de Miller

No filme o planeta de Miller encontra-se muito perto de *Gargantua*, orbitando o buraco negro a quase metade da velocidade da luz no plano equatorial. A órbita é praticamente coincidente com o horizonte de eventos [2], um ponto sem retorno que define para todos os efeitos a fronteira do buraco negro. Temos portanto que $R \approx GM/c^2$, para um buraco negro quase extremo. Para esse género de buracos negros há órbitas estáveis praticamente até ao horizonte [6], não havendo portanto o risco de o planeta cair no buraco negro à mínima perturbação na trajectória.

Devido às enormes forças de maré de *Gargantua*, o planeta de Miller deverá ter uma forma deformada, quase elipsoidal. Se o planeta não tivesse sempre a mesma “face” voltada para o buraco negro haveria tremendas compressões e distensões devido a essas forças. O atrito provocado por tais deformações levaria a um vulcanismo extremo e o planeta seria de rocha fundida, algo que os astronautas não observam. No entanto, para o planeta ter a mesma face voltada para *Gargantua*, e como orbita a velocidades próximas da luz, teria de ter uma rotação relativista que à partida despedaçaria o planeta com forças centrífugas. Contudo, devido ao enorme *frame dragging* perto do horizonte de eventos, localmente o planeta praticamente não roda relativamente ao próprio espaço-tempo e as forças centrífugas deverão ser na verdade muito pequenas.

Estabilidade estrutural do planeta de Miller

A condição necessária para que o planeta não seja desfeito pelas enormes forças de maré do buraco negro é que a sua própria gravidade g_o tem que ser grande o suficiente para manter o planeta unido. Claramente temos que ter que à superfície do planeta de raio r e massa m_o :

$$\frac{2GMr}{R^3} < \frac{Gm_o}{r^2}. \quad (5)$$

Assumindo uma densidade $\rho_o = 5 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$ igual à da Terra obtemos

$$M > \frac{c^3}{\sqrt{\frac{2}{3}\pi\rho_o G^3}} \approx 242,18 \text{ milhões de } M_{\odot}. \quad (6)$$

Ou seja, para ter forças de maré suficientemente “suaves”, é necessário que M seja maior que uma massa crítica $M_{\text{crítica}}$ e que o buraco negro seja supermassivo, milhões de vezes a massa do Sol M_{\odot} , um resultado bastante contra-intuitivo! Nos cálculos seguintes, o valor assumido para a massa foi de $M = 242,28$ milhões de M_{\odot} , um valor próximo mas não igual ao da massa crítica (por razões explicadas mais à frente). Em termos de comparação, a massa do buraco negro no centro da nossa galáxia é superior a 4 milhões de massas solares, e o da galáxia de Andrómeda

(a galáxia mais perto da nossa) tem uma massa de cerca de 230 milhões de massas solares. Existem também galáxias com buracos negros muito mais massivos e portanto o valor assumido para M , é aceitável.

Oscilações

A configuração estável do planeta de Miller é ter sempre a mesma “face” voltada para *Gargantua*. Devido à assimetria do planeta, algo que pode ocorrer são oscilações sobre essa posição de equilíbrio, uma vez que as forças de maré funcionam como forças restauradoras (ver Figura 1). O sistema é portanto semelhante a um pêndulo físico sujeito a um campo de acelerações $g_{\text{tidal}} = 2GMr/R^3$. Contudo esta abordagem só deverá ser válida em primeira aproximação e não constitui um cálculo rigoroso. Uma vez que a massa de água à superfície do planeta está fixa relativamente a *Gargantua*, um observador no planeta irá observar ondas com o período das oscilações:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{m_o r g_{\text{tidal}}}} \quad (7)$$

Aproximando o momento de inércia J do planeta ao de uma esfera obtemos

$$T = \frac{2\pi GM}{\sqrt{5}c^3} \sim 1 \text{ h.} \quad (8)$$

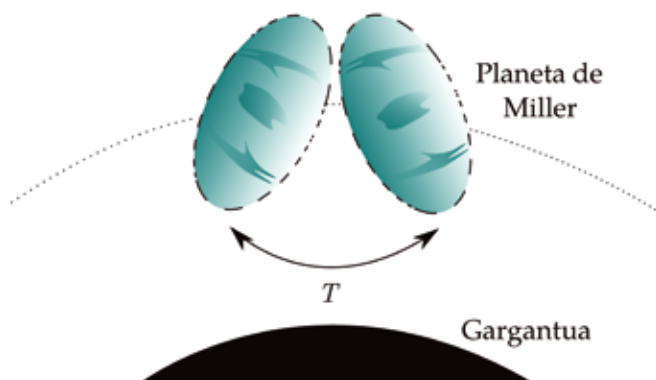


Fig. 1 - Oscilação do planeta de Miller sobre posição de equilíbrio com período T .

Isto é, obtemos um período entre ondas da ordem de uma hora. Tal está consistente com o intervalo de tempo que os astronautas observam no filme!

Altura das ondas

Se designarmos a região (1) como de maré alta e a região (2) como de maré baixa (ver Figura 2), a gravidade efectiva é

$$g'_1 = g_o - g_1 = \frac{Gm_o}{r^2} - \frac{2GMr}{R^3} \quad (9)$$

$$g'_2 = g_o - g_2 = \frac{Gm_o}{r^2} + \frac{GMr}{R^3} \quad (10)$$

Assumindo que a massa de água à superfície do planeta de Miller, fixa relativamente a *Gargantua*, encontra-se em equilíbrio hidrostático, é possível estimar a altura das ondas observadas:

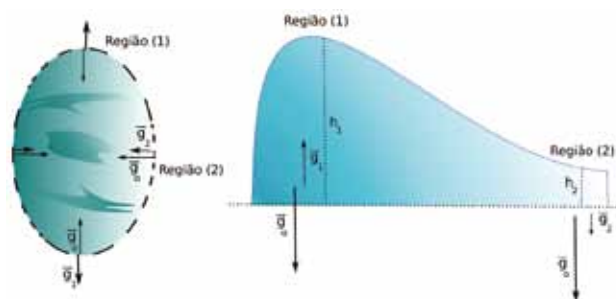


Fig. 2 - Ondas de maré no planeta de Miller.

$$\rho g'_1 h_1 = \rho g'_2 h_2 \quad (11)$$

Assumindo que $h_2 \sim 0,5 \text{ m}$ (no filme os astronautas tinham a água pelo joelho) e combinando as expressões (9) a (11), obtemos para a diferença de altura

$$\Delta h = h_1 - h_2 = \frac{9h_2}{\frac{4\pi\rho_o G^3 M^2}{c^6} - 6} \approx 871 \text{ m.} \quad (12)$$

Esta é praticamente a altura da torre Burj Khalifa no Dubai, que detém o recorde mundial de torre mais alta do mundo! As ondas de maré deverão ser monstruosas, tal como é sugerido no filme. Contudo para ter ondas tão altas são necessárias condições especiais: as forças de maré deverão estar praticamente no limite em que quase superam a gravidade do próprio planeta: $g_o \approx g_1$ (ou seja $M_i \sim M_{i, \text{critica}}$) e portanto $g'_1 \ll 1$ e $h_1 \gg 1$. Note-se que o valor de Δh depende fortemente da massa M_i , uma vez que no limite em que M_i se aproxima da massa crítica $M_i \rightarrow M_{i, \text{critica}}$ temos que $\Delta h \rightarrow \infty$. A massa assumida nos cálculos $M_i = 242,28$ milhões de M_\odot é próxima do valor crítico, não sendo contudo igual a esta para evitar a divergência. Usaram-se os seguintes valores para as constantes: $G = 6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$, $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ e $M_\odot = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$.

Dilatação do tempo

Um dos fenómenos mais interessantes mencionados no filme é a dilatação do tempo, ou seja, o ritmo deste não é necessariamente igual para todos os observadores. Nomeadamente, o intervalo de tempo Δt_o medido em regiões do espaço-tempo com campos gravíticos muito intensos, como perto de buracos negros, é menor relativamente ao intervalo Δt_∞ medido por um observador na Terra. No filme, uma hora no planeta de Miller equivale a sete anos na Terra, tendo este efeito consequências pessoais dramáticas para os astronautas.

De forma a ter a dilatação pretendida temos que ter o factor de *red-shift* S igual a:

$$S = \frac{\Delta t_o}{\Delta t_\infty} = \frac{1 \text{ h}}{7 \text{ anos}} = \frac{1}{61362} \quad (13)$$

O cálculo exato da energia E_o medida no planeta de Miller de um fóton proveniente do infinito com energia E_∞ (sem momento angular orbital) é dada por:

$$E_o = \frac{(g_{\varphi\varphi} + 2g_{t\varphi})E_\infty}{\sqrt{(g_{t\varphi}^2 - g_{tt}g_{\varphi\varphi})(4g_{tt} + 4g_{t\varphi} + g_{\varphi\varphi})}} \quad (14)$$

em que $g_{\mu\nu}$ são os elementos da métrica de Kerr nas coordenadas de Boyer-Lindquist [3]. Como a energia do fóton é proporcional à frequência, pode relacionar-se os intervalos de tempo entre os referenciais:

$$\frac{E_o}{E_\infty} = \frac{\Delta t_o}{\Delta t_\infty} = s. \quad (15)$$

Assume-se que a rotação do buraco negro é muito próxima do máximo, nomeadamente

$$|a| = m(1 - \alpha), \quad \text{com } \alpha \ll 1. \quad (16)$$

Fazendo uma expansão em série de Taylor de $S(\alpha)$ obtemos

$$s = \left(\frac{3\sqrt{3}\alpha}{16}\right)^{1/3}, \quad (17)$$

e portanto

$$S = \frac{1 \text{ h}}{7 \text{ anos}} \Rightarrow \alpha \sim 10^{-14}, \quad (18)$$

de forma a que o buraco negro teria que ter praticamente rotação máxima (a diferença para o máximo é cerca de um centésimo de um bilionésimo)! Em termos astrofísicos não deverá ser provável encontrar rotações maiores que 99,8% do máximo, uma vez que a partir deste ponto o buraco negro cria muita resistência a aumentar ainda mais a sua rotação. Conclui-se assim que uma hora no planeta de Miller para sete anos na Terra é **possível** mas improvável.

Conclusões

A altura das ondas de cerca de 871 m no planeta de Miller é explicável devido às incríveis forças de maré de *Gargantua*. O intervalo de tempo de uma hora entre cada onda está também de acordo com o que é retratado no filme. A enorme dilatação do tempo de uma hora para sete anos é também possível conceptualmente mas muito improvável de obter na prática, uma vez que é necessário que o buraco negro tenha rotação quase máxima. Assim, apesar da parte final ser fantasiosa, há diversos aspectos no filme que são mais verosímeis do que à partida seria de esperar.

Agradecimentos

Gostaria de agradecer ao meu amigo Maurício Moreira Soares pela ajuda na concepção das figuras e ao meu orientador de mestrado o Prof. Carlos Herdeiro pelas valiosas discussões e sugestões. Eventuais imprecisões são porém da minha responsabilidade.

Referências

1. C. Nolan, *Interstellar*. Paramount Pictures and Warner Bros. Pictures, 2014.
2. K. Thorne, *The Science of Interstellar*. WW Norton & Company, 2014.
3. J. Hartle, *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Pearson Education, Limited, 2013.
4. C. Misner, K. Thorne, e J. Wheeler, *Gravitation*. W. H. Freeman, 1973.
5. M. Visser, "The Kerr spacetime: A brief introduction," arXiv preprint arXiv:0706.0622 (2007).
6. D. C. Wilkins, "Bound geodesics in the Kerr metric," *Physical Review D* 5 (4), 814 (1972).



Pedro Cunha é aluno do mestrado de Astrofísica e Instrumentação para o Espaço na Faculdade de Ciências e Tecnologias da Universidade de Coimbra. Concluiu a Licenciatura em Física no ano de 2012 na mesma Universidade. Presentemente encontra-se a preparar a dissertação de mestrado.