

O que há de topológico na matéria que nos rodeia?

Trocando por miúdos o Nobel da Física de 2016

Eduardo V. Castro e Pedro Ribeiro

CeFEMA e Departamento de Física, Instituto Superior Técnico, Universidade de Lisboa, Av. Rovisco Pais, 1049-001 Lisboa, Portugal

A 4 de Outubro de 2016, a Real Academia Sueca anunciava a atribuição do prémio Nobel da Física a Thouless, Kosterlitz e Haldane pelas descobertas teóricas de transições de fase topológicas e fases topológicas da matéria. Um pequeno grupo de investigadores portugueses (uma parte figura nos agradecimentos deste artigo, a outra é autora do mesmo) teve um dia particularmente agitado, dado o número de telefonemas de jornalistas querendo saber mais acerca deste prémio Nobel. Porém, este ano, a origem da azáfama não foi tanto motivada pela procura do comentário, mas sim pela procura de ajuda na tentativa de decifrar o motivo da atribuição deste prémio.

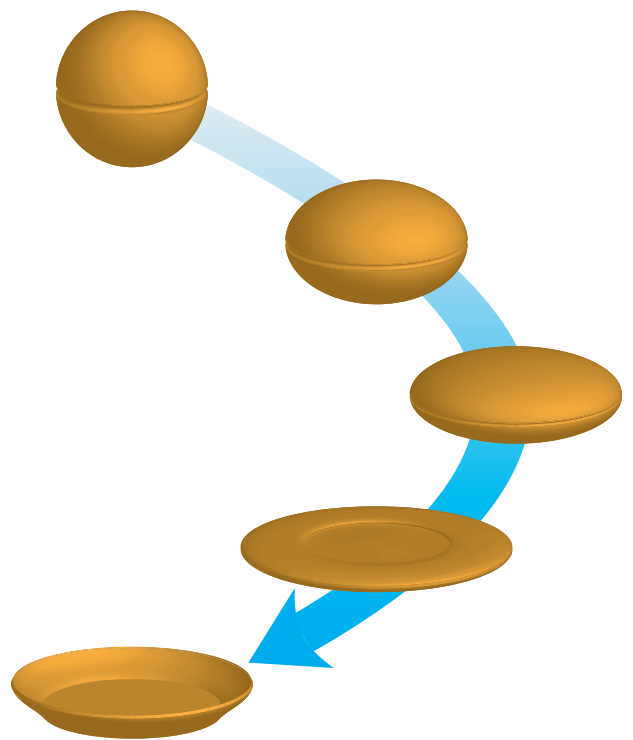
Outros prémios recentes na área da física da matéria condensada – área científica deste prémio – foram bem mais fáceis de motivar: por exemplo o grafeno (2010) ou o LED azul (2014). No caso do prémio de 2016, não é fácil dizer mais do que o título e a citação que o acompanha:

“for theoretical discoveries of topological phase transitions and topological phases of matter”

O objectivo deste artigo é dar uma explicação mais ou menos autocontida das descobertas que levaram à atribuição do prémio Nobel da Física 2016 e descodificar os conceitos necessários para a sua compreensão.

Os laureados e a divisão do prémio

Os três laureados de 2016 partilham, além do Nobel, a origem britânica e o facto de serem todos professores em universidades norte-americanas. David Thouless nasceu em 1934 em Bearsden, na Escócia. Depois de estudar na Universidade de Cambridge, doutorou-se em 1958 na Universidade de Cornell. É actualmente Professor Emérito na Universidade de Washington, à qual se juntou em 1980. Michael Kosterlitz nasceu em Aberdeen, também na Escócia, em 1943. Licenciou-se e obteve o mestrado pela Universidade de Cambridge, tendo-se doutorado em 1969 na Universidade de Oxford. Perten-ce à Universidade



de Brown desde 1982, sendo agora Professor de Física “Harrison E. Farnsworth”. Duncan Haldane nasceu em Londres em 1951. Também estudou na Universidade de Cambridge, onde se doutorou em 1978. É neste momento Professor de Física “Eugene Higgins” na Universidade de Princeton, à qual pertence desde 1990.

Relativamente à divisão do prémio Nobel, David Thouless foi galardoado com metade do prémio, tendo Michael Kosterlitz e Duncan Haldane recebido um quarto cada um. A análise desta divisão permite perceber que são dois os assuntos que a academia pretende distinguir. Leia-se, uma vez mais, a citação

que acompanha o Nobel da Física 2016: “pelas descobertas teóricas de transições de fase topológicas e fases topológicas da matéria”. Trata-se, de facto, de dois temas que em comum têm a palavra “topológicas”. David Thouless foi galardoado pela descoberta quer de *transições de fase topológicas* quer de *fases topológicas da matéria*. Michael Kosterlitz e Duncan Haldane foram premiados pela sua contribuição para um dos temas apenas: Kosterlitz para as transições de fase topológicas e Haldane para as fases topológicas da matéria. Assim se percebe a divisão do prémio. Assim se percebe também que iremos abordar dois assuntos ligados pelo conceito de topologia. Por aí iremos começar, ou seja, pela topologia.

A topologia em poucas palavras

A topologia é um ramo da matemática¹ que descreve propriedades que variam de forma discreta. Um exemplo paradigmático (e doce) consiste em usar a topologia para diferenciar uma bola de berlim (esfera) e um *donut* (toro). Textura e sabor à parte (questões com que a topologia não se importa), a diferença óbvia entre os dois é que o *donut* tem um buraco e a bola de berlim não. O número de buracos varia discretamente: podemos ter zero, um, dois, três... mas nunca meio buraco. Por isso se diz que a esfera e o toro são topologicamente distintos. Também por isso se diz que a bola de berlim e o prato são topologicamente equivalentes; podemos achatar pouco a pouco (ou seja, deformar continuamente) a bola de berlim até tomar a forma do prato (ver figura de entrada). Em topologia, duas formas são equivalentes se pudermos deformar continuamente uma na outra. Assim surge o conceito de invariante topológico: propriedade que só varia se alterarmos a topologia do sistema. Por exemplo, o número de buracos é um invariante topológico. Um invariante topológico é insensível a pequenas deformações/alterações do sistema; a introdução de buracos nunca é uma perturbação pequena por não existirem fracções de buraco.

Ilustremos com um exemplo prático que será útil mais à frente. Imagine um conjunto de ponteiros de relógio dispostos em cima duma circunferência, como ilustrado na Fig. 1. Percorrendo a circunferência no sentido anti-horário uma só vez, e registando num único relógio a hora indicada por cada ponteiro, podemos contar o número n de voltas completas dadas pelo ponteiro do relógio. Na Fig. 1 à esquerda o relógio dá zero voltas ($n = 0$), na Fig. 1 ao centro o relógio dá uma volta no sentido anti-horário ($n = 1$) e na Fig. 1 à direita o relógio dá uma volta no sentido horário ($n = -1$). O inteiro n é um invariante topológico, não só porque o número de voltas só

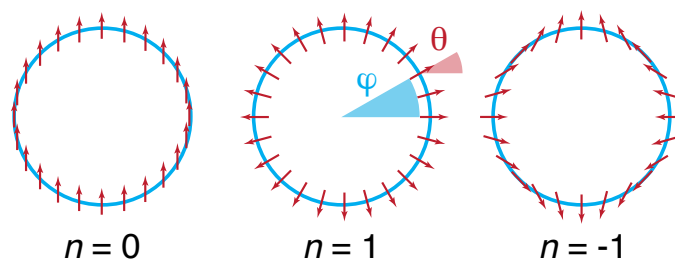


Fig. 1 - Possíveis texturas para ponteiros de relógio dispostos numa circunferência. Quando se dá uma volta à circunferência, os ponteiros de relógio dão n voltas ao relógio.

deve variar de forma discreta, mas também porque é insensível a pequenas alterações/deformações na configuração dos ponteiros.

De facto, usando o ângulo θ para parametrizar a orientação dos ponteiros e o ângulo φ para a sua posição na circunferência (ver Fig. 1 ao centro), facilmente se percebe que o número de voltas só depende da diferença $\theta(\varphi = 2\pi) - \theta(\varphi = 0)$. Os valores que $\theta(\varphi)$ toma entre os dois extremos $\varphi = 0$ e $\varphi = 2\pi$ não alteram o valor de n . Na Fig. 2, mostram-se três funções $\theta(\varphi)$ que, embora apresentando configurações de ponteiros distintas das da Fig. 1, são ainda compatíveis com os inteiros $n = 0, 1, -1$.

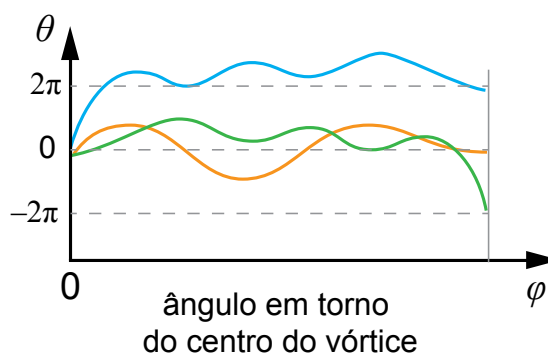


Fig. 2 - Três possíveis funções para o ângulo $\theta(\varphi)$, correspondentes a três texturas diferentes das representadas na Fig. 1, mas caracterizadas exactamente pelo mesmo inteiro n .

Matematicamente podemos definir o invariante topológico usando as propriedades da integração,

$$\int_0^{2\pi} d\varphi \partial_\varphi \theta(\varphi) = \theta(2\pi) - \theta(0) = 2\pi n \quad (1)$$

Os laureados com o Nobel da Física 2016 usaram conceitos de topologia, e em particular o de invariante topológico, para perceber a Física de um novo tipo de transições de fase e de um novo tipo de fases da matéria.

Fases, Transições de fase e a Teoria de Landau

Para perceber a importância e a novidade das descobertas que mereceram este Prémio Nobel, temos de as contextualizar e introduzir alguns conceitos, nomeadamente o conceito de fase e transição de fase. A classificação mais familiar das fases da matéria que vemos à nossa volta é aquela

¹ Desculpar-nos-ão os matemáticos pela ligeireza com que aqui tratamos o assunto.

que nos ensinam enquanto crianças: sólidos, líquidos e gases. No entanto, a noção de fase pode ser considerada num âmbito bastante mais geral. Para isso, consideremos a seguinte relação de equivalência: dois estados da matéria dizem-se na mesma fase se pudermos transformar um no outro continuamente sem modificações abruptas nas suas propriedades,² manipulando para isso os parâmetros do sistema, tais como temperatura, pressão, etc. Assim, podemos falar de muitas mais fases – metais (materiais que conduzem corrente eléctrica), isolantes (materiais que não conduzem corrente) e supercondutores (materiais que conduzem corrente sem resistência) são também exemplos de diferentes fases da matéria. Outro exemplo familiar é o de um material ferromagnético, que pode ser encontrado nos ímanes que usamos para decorar o frigorífico. A temperaturas elevadas, este material torna-se paramagnético, i.e. perde a sua magnetização e deixa de ser um íman. Abaixo de uma determinada temperatura, chamada temperatura crítica T_c , essa propriedade reaparece. O que explica este fenómeno é a existência de momentos magnéticos, nos átomos do material, que a baixas temperaturas, se alinham numa dada direcção. O derreter de um cristal (sólido) para uma fase líquida pode ser visto da mesma forma: acima de uma dada temperatura, os átomos – que estavam ordenados numa rede cristalina – passam a estar desordenados, dando-se uma mudança qualitativa nas propriedades físicas do material. Em termos dos parâmetros de controlo do sistema (neste caso, a temperatura), o ponto onde se dá esta mudança diz-se um ponto de transição de fase.

A teoria que usamos para compreender as transições de fase que descrevemos até aqui tem o nome de um físico russo que foi pioneiro no seu estudo: Lev Landau. A teoria de Landau explica a existência de dois tipos de transições de fase: transições contínuas (ou de 2.ª ordem) e descontínuas (ou de 1.ª ordem). A teoria também explica como caracterizar as transições de segunda ordem em termos da simetria do sistema e da sua dimensionalidade. Neste contexto, prevê que as duas transições de que falámos (cristal-líquido e ferromagnético-paramagnético) são distintas, porque o que muda na transição é: no primeiro caso, a distância média entre os átomos – que é uma grandeza escalar; e, no segundo caso, a direcção da magnetização – que é uma grandeza vectorial. Além disso, o comportamento seria diferente se, em vez de um cristal a três dimensões (3d), estivéssemos a falar de um material bidimensional (2d) como, por exemplo, o grafeno. A teoria de Landau e as suas extensões levaram à criação de uma nova área da física que estuda os chamados fenómenos críticos, i.e. o que acontece na vizinhança das transições de fase. O sucesso desta teoria é impressionante, descrevendo semelhanças em transições tão distintas como a formação ou não de buracos negros e aspectos da teoria da supercondutividade que acontece à escala microscópica.

A teoria prevê que, por vezes, a fase ordenada (como um cristal ou um ferromagneto) não existe de todo, ou então só

² O leitor atento notará desde já a semelhança entre estar na mesma fase e ter topologia equivalente.

existe quando a temperatura atinge o zero absoluto. Isto acontece normalmente para sistemas de baixa dimensionalidade (i.e. 1d ou 2d). Nos casos em que uma transição existe, a teoria permite calcular um número de propriedades muito gerais, ditas universais, que não dependem dos detalhes do sistema. Exemplos dessas propriedades são os chamados expoentes críticos. Estes expoentes regem o comportamento de algumas características do sistema (como o calor específico ou a susceptibilidade magnética), que divergem em lei de potências na transição de fase $|T - T_c|^\nu$. Escolhendo um número pequeno (três, na maioria dos casos) de expoentes críticos, correspondentes a diferentes propriedades que divergem, podemos caracterizar unicamente uma transição de fase. Sendo “universais”, estas propriedades só dependem da dimensão e da simetria do sistema, sendo independentes de qualquer outro parâmetro.

Uma transição de fase diferente: transição de fase topológica

Olhemos por momentos para o seguinte sistema: imagine uma rede quadrada a duas dimensões (como um papel quadriculado), na qual em cada ponto da rede (intersecção das linhas do papel) vive um vector de comprimento fixo, como um ponteiro de um relógio (ver Fig. 3). Neste “cristal” de relógios “mono-ponteiro” há apenas um grau de liberdade por relógio – o ângulo que o ponteiro faz com o meio dia. Admita que o sistema minimiza a energia se os ponteiros de relógios vizinhos apontam para a mesma hora. A dinâmica dos ponteiros pode ser complicada e eles podem interagir fracamente com outros graus de liberdade. No entanto, a física estatística dá-nos ferramentas para simplificar o problema: olhando para o problema a escalas de tempo muito maiores que esta agitação (térmica), podemos considerar que a cada configuração dos ponteiros do relógio corresponde uma energia E e que a probabilidade de uma certa configuração

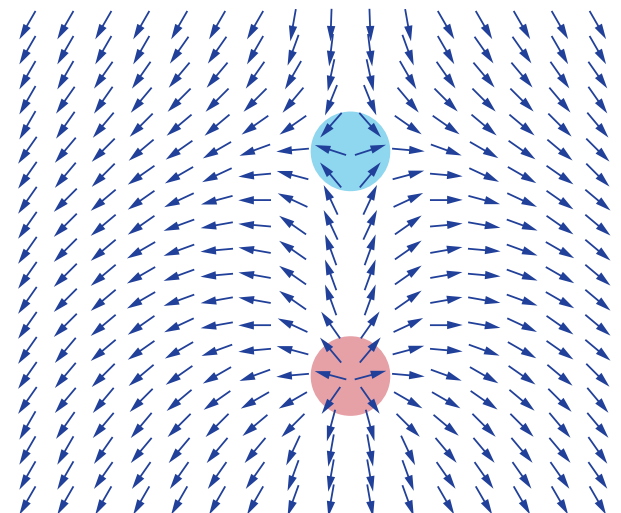


Fig. 3 - Rede de ponteiros de relógio com um par vórtice-anti-vórtice.

é proporcional a $e^{-\frac{E}{k_B T}}$, o conhecido factor de Boltzmann, que deve o nome a um dos pioneiros na física estatística, sendo k_B uma constante que também leva o seu nome, constante de Boltzmann, e que obviamente tem unidades de energia a dividir por temperatura. Este modelo, que apresentamos aqui de forma simplificada, pode servir para descrever aspectos da física de materiais supercondutores depositados em filmes finos, sistemas de átomos frios depositados em redes ópticas ou aspectos de materiais ditos superfluidos.

Num sistema tal como o que acabamos de descrever, uma fase ordenada significa que a média de todos os ponteiros de relógio, ponderada pela probabilidade de cada configuração, é diferente de zero. Alternativamente, também podemos fixar um dado relógio a uma determinada hora e medir a hora média do ponteiro de um relógio infinitamente longe – na fase ordenada, encontraremos a mesma hora que fixamos. Embora a teoria de Landau preveja a existência de uma fase ordenada a três dimensões (i.e. se o cristal de relógios fosse em 3d), a teoria pode ser usada para provar que não há fase ordenada a duas dimensões. *Não havendo fase ordenada não é possível haver uma transição de fase... ou será?* David Thouless e Michael Kosterlitz provaram que é! Eles mostraram que a fase de baixa temperatura, não sendo ordenada, tem propriedades diferentes da fase desordenada a alta temperatura – é, portanto, uma fase “menos desordenada” com características muito especiais. Entre estas duas fases, há uma transição de fase que a teoria de Landau não consegue descrever.

Esta conclusão permitiu descobrir outras transições de fase da mesma natureza, que fogem à caracterização de Landau. A descrição destas novas fases envolve um novo conceito – uma excitação topológica. No caso do nosso sistema de “relógios”, as excitações topológicas são chamadas vórtices e antivórtices. Um par vórtice-antivórtice está representado na Fig. 3. Repare que longe destas excitações, todos os relógios estão alinhados. Partindo de uma configuração com um par “vórtice-antivórtice”, é fácil voltar a uma configuração em que todos os ponteiros apontam na mesma direção. *Fácil* aqui quer dizer que isso pode ser feito continuamente, sem passar por configurações de energia muito elevada – a isto chama-se aniquilar um par vórtice-antivórtice. No entanto, se quiser fazer o mesmo com uma configuração com só um vórtice, o sistema tem de passar por configurações cuja energia aumenta com o tamanho do sistema; estas configurações são muito improváveis. A natureza topológica das excitações provém do facto destas poderem ser caracterizadas por um invariante topológico – o *winding number* – que é o número de voltas que o ponteiro dá quando seguimos ao longo de um caminho que circunda a excitação, em perfeita analogia

com a Fig. 1. A semelhança entre este *winding number* e o invariante topológico introduzido na Eq. (1) não é pura coincidência. Estas excitações podem ser vistas como partículas carregadas, a sua carga é o seu *winding number*, ou seja, o inteiro n na Eq. (1). Partículas de cargas opostas atraem-se. De facto, o potencial de interação efectivo de duas destas excitações, quando são separadas por grandes distâncias, é exactamente o mesmo de um sistema de partículas carregadas a 2d. Partículas com cargas distintas podem também combinar-se numa partícula cuja carga é a soma das suas cargas; em particular, partículas com cargas opostas podem aniquilar-se.

Estamos agora em condições de descrever as duas fases do sistema. Na fase desordenada, a temperatura é tal que uma configuração típica tem muitos pares de vórtice-antivórtice. Quando há uma concentração finita destes pares, eles dão lugar a um fenómeno conhecido como *screening*. Este fenómeno, conhecido e bem compreendido nas interações entre partículas carregadas num metal, faz com que um potencial entre duas partículas (que no vácuo é de longo alcance) passe a ser de curto alcance, devido à presença de todas as outras partículas do meio. Neste potencial de curto alcance, as partículas só se vêem uma à outra para distâncias menores que um certo comprimento característico. Acima dessa distância, as partículas não sentem a presença uma da outra. Assim, pagando uma energia finita, podem separar-se os vórtices e antivórtices que formam um par, que depois passeiam livremente pelo sistema – diz-se que estas partículas têm liberdade assintótica. Por outro lado, abaixo de uma temperatura denominada temperatura de Kosterlitz-Thouless, a densidade de pares torna-se nula e o *screening* torna-se impossível. O sistema tem assim muito poucos pares e neles os vórtices e antivórtices estão confinados a andar perto uns dos outros, pois a energia de uma configuração aumenta com a distância entre eles – esta fase chama-se também a fase confinada.

Vamos agora dar um passo atrás e apreciar a construção que David Thouless e Michael Kosterlitz nos ensinaram. Passamos de um modelo em que os graus de liberdade eram os ângulos dos ponteiros dos relógios para uma descrição em termos de partículas com carga. A carga das partículas é uma propriedade topológica local de uma configuração. Tendo esta noção de partículas em mente, a descrição do sistema pode ser feita em termos de um gás de partículas carregadas – o chamado gás de Coulomb – que já se conhecia à data ter duas possíveis fases. Como a fase de baixa temperatura não é ordenada, a transição de fase foge à descrição de Landau. É assim possível haver uma transição de fase. Esta transição de fase, bem como a fase “menos-desordenada”, de baixa temperatura, tem propriedades exóticas. A descoberta destas fases e a descrição acima são o legado de David Thouless e Michael Kosterlitz, pelo qual lhes foi atribuído metade deste Prémio Nobel.

Leu bem o leitor: metade. Falta, portanto, perceber a outra metade.

Fases topológicas e um número com nome

Para perceber a outra metade do prémio, é necessário entender o que é uma fase topológica da matéria e, para isso, temos de recuar até 1879. Nesse ano, Edwin Hall descobriu o seguinte efeito: quando um campo magnético é aplicado num condutor perpendicularmente à direcção da corrente eléctrica I , surge uma tensão eléctrica V_H , na direcção transversal, perpendicular quer à corrente quer ao campo magnético. O quociente entre a tensão eléctrica V_H , também designada tensão de Hall, e a corrente definem a resistência de Hall ρ_H ,

$$\rho_H = V_H / I.$$

A teoria clássica (Drude, 1900) prevê que a tensão de Hall seja proporcional ao campo magnético B , pois V_H tem origem na força de Lorentz, também ela perpendicular às direcções do campo B e da velocidade das cargas (direcção da corrente), e proporcional a B (ver [1]). Cerca de um século depois da descoberta do efeito de Hall, corria o ano de 1980, Klaus von Klitzing mediu o efeito de Hall em amostras onde os electrões estão confinados a moverem-se em duas dimensões, no plano correspondente à interface entre um óxido isolante e um semiconductor. Um exemplo do que von Klitzing descobriu está representado na Fig. 4, onde a resistência de Hall e a resistência longitudinal, medidas a baixas temperaturas ($T = 50$ mK), estão indicadas em função do campo magnético B , respectivamente em cima e em baixo. Se bem que para os valores mais baixos de B se verifica o efeito esperado, $\rho_H \propto B$, para valores mais elevados de B a variação de ρ_H revela patamares em que ρ_H é constante e dada com grande precisão por

$$\rho_H = (h/e^2)(1/n), \quad n \text{ inteiro} \quad (2)$$

onde h é a constante de Planck e e a carga do electrão. Uma tal quantificação tem dois aspectos muito impressionantes: primeiro, o facto de na Eq. (2) só aparecerem constantes universais, não havendo qualquer dependência em parâmetros do sistema (geometria da amostra, pureza) ou parâmetros externos (campos, temperatura); segundo, a precisão com que os resultados experimentais são descritos pela Eq. (2) é extremamente elevada, com desvios inferiores a uma parte em 10^9 .

A explicação para a Eq. (2) surge dois anos após a descoberta de von Klitzing. David Thouless e seus colaboradores mostraram que a resistividade de Hall, ou melhor, o seu inverso – a condutividade de Hall – é um invariante topológico,

$$\sigma_H = 1/\rho_H = (e^2/h) n, \quad n \text{ inteiro.} \quad (3)$$

Mas vamos por partes. Antes de evocar a topologia, é necessário perceber que Drude falha por falta de um ingrediente óbvio (em 1900) que não poderia ter sido incluído em 1900: falamos de Mecânica Quântica, sendo o efeito que von Klitzing descobriu conhecido por efeito de Hall

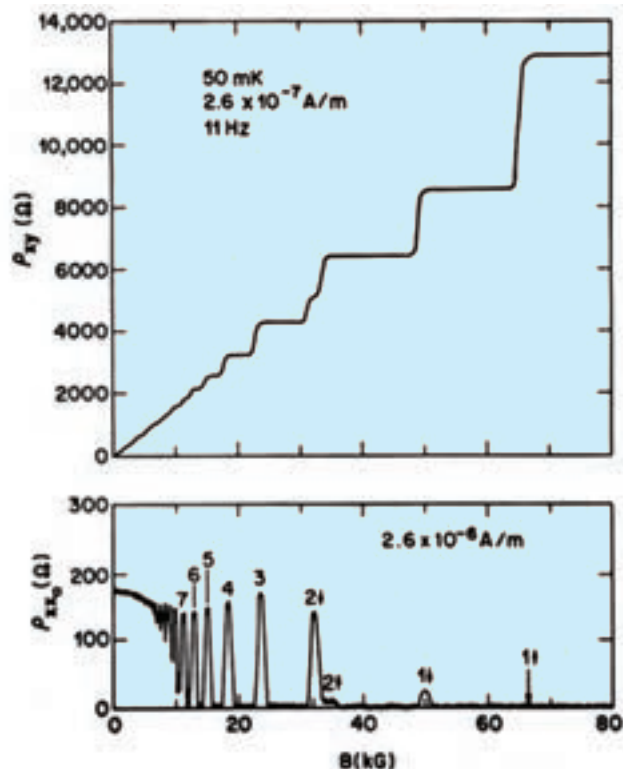


Fig. 4 - Resistência de Hall (em cima) e resistência longitudinal (em baixo) em função do campo magnético aplicado. [Crédito: M. A. Paalanem, D. C. Tsui, A. C. Gossard, Phys. Rev. B 25, 5566 (1982)]

quântico. Para um campo magnético suficientemente forte, podemos negligenciar o potencial atómico e substituir os átomos por um fundo de carga positiva que garante a neutralidade do sistema. O problema é agora o de electrões confinados a moverem-se no plano e sujeitos a um forte campo magnético perpendicular. A Mecânica Quântica é essencial na descrição deste sistema, como já Landau havia mostrado por volta de 1930 quando resolveu o problema.³ O espectro que Landau encontrou está quantificado em valores de energia dados por $E_n = \hbar \omega (n + 1/2)$, em que ω é a frequência ciclotrónica, $\omega = eB/m$, e n um inteiro. À semelhança do átomo, com os seus níveis atómicos, neste sistema também temos níveis energéticos quantificados, chamados níveis de Landau. Mas ao contrário do átomo, os níveis de Landau suportam um número macroscópico de electrões, dependendo esse número do campo magnético aplicado. Para campos suficientemente fortes, é mesmo possível colocar todos os electrões do sistema num único nível de Landau. Quando um destes níveis está completamente preenchido, ou seja, o número de electrões nesse nível é o número máximo possível, Thouless descobriu que a condutividade de Hall pode ser escrita como um integral que, dividido pelo quantum de condutância e^2/h , não é mais do que

³ Aprecie o leitor que o nome de Lev Landau já apareceu por mais do que uma vez neste artigo, curiosamente relacionado com temas muito pouco relacionados. Assim se demonstra a importância histórica de um físico.

um invariante topológico conhecido como *primeiro número de Chern* e que toma valores inteiros $n = 0, 1, 2, \dots$. Os detalhes matemáticos não cabem neste curto artigo, mas garantimos ao leitor que o que Thouless encontrou foi apenas uma generalização da Eq. (1) para o caso em que o integral é sobre duas variáveis em vez de uma (uma vez que o sistema agora é 2d). O que é importante é perceber que, sendo a condutividade de Hall um invariante topológico, esta resposta do sistema é insensível a perturbações como impurezas ou imperfeições na amostra, explicando a grande precisão com que a Eq. (3) se verifica experimentalmente. Thouless e colaboradores também mostraram que o resultado se mantém mesmo quando se inclui o efeito da rede atômica no cálculo, ou mesmo as interações entre os electrões.

Ponteiros de relógio e seus zeros

Mas afinal que propriedade discreta conta este invariante topológico através do inteiro n ? Também aqui a analogia com os ponteiros de relógio funciona bem. Como na base da análise do sistema está a descrição quântica, o integral correspondente ao invariante topológico envolve a função de onda dos electrões. Podemos pensar na função de onda como um ponteiro de relógio, sendo importante especificar, além da orientação do ponteiro, também o seu comprimento.⁴ Quando avaliamos a função de onda num determinado ponto, a informação importante é o quadrado do comprimento do ponteiro, que indica a probabilidade de encontrar o electrão nesse ponto. A orientação não tem, em geral, informação física. De facto, é possível em muitos casos (sistemas topologicamente triviais) fixar globalmente essa orientação e até eliminar esse grau de liberdade, ou seja, alinhar todos os ponteiros com a mesma direcção. Mas para o sistema que apresenta um efeito de Hall quântico, não é possível fixar globalmente a orientação dos ponteiros. Isto acontece porque a função de onda, ou melhor, o comprimento do ponteiro, se anula em determinados pontos. Ora, não é possível definir a orientação do ponteiro no ponto onde o seu comprimento se anula.

Convém esclarecer aqui ao leitor que estes zeros da função de onda não são no espaço das posições, mas sim no espaço dos números quânticos de que a função de onda depende. No caso do gás de electrões confinados ao plano, esses números quânticos são a quantidade de movimento nas duas direcções, ou seja, p_x e p_y . É no espaço destes dois parâmetros p_x e p_y , conhecido por espaço recíproco, que a função de onda se anula em alguns

pontos. Usando a analogia dos ponteiros de relógio, estes zeros da função de onda funcionam como vórtices ou antivórtices na textura de ponteiros, exatamente como representado na Fig. 3. Como discutido no contexto do trabalho de Kosterlitz e Thouless na secção anterior, cada vórtice é caracterizado por uma “carga”, ou seja, *winding number*. O inteiro n que figura na Eq. (3) para a condutividade de Hall, ou o invariante topológico associado, conhecido na matemática por primeiro número de Chern, não é mais do que a carga total de todos os vórtices dos estados ocupados por electrões. A posição dos zeros da função de onda pode mudar para diferentes configurações de impurezas na amostra, mas a carga total dos respectivos vórtices não se altera. O mesmo acontece com outro tipo de perturbações, o que confere uma grande robustez ao fenómeno.

Estados de fronteira

Mas voltemos novamente à Fig. 4 e à descoberta de von Klitzing. A figura tem dois painéis, o de cima relativo à quantificação da resistência de Hall, já explicada, e o segundo correspondente à resistência longitudinal ρ_{xx} , definida simplesmente como o quociente entre a queda de tensão na direcção da corrente, V_x , e a própria corrente,

$$\rho_{xx} = V_x / I.$$

O que urge entender no resultado para ρ_{xx} é que o seu valor é nulo sempre que a resistência de Hall está num dos patamares. Isto significa que o transporte de corrente se faz sem dissipação de energia, tal como num superconductor, mas neste caso sem qualquer supercondutividade. A explicação deste fenómeno envolve o aspecto topológico do sistema e a presença de fronteiras. De facto, a medida da tensão de Hall requer que a amostra tenha uma determinada largura na direcção transversal à corrente, sendo V_H a diferença de potencial medida entre as duas fronteiras opostas. A corrente propaga-se precisamente ao longo destas fronteiras e não pelo interior da amostra. O interior, neste caso, comporta-se como um isolador, sendo o transporte de carga impossível a temperaturas baixas. Um isolador apresenta um hiato energético (intervalo de energia) entre um contínuo de estados com energia mais baixa, designado por banda de valência, e um contínuo de estados de energia mais alta, a banda de condução, sendo que todos os estados da banda de valência estão ocupados por electrões, e os da de condução vazios.

Ora, como David Thouless descobriu, para que o nosso sistema de Hall apresente uma condutividade de Hall quantificada, é necessário que um nível de Landau esteja totalmente ocupado, significando que o nível seguinte está vazio. Como existe um hiato (intervalo) energético entre os dois, o sistema é um isolador. Mas este isolador é diferente de um isolador convencional. Neste existe um invariante topológico associado a uma resposta quantificada do sistema. É uma nova fase da matéria. Uma fase topológica ou, mais concretamente, um isolador topológico. Num isolador topológico, as fronteiras apresentam estados que transportam corrente. É uma outra consequência da topologia que

⁴ O leitor familiar com números complexos reconhecerá que a função de onda não é mais do que um desses números, com o seu módulo e a sua fase.

não vamos aqui detalhar. Mas existe mesmo uma correspondência entre o interior do sistema e a sua fronteira, de tal maneira que o número de estados na fronteira é determinado exatamente pelo invariante topológico que caracteriza o interior; no caso do sistema de Hall, temos uma vez mais o número de Chern. Mas porque é que estes estados de fronteira transportam a corrente sem dissipação? A resposta é simples. O sistema que temos vindo a analisar é bidimensional – um plano. A fronteira é, por isso, unidimensional – como um fio. Num fio, a propagação só é possível em dois sentidos. Digamos, *para lá e para cá*. Num fio convencional existe dissipação porque os electrões que vão para lá, ao colidir com impurezas ou devido a imperfeições, começam a vir para cá. Existe, portanto, resistência à propagação da corrente, sendo necessária uma tensão longitudinal (campo eléctrico) para garantir que há mais electrões a ir para lá do que a vir para cá. No sistema de Hall que temos vindo a analisar, todos os estados do tipo “electrão a ir para lá” estão na mesma fronteira da amostra, enquanto os estados do tipo “electrão a vir para cá” se encontram todos na fronteira oposta. Um electrão a ir para lá não pode inverter a sua velocidade porque isso implicaria atravessar toda a amostra, cujo interior, recorde-se, é um isolador. Por isso o transporte longitudinal se dá sem dissipação.

Haldane e o seu legado

Um sistema plano com duas fronteiras paralelas, ou seja, uma fita, e onde numa das fronteiras só há electrões que vão para lá e na outra só electrões que vêm para cá, claramente quebra alguma simetria. A simetria que o sistema de Hall quebra é a simetria de *inversão temporal*, ou seja, o sistema não fica invariante quando se põe o tempo a andar para trás; as fronteiras trocam de papel ao inverter a seta do tempo. O que é importante notar aqui é que o sistema, ao contrário de outros em física, não decide quebrar esta simetria para, por exemplo, ganhar energia. Esta simetria já estava quebrada desde o início quando introduzimos o campo magnético, pois este quebra explicitamente a simetria de inversão temporal.⁵ Aqui entra Haldane, cujo contributo não referimos ainda.

Haldane mostrou, num artigo publicado em 1988, que é possível realizar uma fase topológica sem campo magnético, desde que se quebre a simetria de inversão temporal. Ou seja, os níveis de Landau não são necessários. Haldane inventou um modelo, hoje chamado de modelo de Haldane, onde a simetria de inversão temporal está explicitamente quebrada, mas sem campo magnético. O sistema apresenta uma condutividade de Hall quantificada, como no efeito de Hall quântico de von Klitzing, sendo conhecido por efeito de Hall anómalo quantificado. O modelo de Haldane não tinha, em 1988, qualquer realização física. Foi necessário esperar vinte e cinco anos, até 2013, para

que o efeito de Hall quantificado fosse observado na ausência de campo magnético em filmes finos do material $(\text{Bi,Sb})_2\text{Te}_3$ dopado com Cr – a primeira realização da fase topológica da matéria prevista por Haldane. O modelo de Haldane, e a sua fase topológica, foi realizado em 2014 usando gases atómicos a temperaturas muito baixas (átomos frios), suportados por redes ópticas. Mas talvez o aspecto mais importante do modelo de Haldane é que ele está na génese de recentes desenvolvimentos no que diz respeito a novas fases topológicas da matéria. Mas disso falaremos na derradeira secção deste artigo, que é a que se segue.

De referir ainda que Haldane foi galardoado com o prémio Nobel, não só pelo trabalho de 1988 que já descrevemos, mas também por importantes contribuições no entendimento de cadeias magnéticas, principalmente da diferença entre cadeias de spin inteiro e de spin semi-inteiro. A topologia tem aqui também o papel central, mas nada mais diremos sobre o assunto por falta de espaço. O leitor mais curioso é assim remetido para os documentos de suporte ao prémio Nobel da Física 2016 [2].

Implicações, aplicações e Futuro

Ao longo do artigo, foram já mencionadas algumas implicações. No caso da transição de fase topológica de Kosterlitz e Thouless, vimos que esta descreve uma variedade grande de sistemas aparentemente muito distintos, como materiais supercondutores depositados em filmes finos, sistemas de átomos frios depositados em redes ópticas e ainda materiais ditos superfluidos. Relativamente a aplicações, não podemos deixar de referir uma relacionada com o efeito de Hall quântico. Por ser um fenómeno característico duma fase topológica, a quantificação da condutividade de Hall é extremamente precisa, superior a uma parte em 10^9 . Por isso, o valor da medição do quantum de resistência obtida por efeito de Hall quântico, $h/e^2 = 25812.807557(18) \Omega$,⁶ é agora usada como padrão de resistência.

Mas terminemos este artigo falando de futuro. E como, muitas vezes, para falar do futuro é necessário falar do passado, voltemos ao trabalho de Haldane, e ao seu artigo de 1988. Em retrospectiva, este foi o trabalho que abriu caminho à realização de muitas outras fases topológicas em sistemas electrónicos. Em 2005, usando um modelo composto por duas cópias do modelo de Haldane, uma para cada componente de spin do electrão, Kane e Mele mostraram como realizar uma fase topológica sem quebrar simetria de inversão temporal. Esta

⁵ Uma das formas de produzir campo magnético é usando uma espira de corrente. Porém, ao inverter o sinal do tempo invertemos a corrente e logo o sentido do campo magnético. Por isso o campo magnético não respeita a simetria de inversão temporal.

⁶ Deduzido do valor recomendado pelo CODATA de 2006 do quantum de condutância, $G_0 = 2e^2/h$ (Nota do Editor).

fase teria aplicação direta no grafeno, descoberto um ano antes, sendo o ingrediente principal o acoplamento spin-órbita. Esse acoplamento no grafeno é demasiado pequeno, e essa fase não ocorre. Mas no ano seguinte, em 2006, Andrei Bernevig e Shou-Cheng Zhang previam a mesma fase em semicondutores convencionais com acoplamento spin-órbita na presença de um gradiente de deformação; e ainda nesse ano, os mesmos autores, em colaboração com Tayler Hughes, previam essa fase topológica em poços quânticos de HgTe. Esta última proposta havia de ser verificada experimentalmente já em 2007. Desde então, novas fases topológicas têm sido propostas e observadas: não só isoladores, mas também semimetais e metais, e até supercondutores topológicos, não só em 2d mas também em 1d e 3d. Particularmente relevante é a recente realização de supercondutores topológicos em 1d, com nanofios semicondutores. Por serem fases topológicas, e tal como a fita no sistema de Hall quântico, as extremidades deste nanofio supercondutor apresentam estados de fronteira. Estes estados de fronteira são extremamente exóticos, contendo alguns dos ingredientes essenciais para se tornarem constituintes fundamentais dum possível computador quântico. Os autores estão convictos de que este prémio Nobel não será o último relacionado com fases topológicas da matéria.

Agradecimentos

Os autores agradecem aos colegas Miguel Araújo, Pedro Sacramento e Vítor Rocha Vieira inúmeras discussões sobre este e outros temas, a também a leitura crítica deste artigo.

Agradecimento aos alunos Miguel Gonçalves (4º ano) e Francisco Vazão (1º do MEFT, IST) por se aventurarem destemidamente na Física do modelo de Haldane.

Eduardo Castro e Pedro Ribeiro agradecem o apoio da FCT através da bolsa UID/CTM/04540/2013. Pedro Ribeiro agradece também o apoio através do contracto Investigador FCT No. IF/00347/2014.

Por opção pessoal, os autores do texto não escrevem segundo o novo Acordo Ortográfico

Referências

1. “O efeito de Hall quantificado, prémio Nobel da Física de 1985”, J. M. B. Lopes dos Santos, *Gazeta de Física* 9, 1 (1986).
2. https://www.nobelprize.org/nobel_prizes/physics/laureates/2016/popular-physicsprize2016.pdf.



Eduardo V. Castro obteve a licenciatura e o doutoramento na Faculdade de Ciências da Universidade do Porto. Fez pós-doutoramento no MIP-⁻PKS em Dresden e no ICMM-CSIC em Madrid, e neste momento é professor no Instituto Superior Técnico. Trabalha na área da teoria da matéria condensada, com ênfase para os materiais bidimensionais (grafeno e pós-grafeno), dedicando-se ainda ao estudo dos sistemas electrónicos com topologia não trivial.



Pedro Ribeiro obteve a licenciatura no Instituto Superior Técnico e o doutorou-se pela Universidade Pierre et Marie Curie em Paris. Fez pós-doutoramentos no CFIF, IST em Lisboa, no CMT, MIT em Cambridge, EUA e no MPI-PKS, Dresden, Alemanha. Foi também *research fellow* no Russian Quantum

Center em Moscovo. Desde 2015 é investigador auxiliar ao abrigo do programa Investigador FCT e professor convidado no IST. A sua investigação é dirigida na área de matéria condensada teórica com ênfase em sistemas fortemente correlacionados, fenómenos críticos e em sistemas fora de equilíbrio, também tendo efectuado trabalho em teoria da informação quântica.