13
artigo geral
VOL. 40 - N. 2

Cosmologia quântica
sem singularidades

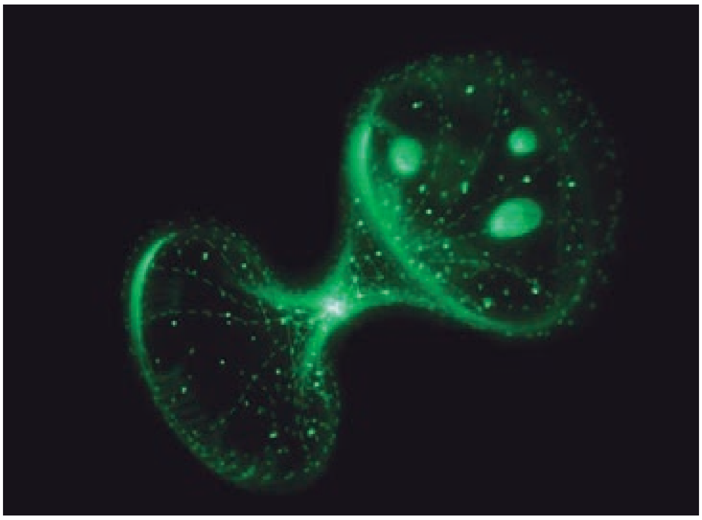
José M. Velhinho

Universidade da Beira Interior, R. Marquês D'Ávila e Bolama, 6201-001 Covilhã

jvelhi@ubi.pt

Resumo

A Relatividade Geral aplicada ao universo como um todo conduz à chamada teoria de Big Bang, prevendo a existência de uma singularidade cosmológica. Desde cedo, houve a expectativa de que a incorporação de efeitos quânticos regularizasse de alguma forma a singularidade. Porém, esta expectativa tardou a concretizar-se. Nos últimos anos, uma nova proposta de cosmologia quântica, conhecida por *loop quantum cosmology*, veio abrir novas perspectivas. Neste artigo faz-se uma breve introdução ao assunto, focando na questão da remoção da singularidade.



Introdução

Quando aplicada ao universo como um todo, a teoria da Relatividade Geral (RG) de Einstein prevê a existência de uma singularidade no passado distante. A singularidade, que marca por assim dizer "o princípio do tempo", está afastada do presente por um tempo muitíssimo longo (cerca de 14 mil milhões de anos), mas finito. Concretamente, quando se consideram tempos cada vez mais próximos deste instante inicial, a teoria prevê um crescimento sem limite de quantidades como a densidade de matéria e a temperatura, bem como da curvatura, diretamente ligada à estrutura do espaço-tempo. Esta é a conhecida teoria do Big Bang: conjugando as observações astronómicas atuais com hipóteses simples sobre o universo como um todo e com a RG, chega-se à descrição do universo como estando em expansão desde um instante inicial, partindo de uma densidade aparentemente infinita (ver [1]).

O aparecimento de singularidades na teoria da RG não é exclusivo das suas aplicações à cosmologia. Verificou-se que a existência de singularidades é uma característica geral da RG [2]. Coloca-se naturalmente a questão do estatuto destas singularidades, e em particular da singularidade cosmológica associada ao Big Bang. Serão verdadeiras singularidades físicas? Neste caso, a teoria perde poder de previsão e as singularidades deverão ser vistas como "buracos" no espaço-tempo, impenetráveis ao conhecimento. Outra perspetiva é a de que a teoria da RG poderá estar a ser usada para além dos seus limites de aplicabilidade. Qualquer teoria física tem necessariamente um domínio restrito de validade, e a vizinhança de singularidades poderá bem marcar o limite de aplicabilidade da RG.

A expectativa é que modificações ou extensões da teoria de Einstein permitam esclarecer as questões deixadas em aberto pela RG, sendo as singularidades eliminadas ou substituídas por novas estruturas acessíveis ao conhecimento. Diversas propostas têm sido consideradas, desde modificações relativamente modestas da teoria de Einstein até abordagens muito mais ambiciosas, potencialmente unificadoras de toda a física fundamental, envolvendo dimensões espaciais extra, novos objetos (cordas e membranas) e novas interações. Uma perspectiva que desde cedo suscitou interesse é a seguinte: talvez a RG não necessite de ser modificada *per se*, mas apenas seja necessário conjugar a RG com a teoria quântica. De facto, espera-se que os efeitos quânticos sejam relevantes precisamente próximo das singularidades, e talvez esses efeitos eliminem, ou suavizem a singularidade.

Nesta abordagem quântica à questão das singularidades, a expectativa é então que os efeitos quânticos estabilizem o comportamento da matéria a muito altas densidades, evitando o aparecimento de singularidades. De certo modo, espera-se que a física quântica tenha aqui um papel análogo ao desempenhado na estabilidade dos átomos. De facto, os efeitos quânticos são cruciais para explicar a própria existência dos átomos: sem ter em conta estes efeitos, a teoria clássica do eletromagnetismo diz-nos que os átomos simplesmente colapsariam sobre si próprios.

Recordemos que as teorias que descrevem uma dada interação física tipicamente não nascem quânticas: nascem com uma formulação clássica, sendo depois necessário, *a posteriori*, encontrar a correspondente descrição quântica. Tal é o caso da teoria da RG de Einstein, que deste ponto de vista é ainda uma teoria "clássica", embora venha ela própria substituir a teoria da gravitação de Newton. A este processo de construir a versão quântica de uma dada teoria clássica dá-se o nome de *quantização*. A quantização da RG, ou a construção, por qualquer outra via, de algo a que se possa chamar uma teoria quântica da gravitação tem-se revelado extremamente difícil, e uma teoria completa não existe. (É sabido desde os trabalhos de 't Hooft e Veltman [3] que a RG é uma teoria com características diferentes das outras teorias de campo associadas a interações conhecidas – é uma teoria dita *não-renormalizável*, de modo que a sua quantização não pode ser efetuada da mesma forma que, por exemplo, a do eletromagnetismo.)

Deve dizer-se que começou a ganhar adeptos a hipótese de a gravitação não necessitar de ser quantizada, *per se*. Enquadra-se nesta linha a possibilidade de os fenómenos gravitacionais serem manifestações de larga escala de uma teoria mais fundamental. Nesta perspectiva, a existir uma teoria quântica seria dessa hipotética teoria fundamental, e não da gravitação diretamente.

A perspetiva que consideramos neste artigo é que a RG clássica, tal como está, deve ser quantizada, e que essa quantização é possível.

Cosmologia quântica

Não obstante a quantização da teoria da relatividade completa — com todos os seus graus de liberdade — se ter revelado extremamente difícil, a quantização de modelos que descrevem o universo como um todo é certamente possível. De facto, estes ditos modelos cosmológicos, que se aplicam ao universo como um todo, ignoram uma infinidade de detalhes que para o nível de descrição pretendida são irrelevantes, tornando estes modelos muitíssimo menos complexos do que a teoria da RG completa. Na verdade, ao considerarmos estes modelos passamos de um sistema com um número infinito de graus de liberdade para um sistema com um número finito, e até muito pequeno, de graus de liberdade. Deve dizer-se que não se espera que este procedimento — considerar primeiro modelos cosmológicos simplificados ao nível clássico e quantizar depois — permita obter com rigor todos os efeitos quânticos em cosmologia, mas espera-se que reproduza pelo menos os aspectos essenciais desses efeitos quânticos.

Esta abordagem foi posta em ação a partir dos anos 60 do século passado, chegando-se à chamada cosmologia quântica de Wheeler-de Witt [4]. Apesar do enorme mérito desta teoria pioneira, verificou-se que o modelo quântico a que se chega não altera o estatuto da singularidade encontrada no modelo clássico. A singularidade cosmológica persiste. Em particular, mesmo ao nível quântico, os valores das grandezas relevantes, como a densidade, continuam a crescer sem limite quando nos aproximamos da singularidade.

Já no corrente século, surgiu uma nova versão de cosmologia quântica, conhecida por *loop quantum cosmology* (LQC) (que se poderia traduzir em português por *cosmologia quântica de lacetes*), que veio alterar substancialmente a situação [5,6]. Relativamente à teoria de Wheeler-de Witt, a LQC beneficia do facto de ter por trás um quadro formal bastante desenvolvido e rigoroso, com vista à quantização não apenas de modelos cosmológicos mas de toda a RG. De facto, a LQC está fortemente relacionada com a teoria chamada *loop quantum gravity* (LQG), a qual por sua vez é uma proposta para obter uma teoria quântica completa da gravitação. Apesar de não poder ainda ser considerada uma teoria completa, a LQG atingiu já um estado de grande maturidade, quer do ponto de vista físico [7] quer do ponto de vista matemático [8].

As ideias, as propostas físicas e os métodos matemáticos da LQG encontram-se de forma essencial na base da LQC, e conduzem a uma teoria substancialmente diferente do modelo quântico de Wheeler-de Witt, com consequências físicas muito distintas. Em primeiro lugar, a aplicação das ideias e métodos da LQG conduz a uma escolha de variáveis diferentes e, acima de tudo, a uma quantização dos modelos cosmológicos radicalmente diferente.

Este último ponto merece uma discussão mais técnica, pelo seguinte. Como já foi referido, os modelos cosmológicos têm um número finito de graus de liberdade. É sabido que, desde que no processo de quantização se cumpra uma condição de continuidade que parece muito natural, para sistemas com um número finito de graus de liberdade o processo de quantização (de um dado sistema em concreto) resulta sempre na mesma teoria quântica. Este resultado, conhecido como teorema de unicidade de Stone-von Neumann, é muito importante em física-matemática, pois existem *a priori* muitas formas de realizar o processo de quantização, e é fundamental que a teoria quântica final não dependa da forma particular escolhida. O que sucede então com a LQC? Porque resulta a LQC numa teoria quântica radicalmente distinta da de Wheeler-de Witt? O facto é que o método de quantização aplicado na LQC viola a condição de continuidade, que em sistemas comuns parece tão natural. O método de quantização seguido é, por conseguinte, peculiar e não se aplica aos sistemas físicos mais comuns. Mas essa falta de continuidade tem aqui uma motivação e uma legitimação teórica importantes, uma vez que a mesma falta de continuidade surge de forma bastante natural na teoria da LQG, que se aplica à RG completa. Assim, do ponto de vista estrito da quantização de modelos cosmológicos com um número finito de graus de liberdade, a opção por uma quantização deste tipo parece radical, mas tal resulta diretamente da LQG. É precisamente esta opção por um processo de quantização não equivalente ao usual que permite obter uma teoria quântica distinta. Em particular, nesta nova teoria a singularidade cosmológica é eliminada, como descrevemos a seguir.

Modelo cosmológico clássico

Visto como um todo, o universo apresenta-se como muito razoavelmente homogéneo e isotrópico. Significa isto que, a escalas muito grandes, a distribuição de matéria e energia no universo parece uniforme, e que não há direções privilegiadas no universo, em particular no que diz respeito à sua expansão. Os modelos cosmológicos mais simples em RG incorporam, portanto, os princípios gerais de homogeneidade e isotropia, passando a geometria do universo a ser descrita por uma única variável, chamada fator de escala. Este fator de escala — *a* — essencialmente dá-nos uma noção de distância. (Em rigor, existem três possibilidades para a forma global do espaço em que vivemos, mas os dados experimentais parecem favorecer uma delas, precisamente a mais simples, a de um espaço dito euclidiano.) Sabemos que o fator de escala tem vindo a aumentar ao longo do tempo cósmico precisamente porque conseguimos observar e medir a expansão do universo: as galáxias afastam-se umas das outras, todos os pontos do espaço se afastam uns dos outros, como numa rede elástica que é puxada igualmente em todas as direções, ou como na superfície de um balão insuflado. Neste contexto, uma equação muito importante é a chamada equação de Friedmann

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho, \qquad (1)$$

que relaciona a taxa relativa de expansão do universo com a densidade de matéria ρ. Aqui, G é a constante de Newton e a' designa a derivada de a, de modo que a'/a — habitualmente designado por parâmetro de Hubble — é a taxa relativa de expansão.

A expressão para a densidade de matéria ρ depende do modelo particular escolhido. Com vista a ter um modelo simples e completamente tratável do ponto de vista quântico, consideramos como matéria o chamado campo escalar (homogéneo e sem massa), cujo valor passamos aqui a designar pelo símbolo τ.

Para este tipo de matéria, pode mostrar-se que a densidade ρ é inversamente proporcional à sexta potência do fator de escala. Verifica-se também que, na situação de expansão do universo, o valor da variável τ é crescente, tal como o fator de escala. A variável τ pode, por conseguinte, ser adotada para descrever a passagem do tempo, o que passaremos a fazer. Com vista à aplicação subsequente da quantização por via da LQC, é também conveniente substituir o fator de escala a pela variável equivalente $v = a^3$.

A aplicação das equações da RG permite obter sem dificuldade a relação entre as variáveis v e τ, aqui interpretada como a evolução da noção de volume do universo ao longo do tempo cósmico (representado pela variável τ). Essa relação é dada pela seguinte expressão:

$$v = v_0 \exp\left[\sqrt{12\pi G}(\tau - \tau_0)\right], \qquad (2)$$

onde v_0 e τ_0 são constantes. Uma representação gráfica desta relação é apresentada na figura 1, com o tempo τ no eixo horizontal e o volume v no eixo vertical. Esta trajetória do fator de volume v em função do tempo corresponde precisamente ao modelo de Big Bang tal como previsto pela RG: o fator de volume v – ou o fator de escala a – crescem com o passar do tempo cósmico. Ao invés, se tentarmos andar para trás no tempo e perceber o que se passou no passado remoto, encontramos v e a a tender para zero, o que corresponde ao colapso do espaço. Como a densidade de matéria ρ varia inversamente com o fator de escala, con-

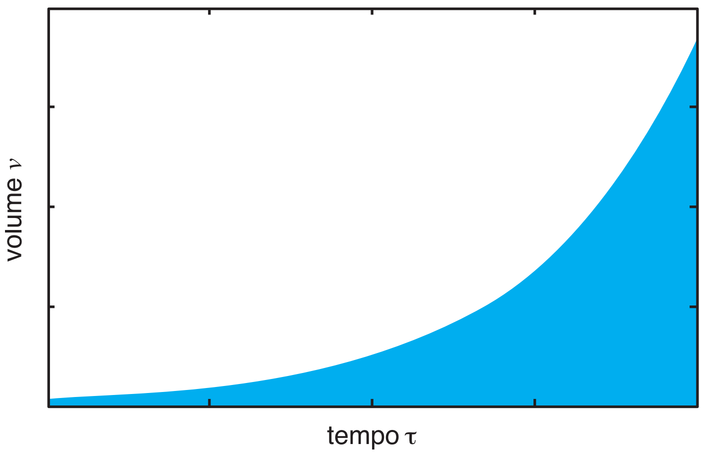


Fig. 1 - Trajetória clássica: Big Bang. Evolução do fator de volume v em função da variável temporal τ. O eixo horizontal representa a variável temporal τ e o eixo vertical representa o fator de volume v.

firmamos que a densidade de matéria aumenta sem limite quando caminhamos em direção ao passado cósmico.

Modelo quântico LQC: remoção da singularidade

Passamos a discutir o tratamento quântico deste modelo, no âmbito da LQC. Tal como na teoria de Wheeler – de Witt, a equação fundamental é da forma

$$\hat{H}\Psi = 0 \tag{3}$$

onde Ψ é a função de onda, característica da física quântica. Na abordagem da LQC a função de onda depende de τ e de v [9]. $\hat{H}$ é um operador que se obtém do processo de quantização. Nas situações típicas, $\hat{H}$ é um operador diferencial relativamente às variáveis da função de onda, mas – devido à já referida descontinuidade presente no processo de quantização da LQC – neste caso é um operador de diferenças finitas, relativamente a v (continua a ser um operador diferencial relativamente a τ). Verifica-se também que (após a seleção de um subconjunto adequado do domínio inicial) a variável v toma valores numa rede regular, i.e. o fator de volume v é efetivamente discretizado por via da aplicação dos métodos da LQC. Tal pode ser visto como a implementação em LQC da discretização de grandezas geométricas, algo que surge a um nível fundamental na LQG.

Estando o modelo quântico perfeitamente bem definido, podem então extrair-se consequências físicas. No âmbito da LQC a questão da singularidade foi abordada da seguinte forma [9]. Começa-se por considerar um estado semiclássico na região dos valores elevados de τ e, por conseguinte, de v. Note-se que um valor elevado de v corresponde a uma idade avançada do universo, por exemplo próxima do tempo presente. Sabemos que no presente os efeitos quânticos na gravitação a larga escala são certamente desprezáveis (de outro modo já teriam sido detetados), de modo que a função de onda nesta região deve ser de tipo dito semiclássico, i.e. a descrição quântica deve ser bem aproximada pela descrição clássica. Mais concretamente, isto significa que a função de onda Ψ tem valores significativos apenas numa pequena região em torno da trajetória clássica. Uma vez construída esta função de onda semiclássica no presente, utiliza-se a equação (3) para obter, numericamente, a função de onda no passado, em tempos cada vez mais remotos. Observam-se as seguintes duas características fundamentais na evolução temporal da função de onda: *i*) a função de onda mantém-se razoavelmente semiclássica em todo o seu percurso, i.e. não há uma grande dispersão de valores em torno do valor máximo; *ii*) os valores médios de v, que na versão quântica substituem os valores clássicos, seguem aproximadamente a trajetória clássica da equação (2), representada na Figura 1, até um determinado valor mínimo do volume, e depois voltam a subir. Este comportamento da evolução temporal — para o passado — dos valores médios do fator de volume v está representado aproximadamente na curva da Figura 2, onde se repete a trajetória clássica, para comparação.

Comparativamente com a trajetória clássica, é notável o ressalto nos valores médios de v, e por consequência também no fator de escala a. Tanto a como v invertem a sua aparentemente inexorável tendência para o colapso. Em lugar de o universo continuar a contrair em direção ao hipotético Big Bang, atinge um mínimo e volta a expandir. Lendo a história do passado para o futuro, o que esta perspetiva nos vem dizer é que o Big Bang poderá não ter existido: antes da actual expansão poderá ter existido uma contração, que levou o universo a um estado de volume mínimo, mas não nulo.

Vejamos agora o que se passa com a evolução da densidade de matéria neste modelo. Dado que se evita o colapso do fator de escala e do volume, evita-se também o crescimento sem limite da densidade. De facto, verifica-se que a densidade tem neste modelo um limite superior, o qual é universal, i.e. é uma constante, independente de qualquer condição particular. Este limite, que passaremos a designar por ρ_{crit}, é elevadíssimo, cerca de 40 % da chamada densidade de Planck, mas é finito — o que conceptualmente faz toda a diferença.

Importa ainda referir que, dado o comportamento aproximadamente semiclássico da função de onda em toda a sua evolução temporal, a física deste modelo quântico é razoavelmente bem descrita em termos clássicos, com a notável diferença de que a trajetória clássica da Figura 1 deve ser substituída pela curva dos valores médios de v, da Figura 2. Esta modificação reflete-se, por exemplo, de forma particularmente simples na equação de Friedmann (1), que, com as devidas correções

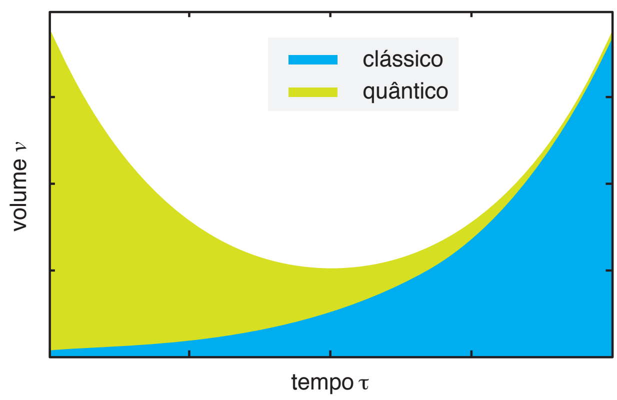


Fig. 2 - Trajetória quântica dos valores médios de v. Ressalto quântico.

quânticas, toma agora a forma:

$$\left(\frac{a'}{a}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho\left(1 - \frac{\rho}{\rho_{\text{crit}}}\right).$$

Vemos, portanto, que os efeitos quânticos introduzidos por via da LQC conseguem de facto modificar o comportamento da teoria da RG na vizinhança da singularidade cosmológica, substituindo-a por um ressalto perfeitamente causal, tornando essa região acessível à análise teórica. Ao mesmo tempo, a cosmologia clássica é totalmente recuperada em regiões longe da singularidade, de modo que a LQC é certamente uma teoria viável, com o correto limite semiclássico.

Apesar de termos discutido apenas o caso do modelo cosmológico mais simples, note-se que resultados análogos estão confirmados numa grande variedade de situações e para diferentes tipos de singularidades [6]. Finalmente, é de referir que o interesse da LQC, e da cosmologia quântica em geral, não se esgota na questão da singularidade. As modificações à física do universo primitivo introduzidas pelos efeitos gravitacionais quânticos podem também revelar-se cruciais para a compreensão da formação de estruturas no universo. Em particular, estão em curso estudos com vista a tentar explicar as anomalias detetadas no espectro da radiação cósmica de fundo por via de efeitos quânticos.

Agradecimentos

Quero agradecer ao Guillermo Mena Marugán, à Ilda Rodrigues e ao Rui Barata.

Referências

1. A. B. Henriques, *Teoria da Relatividade Geral* — uma introdução (IST Press, 2009).
2. S. W. Hawking e G. F. R. Elis, *The Large Scale Structure of Space-Time* (Cambridge University Press, 1973).
3. G. 't Hooft e M. Veltman, "One loop divergencies in the theory of gravitation", *Ann. Inst. H. Poincare Phys. Theor. A* 20, 69 (1974)
4. J. A. Wheeler, *Superspace and quantum geometrodynamics*, in: Battelle Rencontres, ed. J. A. Wheeler e C. M. DeWitt (W. A. Benjamin, 1972).
5. M. Bojowald, "Loop quantum cosmology", *Living Rev. Rel.* 8, 11 (2005).
6. A. Ashtekar e P. Singh, "Loop quantum cosmology: a status report", *Class. Quantum Grav.* 28, 213001 (2011).
7. C. Rovelli, *Quantum Gravity* (Cambridge University Press, 2004).
8. T. Thiemann, *Modern Canonical Quantum General Relativity* (Cambridge University Press, 2007).
9. A. Ashtekar, T. Pawlowski e P. Singh, "Quantum nature of the big bang: Improved dynamics", *Phys. Rev.* D 74, 084003 (2006).

José M. Velhinho é Licenciado e Mestre em Física pela Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa. Obteve Doutoramento e Agregação pelo Instituto Superior Técnico. É membro do CENTRA (Centro Multidisciplinar de Astrofísica). Tem experiência em Física-Matemática, Teoria Quântica do Campo e Gravitação Quântica.