OLIMPÍADAS DE FÍSICA

NOTÍCIAS BREVES DAS OLIMPÍADAS

Relatório 1997/98

Foram entregues nos Ministérios da Educação e da Ciência e da Tecnologia, em Outubro passado, os relatórios de actividades e de contas relativos às Olimpíadas Nacionais e Internacionais do passado ano lectivo. Na mesma ocasião foi entregue o plano de actividades das Olimpíadas de Física para o presente ano lectivo.

Calendário das Olimpíadas para 1998/99

Estão fixadas as datas para a realização das provas regionais e nacionais das Olimpíadas de Física 1998/99. As provas regionais terão lugar no dia 15 de Maio de 1999 simultaneamente em Lisboa, Coimbra e Porto. As provas nacionais estarão a cargo da Delegação Regional do Sul e Ilhas e decorrerão em Lisboa nos dias 25 e 26 de Junho (e não Julho como por lapso saiu no cartaz promocional das olimpíadas).

Portugal na XXX Olimpíada Internacional de Física já iniciaram as suas actividades de preparação. A XXX IPhO decorrerá em Pádua (Itália) de 18 a 27 de Julho de 1999.

Alteração ao Regulamento

Para adequar o Regulamento das Olimpíadas de Física à nova realidade do ensino em Portugal onde há uma separação clara dos ensinos básico e secundário (o que não acontecia até há pouco tempo), foram alterados os escalões de participação nas Olimpíadas de Física. Assim, ao escalão A passam a poder concorrer apenas alunos do 9º ano de escolaridade e ao escalão B apenas alunos do 11º ano. Noutro local desta secção publica-se o novo Regulamento das Olimpíadas que contempla esta e outras pequenas alterações.

«Ex-Olímpico» premiado em Inglaterra

Pedro Miguel Nunes Pereira de Almeida Reis, que participou na Olimpíada Internacional de Física no ano de 1996, realizadas em Oslo, Noruega, foi distinguido com o prémio para o melhor estudante de Física do Reino Unido deste ano. O galardão — *1998 Science, Engineering & Technology Student of the Year Award* — foi-lhe conferido pelo Particle Physics and Astronomy Research Council (PPARC).

Depois de concluir o ensino secundário na Escola Secundária Alves Martins, em Viseu, em 1996, Pedro Reis iniciou estudos no Departamento de Física da Universidade de Manchester, onde se tem distinguido como um aluno brilhante no curso de Física. Concorriam ao prémio os melhores alunos de todos os Departamentos de Física das universidades britânicas, tendo o Pedro Reis sido escolhido, numa primeira fase, para integrar a "short-list" de apenas três alunos, vindo a ser nomeado, posteriormente, vencedor absoluto. A sua nomeação para o prémio deve-se ao trabalho de projecto intitulado "Cahotic behaviour in an impact oscilator", que desenvolveu ao longo do segundo ano do curso.

A Comissão Nacional das Olimpíadas congratula-se com a atribuição deste prémio ao Pedro Reis e formula votos dos melhores êxitos na sua vida académica.

A Secção *"Olimpíadas de Física"* é coordenada por Manuel Fiolhais e José António Paixão. O contacto com os coordenadores poderá ser feito para: Departamento de Física, Universidade de Coimbra, 3000 Coimbra; ou pelos telefones 039-410615, 410645, fax 039-829158 ou e-mails tmanuel@hydra.ci.uc.pt, jap@pollux.fis.uc.pt.

REGULAMENTO DAS OLIMPÍADAS DE FÍSICA

I — Objectivos

A Sociedade Portuguesa de Física organiza anualmente as Olimpíadas Nacionais de Física e promove a participação de uma equipa portuguesa na *International Physics Olympiad (IPhO).*

As Olimpíadas de Física têm por objectivo incentivar e desenvolver o gosto pela Física nos alunos dos Ensinos Básico e Secundário, considerando a sua importância na educação básica dos jovens e o seu crescente impacte em todos os ramos da Ciência e Tecnologia.

II — Olimpíadas Nacionais de Física

II.1 — Participação nas provas

Podem participar nas Olimpíadas de Física os alunos das Escolas Secundárias e Básicas nacionais, públicas ou privadas, que satisfaçam as condições indicadas em *II.2.*

II.2 — Escalões

Em cada ano lectivo serão realizadas provas nos seguintes escalões:

ESCALÃO A: alunos do 9.º ano de escolaridade.

ESCALÃO B: alunos do 11.º ano de escolaridade, com idade inferior a 19 anos a 30 de Junho do respectivo ano lectivo.

As Escolas podem estar representadas nos escalões que desejarem. No escalão A a representação é por uma *equipa* de 3 alunos. No escalão B a representação é individual podendo cada Escola apresentar um máximo de três alunos.

II.3 — Tipo de Provas

No escalão A a prova será teórico-experimental a realizar em equipa.

No escalão B a prova, de carácter individual, terá uma parte teórica e uma parte teórico-experimental.

II.4 — Etapas

a) Etapa sub-regional

É da inteira responsabilidade da Escola participante a selecção dos seus representantes em cada escalão.

No caso de um número considerado excessivo de participantes, poderão as Delegações Regionais da SPF, do modo que julgarem mais conveniente, organizar etapas intermédias.

b) Etapa regional

Na etapa regional, da responsabilidade das Delegações Regionais da SPF, concorrerão as equipas (no escalão A) e os alunos (no escalão B) seleccionados na etapa anterior.

Nesta etapa será seleccionada uma equipa do escalão A e oito alunos do escalão B.

c) Etapa nacional

Na etapa final nacional, organizada em regime de rotatividade por cada Delegação da SPF em colaboração com a Comissão Nacional das Olimpíadas (ver Anexo I), participam as 3 equipas do escalão A (uma por Delegação) e os 24 alunos do escalão B (oito por cada Delegação Regional).

Na etapa nacional será apurada a equipa vencedora das Olimpíadas Nacionais de Física no escalão A.

No escalão B serão seleccionados oito a dez alunos candidatos à representação nacional na *IPhO* do ano seguinte.

II.5 — Outras disposições

a) Encargos financeiros

A SPF não comparticipa nas despesas da etapa sub-regional nem nas despesas de deslocação dos alunos e professores acompanhantes na etapa regional.

A SPF custeia as outras despesas relativas às etapas regionais e todas as despesas relativas à etapa nacional.

b) Material

Os participantes devem apresentar-se munidos de máquinas de calcular não programáveis. Podem também utilizar material de desenho desde que se apresentem munidos do mesmo.

c) Conteúdos das provas

Ver Anexo II.

d) Júris das provas

Na etapa regional as provas serão classificadas por um júri designado pela Delegação Regional da SPF.

Na etapa nacional as provas serão classificadas por um júri designado pela Delegação Regional da SPF em colaboração com a Comissão Nacional das Olimpíadas.

e) Professores acompanhantes

Na etapa regional os participantes de cada Escola virão acompanhados por um professor (no máximo dois professores se a Escola participar em mais de um escalão). Na etapa nacional os alunos serão acompanhados por um máximo de três professores por Delegação Regional.

II.6 — Prémios

Todos os alunos participantes na etapa regional recebem um prémio de presença.

Receberão prémios especiais na etapa regional:

a) Os alunos da equipa vencedora no Escalão A.

b) Os oito melhores classificados no Escalão B.

Receberão prémios na etapa nacional:

a) Os alunos da equipa vencedora no Escalão A.

b) Os oito melhores classificados no Escalão B.

II.7 — Calendarização

Até 30 de Novembro, cada Delegação da SPF enviará para as Escolas toda a documentação respeitante às Olimpíadas. Cada Delegação Regional informará as respectivas Escolas da metodologia a seguir na fase sub-regional, incluindo datas limite para apresentação de alunos concorrentes, etapas intermédias, etc. As datas das provas regionais e nacionais e outras informações específicas para cada ano lectivo constam do Anexo I.

III — Participação nas Olimpíadas Internacionais

Aos oito a dez alunos melhor classificados no escalão B das Olimpíadas Nacionais será, no ano lectivo seguinte, ministrada uma preparação especial englobando as matérias constantes do programa da *IPhO*, com particular ênfase nos temas não incluídos no ensino secundário. É condição obrigatória a frequência de Física no 12.º ano. A Comissão Nacional das Olimpíadas definirá os moldes em que decorre a preparação bem como as provas de apuramento dos cinco estudantes que participarão na *IPhO.* Este apuramento será efectuado durante o mês de Maio. A título excepcional, a Comissão Nacional das Olimpíadas poderá admitir à prova de selecção final outros alunos do 12º ano que demonstrem elevadíssima capacidade em Física.

IV — Pontos Omissos

Qualquer questão resultante de omissões ou dúvidas de interpretação do presente Regulamento será resolvido pela Organização.

V — Disposições Transitórias

O presente Regulamento em vigor no ano lectivo 1998/99.

ANEXO AO REGULAMENTO DAS OLIMPÍADAS DE FÍSICA — 1998/99

I

1. No ano lectivo 1998/99 as Olimpíadas Regionais decorrerão no dia 15 de Maio de 1999, em Lisboa, Porto e Coimbra. A Olimpíada Nacional, cuja organização está a cargo da Delegação Regional do Sul e Ilhas da SPF, decorrerá em Lisboa, a 25 e 26 de Junho de 1999.

2. Em 1998/99 a Comissão Nacional das Olimpíadas é constituída por:

- Secretário-Geral da S.P.F
- Secretário-Adjunto para os Assuntos Nacionais
- Presidente da Delegação Regional do Norte
- Presidente da Delegação Regional do Centro
- Presidente da Delegação Regional do Sul e Ilhas
- Representante da Divisão Técnica de Educação
- Prof.ª Ana Eiró (Dep. Física, FCUL)
- Prof. Manuel Fiolhais (Dep Física, FCTUC)
- Prof. José António Paixão (Dep. Física, FCTUC)

3. Aos alunos apurados no escalão B será ministrada uma preparação suplementar em 1999/2000 com vista à participação na IPhO'2000 que se realizará em Julho de 2000, no Reino Unido.

II

Programa da Olimpíada Nacional de Física 1998/1999

- Escalão A - programas completos dos 8.º e 9.º anos.
- Escalão B - programas completos dos 10.º ano e 11.º anos.

PROVAS DAS OLIMPÍADAS INTERNACIONAIS

Apresenta-se o enunciado e uma proposta de resolução do primeiro problema teórico saído na XXIX Olimpíada Internacional de Física realizada na Islândia em Julho de 1998.

Enunciado

Um prisma hexagonal a rolar

Considera um prisma hexagonal regular sólido, longo e rígido, como um lápis comum (Figura 1). A massa do prisma é M e está uniformemente distribuída. O comprimento do lado da base hexagonal é a. O momento de inércia I do prisma hexagonal em torno do seu eixo de simetria longitudinal é

$$I = \frac{5}{12} Ma^2 \qquad (1.1)$$

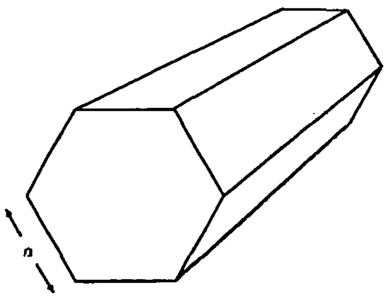

Fig. 1 — Um prisma sólido regular cuja base é um hexágono.

O momento de inércia I' em torno de uma aresta do prisma é

$$I' = \frac{17}{12} Ma^2 \qquad (1.1)$$

a) (3,5 pontos) O prisma encontra-se inicialmente em repouso, com o seu eixo na posição horizontal, sobre um plano inclinado que faz um ângulo θ com a horizontal (Figura 2). Considera que as faces do prisma são ligeiramente côncavas pelo que o prisma apenas toca o plano nas arestas. O efeito destas concavidades no momento de inércia pode ser ignorado. É dado um empurrão ao prisma pondo-o a rolar, descendo o plano inclinado "rolando aos solavancos", havendo em cada instante uma só aresta em contacto com o plano. Considera que o atrito evita o escorregamento do prisma e que este não deixa nunca o contacto com o plano. A velocidade angular imediatamen-te antes de uma dada aresta tocar o plano é ω_i e a velocidade angular imediatamente após o impacto é ω_f.

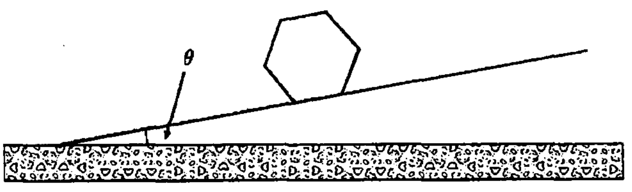

Fig. 2 — Um prisma hexagonal sobre um plano inclinado.

Mostra que se pode escrever

$$\omega_f = s\omega_i \qquad (1.3)$$

e escreve o valor do coeficiente s na tua folha de respostas.

b) (1 ponto) A energia cinética do prisma imediatamente antes e depois do impacto é K_i e K_f, respectivamente. Mostra que é válida a relação

$$K_f = rK_i \qquad (1.4)$$

e escreve o valor do coeficiente r na tua folha de respostas.

c) (1,5 pontos) Mostra que, para que o próximo impacto ocorra, K_i deve exceder um valor mínimo $K_{i,min}$ que pode exprimir-se na forma

$$K_{i,min} = \delta Mga \qquad (1.5)$$

onde $g = 9{,}81$ m/s^2 é a aceleração da gravidade. Determina o coeficiente δ em função do ângulo de inclinação θ e do coeficiente r. Escreve a tua resposta na folha de respostas. (Usa o símbolo algébrico r, não o seu valor numérico).

d) (2 pontos) Se for satisfeita a condição da alínea (c), a energia cinética K_i aproxima-se de um valor fixo, $K_{i,0}$, à medida que o prisma desce o plano inclinado. Sabendo que o limite existe, mostra que $K_{i,0}$ pode ser escrito na forma:

$$K_{i,0} = \kappa Mga \qquad (1.6)$$

e escreve κ em função de θ e r na folha de respostas.

e) (2 pontos) Calcula, com uma precisão de 0,1°, o ângulo de inclinação mínimo, θ_0, a partir do qual o rolamento, uma vez iniciado, irá continuar sem parar. Escreve o valor numérico da tua resposta na folha de respostas.

Resolução

a) Quando o prisma embate no plano, começa a rodar em torno de um novo eixo, que é a aresta que acabou de tocar no plano. A força que o plano exerce no prisma tem momento nulo em relação a este eixo, pelo que o momento angular em torno desta aresta é conservado durante o curto intervalo de tempo que dura o impacto. O momento linear do prisma tem a direcção da velocidade do centro de massa ($\vec{P} = M\vec{v}_C$, onde o índice *C* se refere ao centro de massa), e podemos encontrar esta direcção, com facilidade, quando se conhece o eixo instantâneo de rotação. Imediatamente antes do impacto, $\vec{P}$ está inclinado de 30° em relação ao plano, apontando para baixo, mas após o impacto passa a estar inclinado de 30° mas apontando para cima (ver figura 3).

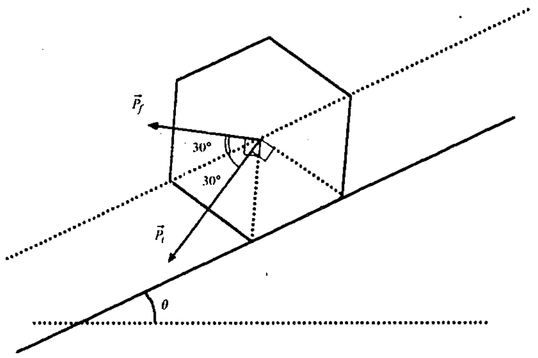

Fig. 3 — Momento linear do prisma, antes e depois do impacto.

Para encontrar o momento angular em torno da aresta de impacto imediatamente antes do impacto ocorrer usamos a equação que relaciona o momento angular, $\vec{L}$, em torno de um eixo arbitrário com o momento angular, $\vec{L}_C$, em torno de um eixo que lhe é paralelo que passa pelo centro de massa:

$$\vec{L} = \vec{L}_C + M\vec{r}_C \times \vec{v}_C \tag{1.7}$$

Vamos aplicar esta equação ao eixo no ponto de impacto pelo que $\vec{r}_C$ é o vector que aponta deste ponto para o centro de massa. Os vectores $\vec{L}_C$ e $\vec{r}_C \times \vec{v}_C$ têm a mesma direcção. Assim, temos que imediatamente antes do impacto,

$$\left|\vec{r}_C \times \vec{v}_{C_i}\right| = r_{C_i} v_{C_i} \sin 30° = a^2\omega_i / 2 \tag{1.8}$$

$$L_i = I\omega_i + \frac{1}{2}Ma^2\omega_i = \left(\frac{5}{12} + \frac{1}{2}\right)Ma^2\omega_i = \frac{11}{12}Ma^2\omega_i \tag{1.9}$$

Por outro lado, o momento angular em torno da aresta imediatamente após o impacto é, da equação (1.2) [1]

$$L_f = I'\omega_f = \frac{17}{12}Ma^2\omega_f \tag{1.10}$$

onde o índice *f* se refere à situação após o impacto. Podemos reparar que a diferença resulta das direcções de $\vec{v}_{C_i}$ e de $\vec{v}_{C_f}$ serem diferentes. Impondo a conservação do momento angular, $\vec{L}_i = \vec{L}_f$, obtemos a seguinte relação entre as velocidades angulares:

$$\omega_f = \frac{11/12}{17/12}\omega_i \tag{1.11}$$

Assim,

$$s = \omega_f/\omega_i = 11/17 \tag{1.12}$$

Verifica-se que o parâmetro *s* é independente de a, ω_i e θ.

Método alternativo de resolução:

Quanto uma das arestas do prisma embate no plano recebe deste um impulso $\vec{I} = \Delta\vec{L}$ aplicado na aresta onde o impacto ocorre. Não existe reacção na outra aresta que está a deixar o contacto com o plano. O impulso tem uma componente $\Delta P_{\parallel}$ paralela ao plano inclinado (apontando no sentido ascendente do plano) e uma componente $\Delta P_{\perp}$ perpendicular ao plano (apontando para cima do plano).

Podemos encontrar três equações com as três incógnitas $\Delta P_{\parallel}$, $\Delta P_{\perp}$ e o quociente *s*. A quantidade $\Delta P_{\parallel}$ é a variação da componente do momento linear do prisma paralela ao plano e $\Delta P_{\perp}$ a correspondente variação da componente perpendicular do momento linear. Assim:

$$\Delta P_{\parallel} = M\left(\omega_i - \omega_f\right)a\frac{\sqrt{3}}{2} \tag{1.13}$$

$$\Delta P_{\perp} = M\left(\omega_i + \omega_f\right)a\frac{1}{2} \tag{1.14}$$

Finalmente, aplicando o teorema do momento angular

$$\Delta P_{\perp} a\frac{1}{2} - \Delta P_{\parallel} a\frac{\sqrt{3}}{2} = I\left(\omega_i - \omega_f\right) \tag{1.15}$$

---

[1] Ou, alternativamente,

$$L_f = I\omega_f + M\left|\vec{r}_C \times \vec{v}_{C_f}\right| = I\omega_f + Ma^2\omega_f \sin 90°$$
$$= \left(\frac{5}{12} + 1\right)Ma^2\omega_f = \frac{17}{12}Ma^2\omega_f$$

uma vez que o lado direito desta equação representa a variação do momento angular em torno do centro de massa.

As equações (1.13), (1.14) e (1.15) podem ser resolvidas em ordem ao quociente $s = \omega_f/\omega_i$, obtendo-se, claro está, o mesmo resultado do primeiro método.

b) A velocidade linear do centro de massa imediatamente antes do impacto é $a\omega_i$ e imediatamente após o impacto é $a\omega_f$. Sabemos que a energia cinética de um corpo rígido em rotação pode escrever-se na forma

$$K_{tot} = \frac{1}{2} I_C \omega^2 + \frac{1}{2} M v_C^2 \tag{1.16}$$

Desta expressão vemos que a energia cinética, K_{tot}, é proporcional a ω^2 antes e após o impacto, pelo que

$$K_f = r K_i = \left(\frac{11}{17}\right)^2 K_i = \frac{121}{289} K_i \tag{1.17}$$

e, portanto,

$$r = 121/289 \approx 0.419 \tag{1.18}$$

c) A energia cinética K_f após o impacto deve ser suficiente para elevar o centro de massa à sua posição mais alta, por cima do ponto de contacto. O ângulo "varrido" pelo vector neste movimento é

$$x = \frac{\alpha}{2} - \theta \tag{1.19}$$

onde $\alpha = 60°$ é o ângulo ao centro da base hexagonal definido no triângulo constituído pelo centro do hexágono e por dois vértices sucessivos do prisma [2].

A energia para esta elevação do centro de massa é

$$E_0 = Mga(1 - \cos x) = Mga[1 - \cos(30° - \theta)] \tag{1.20}$$

obtendo-se a condição

$$K_f = rK_i > E_0 = Mga[1 - \cos(30° - \theta)] \tag{1.21}$$

ou seja,

$$\delta = \frac{1}{r}[1 - \cos(30° - \theta)] \tag{1.21}$$

(Note que $\cos(30° - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta + \frac{1}{2}\sin\theta$).

d) Sejam e $K_{i,n}$ e $K_{f,n}$ as energias cinéticas do prisma imediatamente antes e após o *n*-ésimo impacto. Já mostramos que é válida a relação

$$K_{f,n} = rK_{i,n} \tag{1.23}$$

onde $r = 121/289$ para um prisma hexagonal. Entre dois impactos sucessivos, a posição do centro de massa desce de $a\sin\theta$ e a sua energia cinética aumenta, por esta razão, de

$$\Delta = Mga\sin\theta \tag{1.24}$$

Assim, temos

$$K_{i,n+1} = rK_{i,n} + \Delta \tag{1.25}$$

Não será necessário escrever a expressão de $K_{i,n}$ em função de $K_{i,1}$ e de n para encontrarmos o limite pedido. Isto seria a forma de mostrar que o limite existe, mas tal é assegurado no enunciado do problema. Assim, para um valor grande de n, $K_{i,n+1} \approx K_{i,n}$. O valor limite, $K_{i,0}$, deverá deverá pois satisfazer à seguinte relação iterativa:

$$K_{i,0} = rK_{i,0} + \Delta \tag{1.26}$$

obtendo-se a solução

$$K_{i,0} = \frac{\Delta}{1-r} \tag{1.27}$$

ou seja,

$$\kappa = \frac{\sin\theta}{1-r} \tag{1.28}$$

Também podemos resolver este problema explicitamente, escrevendo as seguintes expressões:

$$K_{i,2} = rK_{i,1} + \Delta \tag{1.29}$$

$$K_{i,3} = rK_{i,2} + \Delta = r^2 K_{i,1} + (1+r)\Delta \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned} K_{i,n} &= r^{n-1} K_{i,1} + (1 + r + \cdots r^{n-2})\Delta \\ &= r^{n-1} K_{i,1} + \frac{1 - r^{n-1}}{1-r}\Delta \end{aligned} \tag{1.31}$$

No limite $n \to \infty$ obtemos

$$K_{i,n} \to K_{i,0} = \frac{\Delta}{1-r} \tag{1.32}$$

que coincide, naturalmente, com o resultado que obtivemos anteriormente.

Se calcularmos a variação da energia cinética durante um ciclo completo, isto é desde o instante imediatamente antes do impacto n até ao instante imediatamente antes do impacto $n+1$, obtemos,

$$\begin{aligned} \Delta K_{i,n} &= K_{i,n+1} - K_{i,n} = (r-1) r^{n-1} K_{i,1} + r^{n-1}\Delta \\ &= r^{n-1}[\Delta - (1-r)K_{i,1}] \end{aligned} \tag{1.33}$$

---

[2] No caso geral em que o prisma tem N faces, $\alpha = 2\pi/n$.

Esta variação é positiva se o valor inicial $K_{i,1} < K_{i,0}$, pelo que $K_{i,n}$ irá aumentar até ao valor limite $K_{i,0}$. Se, pelo contrário, $K_{i,1} > K_{i,0}$, a energia cinética $K_{i,n}$ imediatamente antes do impacto irá diminuir até ao limite $K_{i,0}$.

A situação é semelhante ao movimento de um corpo sujeito a uma força de atrito que aumenta com a velocidade. Em termos matemáticos, a diferença principal está em lidarmos, no presente caso, com equações às diferenças em vez de equações diferenciais.

e) Para que o prisma role sem parar, o valor limite de K_i, encontrado na alínea anterior, deverá ser superior ao valor mínimo encontrado na alínea *c*):

$$\frac{1}{1-r}\Delta = \frac{1}{1-r}Mga\sin\theta > Mga\left[1-\cos(30°-\theta)/r\right] \quad (1.34)$$

Fazendo $A = \frac{r}{1-r} = \frac{121}{168}$,

$$\begin{gathered} A\sin\theta > 1-\cos 30°\cos\theta - \sin 30°\sin\theta \\ \left(A+\tfrac{1}{2}\right)\sin\theta + \tfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta > 1 \end{gathered} \quad (1.35)$$

Para resolver esta equação vamos definir[3]

$$u = \arccos\left(\frac{A+\frac{1}{2}}{\sqrt{\left(A+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\right) \approx 35{,}36° \quad (1.36)$$

obtendo

$$\begin{gathered} \cos u\sin\theta + \sin u\cos\theta > \frac{1}{\sqrt{\left(A+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} \\ \sin(u+\theta) > \frac{1}{\sqrt{\left(A+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}} \end{gathered} \quad (1.37)$$

u seja,

$$\theta > \arcsin\left(\frac{1}{\sqrt{\left(A+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}}}\right) - u \approx 41{,}94°-35{,}36° = 6{,}58° \quad (1.38)$$

pelo que

$$\theta_0 \approx 6{,}58° \quad (1.39)$$

Se $\theta > \theta_0$ e se a energia cinética após o 1.º impacto for suficiente de acordo com a alínea *c*), então, verificando-se as condições do enunciado, o cilindro descerá o plano inclinado a rodar, sem parar.

[3] É possível resolver qualquer das inequações de uma forma puramente numérica, por exemplo através de tentativas de aproximação sucessivas ou usando as aproximações $\sin\phi \approx \phi$ e $\cos\phi \approx 1 - \phi^2/2$.