

# O MÓDULO E A NORMA

A. J. COSTA e A. M. ROSA

Escola Secundária de Diogo de Gouveia em Beja

Tem surgido no ensino uma crescente confusão sobre a terminologia a adoptar relativamente a alguns aspectos formais da mecânica vectorial clássica. De facto, se alguns autores designam a medida ou intensidade do vector, como sendo o seu módulo, já outros indicam tratar-se da sua norma. A questão assume proporções graves quando, por vezes, os melhores alunos, que ao verificarem ser uma dessas notações a mais generalizada entre os diversos autores, a adoptam e são por isso penalizados.

Outro aspecto, porventura mais grave, inerente à existência de duas notações, são os conceitos alternativos que se geram, pois "se existe o módulo e a norma, então por certo que são dois conceitos distintos".

Alguns dos conceitos alternativos que é frequente encontrar em conversas sobre mecânica vectorial são, por exemplo, os seguintes:

1 — O módulo é o valor do vector, definido em função do seu sentido e a norma é o módulo do módulo do vector;

2 — O módulo é a medida física do vector e a norma é o seu valor absoluto (adimensional).

3 — O módulo de um vector não existe.

4 — Em Física, não se pode utilizar a norma de um vector.

Relativamente aos conceitos alternativos referidos em 3 e 4, atente-se que tanto o módulo como a norma, são aceites cientificamente<sup>(1)</sup>.

Para esclarecimento, torna-se necessário verificar as definições de ambos os conceitos, para verificar se existe qualquer discrepância entre elas.

O módulo de um vector é definido, unicamente (seja na Física ou na

Matemática), como sendo a raiz quadrada da soma dos quadrados dos seus componentes<sup>(2-11)</sup>, o que para um vector  $\mathbf{x}$ , de componentes  $x_i$ , se traduz por

$$|\mathbf{x}| = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$$

Certos autores, embora utilizando a notação de módulo e aceitando a definição anterior, apenas designam tal medida por magnitude<sup>(12)</sup>. Note-se que o módulo de um vector, embora seja definido como tal por alguns matemáticos, é essencialmente aplicado em Física.

A norma de um vector, por seu turno, é definida, em Álgebra, como sendo uma função  $\|\cdot\|$  de  $\mathbb{R}^n$  em  $\mathbb{R}$ , que verifica as seguintes condições<sup>(13-16)</sup>:

- (i)  $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ , para todo o  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ;
- (ii)  $\|\mathbf{x}\| = 0$  sse,  $\mathbf{x} = (0, 0, \dots, 0)$ ;
- (iii)  $\|\alpha\mathbf{x}\| = |\alpha| \|\mathbf{x}\|$ , para todo  $\alpha \in \mathbb{R}$  e todo o  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ;
- (iv)  $\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ , para todo o  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ ;

Assim, a norma de um vector pode ser definida a partir de uma multiplicidade de funções, das quais se destacam as normas  $L_p$ , definidas pela expressão

$$\|\mathbf{x}\|_p = (\sum_i x_i^p)^{1/p}$$

da qual a norma euclidiana ou norma  $L_2$ , definida por

$$\|\mathbf{x}\|_2 = (\sum_i x_i^2)^{1/2}$$

é um caso particular. Note-se inclusivamente, que à medida que  $p$  tende para infinito, a coordenada de maior módulo torna-se dominante, e a norma  $L_\infty$  vem

$$\| \mathbf{x} \|_\infty = \max |x_i|$$

Do exposto, verifica-se que na mecânica clássica apenas será correcta e possível a aplicação da norma euclidiana, já que uma utilização do conceito geral de norma, que é muito mais vasto, se traduz por resultados erróneos, que não são compatíveis com as leis gerais da mecânica clássica.

Obviamente que a restrição aplicada à mecânica clássica poderá não ser extensiva a outras áreas da Física onde eventualmente poderão ser definidas leis aplicando outros tipos de normas. Assim, deve tornar-se claro, que à luz das duas definições temos que o módulo do vector é igual à norma euclidiana e apenas a esta, ou seja

$$| \mathbf{x} | = \| \mathbf{x} \|_2 = (\sum x_i^2)^{1/2}$$

Por uma questão de facilidade de notação, como normalmente efectuado, pode ser definido que  $\| \mathbf{x} \|_2 = \| \mathbf{x} \|$ , mas deve no entanto fazer-se notar que a norma euclidiana é apenas um caso particular das normas da Matemática, e particularmente ao nível do ensino, indicando claramente que ela é perfeitamente equivalente ao módulo do vector. Note-se que é aceite ainda a igualdade<sup>(1)</sup>.

$$x = | \mathbf{x} | = \| \mathbf{x} \|$$

mas deve ter-se o cuidado ao utilizar esta notação no ensino em distinguir claramente quando se está falando do módulo ou norma do vector ou quando se está falando dos componentes de um vector.

Em termos normativos<sup>(17)</sup>, a ser respeitados em Portugal, para a medida do vector  $\mathbf{a}$  são apresentados os símbolos  $\mathbf{a}$  ou  $|\mathbf{a}|$ , aceitando-se ainda, por ser por vezes usado, o símbolo  $\|\mathbf{a}\|$ .

Assim, à face do que até aqui foi exposto, conclui-se que, nas Ciências Físicas, para os efeitos práticos habituais, e quando referidos a vectores, os termos "módulo de  $\mathbf{x}$ " e "norma de  $\mathbf{x}$ " são perfeitamente equivalentes, bem como os símbolos  $|x|$  e  $\|x\|$ .

#### BIBLIOGRAFIA

- 1—ALMEIDA, G., Sistema Internacional de Unidades (SI). Grandeza e Unidades Físicas terminologia, símbolos e recomendações, p. 182, Plátano Editora, Lisboa, 1988.

- 2—ÍNDIAS, M. A., Curso de Física, McGraw-Hill, Portugal, 1992.
- 3—PAULI, R., MAJORANA, F., HEILMANN, H., CHOHOI, C., Física 1, Mecânica, EPU, S. Paulo, 1978.
- 4—ALONSO, M., FINN, E., Física, um curso universitário, Vol. I — Mecânica, Ed. Edgard Bluecher, Lda, S. Paulo, 1972.
- 5—SILVA, L., VALADARES, J., Manual de Física-Mecânica, 12.º Ano, Didáctica Editora, Lisboa, 1994.
- 6—MARTINHO, E., OLIVEIRA, J., FORTES, M., Matemática para o Estudo da Física, F. C. G., Lisboa, 1985.
- 7—SWOKOWSKI, E. W., Cálculo com Geometria Analítica, Vol. 2, McGraw-Hill, S. Paulo, 1983.
- 8—BEER, F., JOHNSTON, Jr., E., Mecânica Vectorial para Engenheiros-Estática, p. 75, McGraw-Hill, 5.ª Edição, S. Paulo, 1994.
- 9—SEARS, F., ZEMANSKY, M., Física, Mecânica — Vol.1, Livros Técnicos e Científicos Editora, S.A., Rio de Janeiro, 1979.
- 10—TIPLER, P. A., Física, Vol. 1, Ed. Reverté, Lda, Spain, 1978.
- 11—MURDOCH, D. C., Geometria Analítica, Livros Técnicos e Científicos Editora, S.A., 2.ª Ed., Rio de Janeiro, 1978.
- 12—BENSON, H., University Physics, John Wiley & Sons, Inc., U.S.A., 1991.
- 13—BURDEN, R. L., DOUGLAS, J., Res, S.A.I., Kent, T.W.S., Publ. Company, Boston, 4<sup>th</sup> Ed., 1988.
- 14—APOSTOL, T. M., Calculus, Vol. 2, Ed. Reverté, 2.ª Ed., Barcelona, 1980.
- 15—CONTE, S. D., BOOR, C., Elementary Numerical Analysis, An Algorithmic Approach, McGraw-Hill, Int. Ed., 3rd Ed., Singapura, 1981.
- 16—SCHEID, F., Análise Numérica, 2.ª Ed., McGraw-Hill, Portugal, 1991.
- 17—Norma ISO 31-11:1992 — Quantities and units — Part II: Mathematical signs and symbols for use in the physical sciences and technology.

#### AGRADECIMENTOS

Os autores gostariam de agradecer ao Doutor Carlos Dias, do Departamento de Física da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa. Este artigo é dedicado à Eng.ª Ana Maria Batalha e ao Dr. António Rebolo Bento, pelo gosto que nos inculiram pelo ensino da Física.

**A. J. Costa e A. M. Rosa são professores efectivos na Escola Secundária de Diogo de Gouveia em Beja.**