O MISTÉRIO DO BAC-CAB

A. GUÉRIN MOREIRA

Faculdade de Ciências da Univ. de Lisboa, Campo Grande, Edifício C1-4.° Piso, 1700 Lisboa
e-mail: amoreira @ alf1.cii.fc.ul.pt

Neste artigo, especialmente destinado aos alunos que estudam Electromagnetismo, é feita uma pequena introdução à notação de índices e ao tensor totalmente anti-simétrico. No final, mostram-se algumas aplicações desta notação na dedução de identidades vectoriais.

Vectores e matrizes

Operações tensoriais

Símbolo de Kronecker

Tensor de Levi-Civita

Exemplos de aplicação

Introdução

Nos meus tempos (não muito longínquos) de estudante de Electromagnetismo, era para mim um "mistério" o facto de ter havido pessoas com a paciência suficiente para deduzirem aquelas terríveis identidades vectoriais. O meu "trauma" na altura foi tal que, mesmo sem querer, acabei por memorizar a página do livro que usava onde vinham as ditas identidades (página 55 do livro de Shadowitz [1]). Como é natural, esta situação incomodava-me: é bastante aborrecido ter de usar, mesmo poucas vezes, uma equação que não se sabe deduzir (repare-se que não é a mesma coisa *provar* uma identidade que já se conhece e *deduzir* uma a partir de apenas um dos membros!)

O meu alívio intelectual só chegou um ano mais tarde: em Mecânica Quântica, reparei que o professor usava uma letrinha grega com uns índices para escrever produtos externos: tinha acabado de descobrir o tensor totalmente anti-simétrico! Era espantoso como ficava fácil trabalhar com vectores e matrizes quando estes eram escritos à custa de índices.

A intenção deste pequeno artigo é dar a conhecer aos alunos de Electromagnetismo (e não só) uma maneira simples de calcular aquelas identidades vectoriais monstruosas que lhes são dadas, em geral, sem demonstração. Dada a simplicidade que se deseja aqui, vamos apenas tratar de vectores em espaços euclidianos, com coordenadas cartesianas. Um tratamento mais generalizado é dado, por exemplo, em Arfken e Weber [2] ou Joshi [3].

A notação de índices

Quando temos um vector **F**, dizemos que F_i é a componente i (i = 1, 2, 3) deste[1]. A ideia é notar que ter uma componente do vector ou um escalar (número real) é a mesma coisa. Além disso, vamos ter a oportunidade, usando esta notação, de acompanhar o que acontece a cada uma das componentes do nosso vector.

Observe-se que o valor de cada um dos índices i, em geral, varia entre 1 e n, onde n é a dimensionalidade do espaço vectorial. Isto é bastante óbvio, pois se temos um espaço a dez dimensões, precisamos de dez componentes para especificar um vector. Esquematicamente, podemos representar um vector **F** a n dimensões através de uma matriz coluna, cujos elementos são justamente as componentes F_1, F_2, ... F_n desse vector:

$$\mathbf{F}=\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}$$

Repare-se numa curiosidade: se dispusermos m vectores (**F**, **G**, **H**, ... **Z**) lado a lado...

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} G_1 \\ G_2 \\ \vdots \\ G_n \end{bmatrix}\begin{bmatrix} H_1 \\ H_2 \\ \vdots \\ H_n \end{bmatrix}\cdots\begin{bmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ \vdots \\ Z_n \end{bmatrix}}_{\text{m vectores}}$$

[1] Em geral, define-se que a componente x é i = 1, y é i = 2 e z é i = 3.

temos uma matriz com n linhas e m colunas! De forma mais simples, podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} F_1 \equiv M_{11} & G_1 \equiv M_{12} & \dots & Z_1 \equiv M_{1m} \\ F_2 \equiv M_{21} & G_2 \equiv M_{22} & \dots & Z_2 \equiv M_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ F_n \equiv M_{n1} & & & Z_n \equiv M_{nm} \end{bmatrix}$$

Isto é, cada elemento da matriz é especificado por *dois* índices.

Do que se disse pode concluir-se que um vector é uma entidade "unidimensional" (repare-se que é representado por uma coluna), bastando um índice para especificar as suas componentes. Uma matriz é "bidimensional", pois são precisos dois índices para especificar um elemento. Uma entidade com três índices seria representada por um bloco a três dimensões, e assim por diante. Um escalar é uma entidade de dimensão zero: não precisamos de índices para especificar um número. Mas cuidado: estas "dimensões" não têm nada a ver com a dimensionalidade do espaço vectorial. Mas servem para nos guiar nas equações que envolvam estas entidades: por exemplo, uma matriz não pode ser igual a um vector!

Mas deixemos de conversa! Para que serve isto? Atente-se nas seguintes definições:

1) *O produto interno de dois vectores é um escalar dado por*

$$F \cdot G = F_1G_1 + F_2G_2 + F_3G_3 = \sum_i F_iG_i$$

2) *O produto de uma matriz por um vector, é um vector cujo componente i é*

$$[Mv]_i = \sum_j M_{ij}v_j$$

3) *O produto de duas matrizes é uma matriz cujo elemento ik é*

$$[MN]_{ik} = \sum_j M_{ij}N_{jk}$$

4) *O traço e o traço do produto são dados por*

$$Tr(M) = \sum_i M_{ii}$$

$$Tr(MN) = \sum_i \sum_j M_{ij}N_{ji}$$

5) *A divergência de uma função vectorial é dada por um escalar*

$$\nabla \cdot A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i}$$

Os índices repetidos, que são somados, são chamados "mudos" (repare nas fórmulas anteriores). De forma a simplificar a notação, Einstein introduziu uma convenção: se há índices repetidos, não é preciso indicar o somatório. Assim, por exemplo,

$$\sum_i A_kJ_iF_iG_i \equiv A_kJ_iF_iG_i$$

onde apenas existe uma soma em i.

O delta de Kronecker e o tensor de Levi-Civita

O delta de Kronecker é uma representação da matriz identidade. Assim,

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i = j \\ 0 & \text{se } i \neq j \end{cases}$$

Por exemplo, $A_{ij}\delta_{jk} = A_{ik}$ (note-se que já usamos aqui a convenção de Einstein). É, por esta razão, denominado frequentemente símbolo de permutação.

O tensor de Levi-Civita, de certa forma, motivou este artigo. É um tensor de 3.ª ordem, cujos elementos estão associados a um conjunto de três índices (ijk), escrevendo-se ε_{ijk}. Será com ele que conseguiremos provar as identidades mais "bicudas" que vêm nos livros. Neste contexto, pouco importa o que é um tensor; mas importa saber que os 27 elementos do tensor ε_{ijk} são definidos do modo seguinte:

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} = 1 \text{ se } (i,j,k) = (1,2,3) \text{ ou } (2,3,1) \text{ ou } (3,1,2) \\ = -1 \text{ se } (i,j,k) = (2,1,3) \text{ ou } (1,3,2) \text{ ou } (3,2,1) \\ = 0, \text{ em qualquer outro caso} \end{cases}$$

Repare-se que, quando temos dois índices com o mesmo valor, por exemplo, (i, j, k) = (1, 1, 2), tem-se $\varepsilon_{ijk} = 0$. O valor +1 ou −1 é dado consoante a permutação (1,2,3) → (i,j,k) for par ou ímpar. Uma permutação par (ímpar) obtém-se trocando um número par (ímpar) de vezes dois elementos quaisquer. O esquema

		i	j	k	ε_{ijk}
ordem inicial	:	1	2	3	→ 1
1.ª perm. (i ↔ j)	:	2	1	3	→ −1
2.ª perm (j ↔ k)	:	2	3	1	→ 1

torna esta ideia mais clara. É de facto importante que esta definição esteja bem clara para o leitor. Entretanto, para que serve esta entidade? A resposta é simples: para representar o determinante de uma matriz. Assim, por exemplo, tem-se por definição de determinante

$$\det(M) = \varepsilon_{ijk} M_{1i} M_{2j} M_{3k}$$

O leitor, aproveitando os seus conhecimentos de Álgebra Linear, pode verificar esta afirmação.

Como sabemos, o produto externo entre os vectores **a** e **b** pode ser representado pelo determinante simbólico

$$a \times b = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

A componente *i* do produto externo é dada por

$$[a \times b]_i = \varepsilon_{ijk} a_j b_k$$

Já estamos quase prontos para enfrentar as primeiras identidades. Resta apenas um pormenor, que pode ser verificado pelo leitor: quando tivermos dois termos de Levi-Civita em *contracção* (isto é, multiplicados com um índice a ser somado), temos

$$\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{imn} = \delta_{jm}\delta_{kn} - \delta_{jn}\delta_{km}$$

(repare que há uma soma no índice *i*). Vamos precisar apenas desta relação para resolver os nossos problemas com vectores em espaços tridimensionais.

Alguns exemplos

Ponhamos então a nossa notação a funcionar. O leitor, se ainda tiver dúvidas acerca da utilidade desta notação, é convidado a tentar obter, por outros métodos, os resultados que são aqui mostrados.

1) *O rotacional de um campo vectorial (elemento i)*

$$[\nabla \times A]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_j}{\partial x_k} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial A_k}{\partial x_j}$$

2) *A divergência de um campo vectorial multiplicado por um campo escalar*

$$\nabla \cdot (\varphi A) = \frac{\partial(\varphi A_k)}{\partial x_k} = \varphi \frac{\partial(A_k)}{\partial x_k} + A_k \frac{\partial(\varphi)}{\partial x_k} = \varphi \nabla \cdot A + A \cdot \nabla\varphi$$

3) *O rotacional de um campo vectorial multiplicado por um campo escalar*

$$\nabla \times (\varphi A) = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial(\varphi A_k)}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\left(\varphi \frac{\partial(A_k)}{\partial x_j} + A_k \frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right) = \varphi \nabla \times A + \nabla\varphi \times A$$

4) *A divergência de um rotacional*

$$\nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial(\varepsilon_{kij} A_i B_j)}{\partial x_k} = \varepsilon_{kij} \frac{\partial(A_i)}{\partial x_k} B_j + \varepsilon_{kij} A_i \frac{\partial(B_j)}{\partial x_k} =$$

$$= B_j \varepsilon_{jki} \frac{\partial(A_i)}{\partial x_k} - A_i \varepsilon_{ikj} \frac{\partial(B_j)}{\partial x_k} = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B})$$

5) *O rotacional de um produto externo (componente i)*

$$[\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b})]_i = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial([\mathbf{a} \times \mathbf{b}]_k)}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial(e_{klm} a_l b_m)}{\partial x_j} = \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} \frac{\partial(a_l b_m)}{\partial x_j} =$$

$$= (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}) \frac{\partial(a_l b_m)}{\partial x_j} = \frac{\partial(a_i b_j)}{\partial x_j} - \frac{\partial(a_j b_i)}{\partial x_j} =$$

$$= b_j \frac{\partial(a_i)}{\partial x_j} + a_i \frac{\partial(b_j)}{\partial x_j} - b_i \frac{\partial(a_j)}{\partial x_j} - a_j \frac{\partial(b_i)}{\partial x_j}$$

Conclui-se que

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} + (\nabla \cdot \mathbf{b})\mathbf{a} - (\nabla \cdot \mathbf{a})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b}$$

6) *Finalmente, a famosa regra do BAC-CAB*

$$[\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})]_i = \varepsilon_{ijk} a_j \varepsilon_{klm} b_l c_m = (\delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl})_j b_l c_m = (a_j c_j) b_i - (a_j b_j) c_i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c} = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

Conclusão

Este artigo é, como foi dito, uma breve introdução à utilização de índices em cálculos que envolvam vectores. É uma esperança do autor que os leitores se sintam mais à vontade com as identidades vectoriais (e que, em certos casos, a notação seja uma ajuda a um maior entendimento dos problemas). Como dizia Landau, a matemática, tanto quanto possível, não deve ser um obstáculo ao raciocínio físico. Todos os que gostam de resolver problemas sabem que o primeiro grande passo é formulá-lo: uma boa notação pode ser crucial!

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a C. M. Vale e a J. P. E. de Araújo. A. G. M. é bolseiro do programa PRAXIS XXI (PRAXIS XXI/BM/6898/95)

Referências

[1] SHADOWITZ, A. — *The Electromagnetic Field*, Dover, 1988
[2] ARFKEN, G. B.; WEBER, H. J. — *Mathematical Methods for Physicists*, Academic Press, 1995
[3] JOSHI, A. W. — *Matrices and Tensors in Physics*, Wiley Eastern, 1975

A. Guérin Moreira é licenciado em Física pela Universidade do Porto. Actualmente é estudante de mestrado na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa