

SUGESTÕES PARA UM MELHOR APROVEITAMENTO DA EXPERIÊNCIA DA PONTE DE WHEATSTONE

J. M. FERREIRA, M. DUARTE NAIA
e WAGNER L. TRUPPEL

Departamento de Física, Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro,
Quinta de Prados, 5000 Vila Real

Propõem-se alguns procedimentos para tirar maior partido da experiência da ponte de Wheatstone num laboratório didáctico. O método sugerido permite obter com maior precisão o ponto de equilíbrio da ponte, e a respectiva sensibilidade. Para além disso, permite ilustrar a forte dependência da corrente no galvanómetro com a escala utilizada na sua medição, e também com a relação de resistências nos braços da ponte.

Deste modo são alargados os objectivos desta experiência, permitindo um melhor aproveitamento dos dados experimentais, ao mesmo tempo mostrando como um processo de medição pode afectar dramaticamente a grandeza física medida.

Na determinação das características eléctricas de componentes de circuito (resistência, capacidade e indutância) é habitual o uso da técnica de ponte, a qual é aplicada extensivamente em laboratórios de medida de padrões eléctricos (Noltingk 1988). A palavra ponte exprime o facto de, por meio desta técnica, dois pontos de um circuito serem unidos através de um detector, o qual detecta uma corrente eléctrica ou uma diferença de potencial entre estes dois pontos.

A ponte na sua forma mais simples consiste no circuito de quatro resistências conhecido como ponte de Wheatstone, o qual é adequado para medições de resistência e é frequentemente utilizado em laboratórios de ensino para ilustrar a teoria de circuitos elementar (Worsnop e Flint 1960). Uma das montagens mais utilizadas é a da Fig. 1, em que o estudante ajusta a resistência variável S até que, quando $S = S_0$, a corrente i através do galvanómetro é nula, dando a condição de equilíbrio

$$R = \frac{Q}{P} S_0 \quad (1)$$

Se o ponto de equilíbrio não puder ser determinado a partir de uma única medição, então normalmente faz-se uma leitura (i, S) de cada lado do ponto de

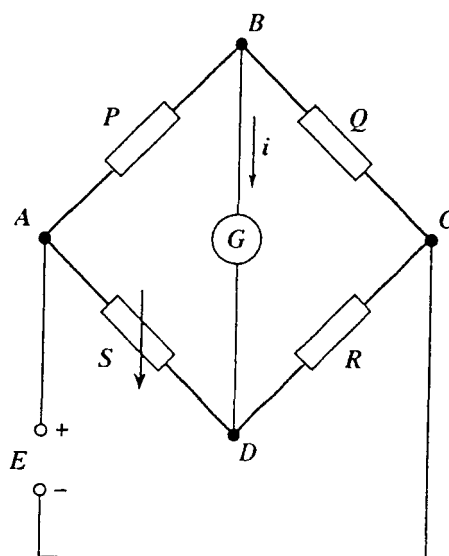


Fig. 1 — Circuito da Ponte de Wheatstone utilizado neste trabalho, com resistências dos braços P e Q , resistência desconhecida R , caixa de resistências S , galvanómetro com resistência interna G , e fonte de alimentação com diferença de potencial E . Estão também indicados os pontos A , B , C , e D do circuito, e a corrente i através do galvanómetro.

Equações básicas

Funcionamento junto do equilíbrio

Factores de erro experimental

Melhoria da sensibilidade

Aspectos didácticos

equilíbrio seguida da determinação do valor de $S = S_0$ por meio de uma interpolação de dois pontos para S em $i = 0$. O ponto de equilíbrio é portanto determinado com base em apenas uma ou duas medições.

Seria possível obter um valor mais preciso de S_0 com um conjunto maior de pontos (i, S) , porém a interpolação linear não é o melhor método, pois da análise linear de circuitos pode escrever-se a resistência variável S em função da corrente i que passa no galvanómetro, isto é

$$S = \frac{PE + [(P+Q)G+PQ]i}{QE - [(P+Q)(R+G) + PQ]i} R \quad (2)$$

Uma vez que (2) é uma função não linear da corrente pode-se fazer o ajuste dos pontos (i, S) medidos próximo do equilíbrio com uma curva de segundo grau do tipo

$$S = S_0 + A_1 i + A_2 i^2 \quad (3)$$

O coeficiente de ordem zero, S_0 , é obtido a partir da curva de melhor ajuste. O erro no valor de S_0 obtido do gráfico não depende do erro em S (caixa de resistências) nem do erro em i (galvanómetro) pois no modelo de ajuste dos desvios quadráticos mínimos faz-se a hipótese da distribuição de erros ser normal. Sendo assim, o valor do erro absoluto em cada ponto não pesa na determinação dos erros dos coeficientes da curva.

Além disso o aluno pode comparar os coeficientes de primeira e segunda ordem com os respectivos valores teóricos A_1 e A_2 , que podem ser determinados facilmente expandindo a equação (2) em série binomial, dando

$$A_1 = \frac{R \frac{P}{Q} \left(1 + \frac{P}{Q}\right) \left[Q + R + G \left(1 + \frac{Q}{P}\right)\right]}{E} \quad (4a)$$

$$A_2 = \frac{R \frac{P}{Q} \left(1 + \frac{P}{Q}\right) \left[Q + R + G \left(1 + \frac{Q}{P}\right)\right] \left[P + (R+G) \left(1 + \frac{P}{Q}\right)\right]}{E^2} \quad (4b)$$

onde a resistência desconhecida R pode ser obtida por substituição na equação (1) do valor de S_0 obtido do gráfico. No entanto, como o erro relativo de R é a soma dos erros relativos de S_0 , P e Q , por muito preciso que seja o valor de S_0 obtido do gráfico este método está sempre limitado pela precisão com que se conhecem os valores das resistências P e Q . É habitual eliminar esta limitação trocando as posições das resistências P e Q no circuito e determinando o novo ponto de equilíbrio S'_0 , de forma que o valor da resistência desconhecida é agora dado por

$$R = \sqrt{S_0 S'_0} \quad (5)$$

ou seja o erro em R é independente dos erros de P e Q . A precisão de R é também afectada pela resistência dos contactos e fios de ligação, a qual poderá variar entre algumas centésimas de Ohm e algumas décimas de Ohm para cada contacto. É de esperar que existam algumas ligações cuja resistência dependa do sentido da corrente, donde deve sempre ser aconselhada a inversão da polaridade da fonte de alimentação para reduzir ao mínimo este efeito.

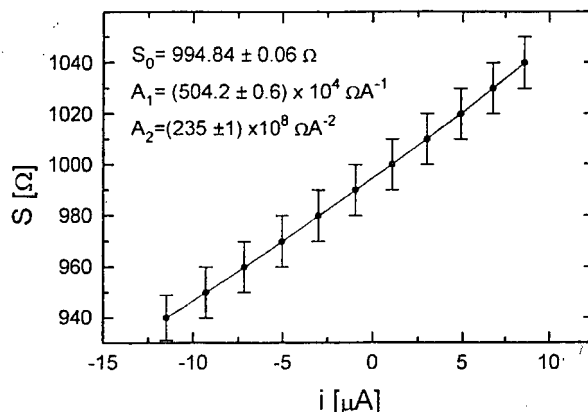


Fig. 2 — Ajuste da curva de segundo grau $S = S_0 + A_1 i + A_2 i^2$ aos pontos medidos (i, S) . O valor de S_0 obtido do gráfico é mais preciso que o valor $S_0 = 995 \pm 27 \Omega$ obtido por interpolação de dois pontos, e os coeficientes de primeira e segunda ordem obtidos do gráfico estão em bom acordo com os respectivos valores teóricos

$$A_1 = (508 \pm 75) 10^4 \Omega \cdot A^{-1} \text{ e } A_2 = (247 \pm 53) 10^8 \Omega \cdot A^{-2}.$$

Na realização deste estudo deve-se também chamar a atenção para a necessidade dos pontos (i, S) serem bem representados por uma equação de segundo grau, para o que é essencial assegurar uma convergência rápida da série binomial obtida da equação (2). Isto obriga a que o valor absoluto da corrente $|i|$ seja muito mais pequeno que o raio de convergência δ da série binomial, dado por

$$\delta = \frac{E}{P + (R+G) \left(1 + \frac{P}{Q}\right)} \quad (6)$$

Para satisfazer este critério de convergência verificou-se ser suficiente seleccionar aqueles pontos (i, S) para os quais $|i|$ era menor ou igual a aproximadamente 15% de δ , o que se traduz na prática por medir pontos próximos do equilíbrio.

O aluno pode também extrair informação adicional do seu gráfico utilizando-o para determinar a sensibilidade Π da ponte de Wheatstone, a qual pode ser definida por (Duffin 1990)

$$\Pi = \left(S \frac{di}{dS} \right)_{S=S_0} \quad (7)$$

Da análise elementar de circuitos,

$$i = \frac{(QS - PR)E}{PQ(R+S) + RS(P+Q) + G(P+Q)(R+S)} \quad (8)$$

Utilizando as equações (7) e (8) obtém-se imediatamente

$$\Pi = \frac{E}{\left(1 + \frac{P}{Q}\right) \left[Q + R + G\left(1 + \frac{Q}{P}\right)\right]} \quad (9)$$

Comparando as equações (4a) e (9)

$$\Pi = \frac{S_0}{A_1} \quad (10)$$

ou seja a sensibilidade da ponte pode ser determinada directamente dos valores de S_0 e A_1 obtidos do gráfico.

As equações (9) e (10) podem também ser utilizadas para verificar a forma como a sensibilidade depende das resistências do galvanómetro e da ponte, mas uma análise aprofundada da optimização da sensibilidade da ponte é bastante complexa e não se enquadra nos objectivos deste trabalho.

Os autores também verificaram que se pode tornar o estudo da ponte de Wheatstone mais interessante se o aluno for levado a fazer duas experiências adicionais. A primeira destas investiga a forma drástica como a corrente i através do galvanómetro depende da escala do galvanómetro usada na sua medição, o que fornece um excelente exemplo de como um processo de medida pode perturbar dramaticamente a grandeza que se está a medir. A segunda experiência investiga a relação entre a razão dos braços da ponte $P:Q$ e a corrente i . Uma maneira conveniente de interpretar os resultados destas duas experiências consiste em escrever a corrente i na equação (8) em função do desvio de S do equilíbrio, $\Delta S = S - S_0$, dando

$$i = \frac{QE\Delta S}{R(P+Q) \left[P + G + \frac{P}{Q}(R+G) \right] + [PQ + (P+Q)(R+G)]\Delta S} \quad (11)$$

Esta expressão também pode ser expandida em série binomial, obtendo-se

$$i = \frac{E\Delta S}{R \frac{P}{Q} \left(1 + \frac{P}{Q}\right) \left[Q + R + G\left(1 + \frac{Q}{P}\right)\right]} - \frac{P + (R+G)\left(1 + \frac{P}{Q}\right)}{\left(R \frac{P}{Q}\right)^2 \left(1 + \frac{P}{Q}\right)^2 \left[Q + R + G\left(1 + \frac{Q}{P}\right)\right]^2} E(\Delta S)^2 \quad (12)$$

Três casos de interesse onde a equação (12) se simplifica consideravelmente são:

(a) $P \gg Q \approx R$

$$i \approx \frac{E}{P^2 \left(2 + \frac{G}{Q}\right)} \Delta S - \frac{E}{P^3 \left(2 + \frac{G}{Q}\right)^2} (\Delta S)^2 \quad (13a)$$

(b) $Q \gg P \approx R$

$$i \approx \frac{E}{P^2 \left(1 + \frac{G}{P}\right)} \Delta S - \frac{2 + \frac{G}{P}}{P^3 \left(1 + \frac{G}{P}\right)^2} E(\Delta S)^2 \quad (13b)$$

(c) $P \approx Q \approx R$

$$i \approx \frac{E}{4P^2 \left(1 + \frac{G}{P}\right)} \Delta S - \frac{3 + 2 \frac{G}{P}}{16P^3 \left(1 + \frac{G}{P}\right)^2} E(\Delta S)^2 \quad (13c)$$

As equações (13) permitem que o estudante veja que é de esperar que a corrente através do galvanómetro seja quase inversamente proporcional à resistência interna G do mesmo. Uma vez que escalas diferentes do galvanómetro têm resistências internas diferentes, a forte dependência da corrente no galvanómetro, com a escala utilizada para medi-la, torna-se imediatamente evidente.

Inspeccionando as equações (13), o aluno pode também compreender como é que uma dada variação de S do equilíbrio, ΔS , produz uma pequena variação na corrente i quando $P \gg Q \approx R$, uma grande variação quando $Q \gg P \approx R$, e uma variação intermédia quando $P \approx Q \approx R$.

Conseguem-se obter bons resultados em todas as experiências descritas utilizando equipamento simples e facilmente disponível. Os autores utilizaram um galvanómetro BK (Modelo 2703), uma caixa de resistências WPA (Modelo N66), algumas resistências baratas de 1/4W, e uma fonte de alimentação estabilizada de corrente contínua de 5V. Na falta desta, pode utilizar-se um bom acumulador de chumbo para assegurar a estabilidade de tensão necessária para medições em Ponte.

Conclusão

Nesta experiência utilizou-se a ponte de Wheatstone para abordar dois aspectos experimentais muito importantes, e habitualmente negligenciados, no ensino experimental: a interpolação do equilíbrio e a dependência dos resultados na escala do aparelho de medida.

No que toca ao primeiro destes aspectos convém salientar que a nível dos últimos anos do secundário e primeiro ano universitário, os alunos estão habituados a

utilizar, quase em exclusivo, formalismos baseados na dependência linear. Através da utilização de uma interpolação de segundo grau na determinação do equilíbrio da ponte, pretendeu-se tornar possível aos alunos visualizar uma dependência não linear num circuito que inclui apenas elementos lineares.

Um segundo aspecto, de extrema importância, é a influência da resistência interna dos amperímetros na corrente que percorre o circuito. Em várias situações laboratoriais, a resistência mais importante do circuito é a resistência do amperímetro. Nestes casos, a mudança de escala do amperímetro afecta de forma drástica a corrente do circuito. Neste contexto pretendeu-se também apresentar a ponte de Wheatstone como um exemplo de uma experiência didáctica simples que permite ao aluno visualizar de forma eficaz esta dependência.

Agradecimentos

Desejamos agradecer ao Prof. Ferreira da Silva do Departamento de Física, Universidade do Porto, por auxílio neste trabalho.

Referências

- DUFFIN, W. J. — *Electricity and Magnetism*, 161. McGraw-Hill, London (1990).
- NOLTINGK, B. E. — *Instrumentation Reference Book*, Part 3, 40-41. Butterworths, London (1988).
- WORSNOP, B. L. e FLINT, H. T. — *Advanced Practical Physics for Students*, 528. Methuen, London (1960).

J. M. Ferreira é doutorado em Física pela Universidade de Monash, Austrália, sendo professor Auxiliar da Universidade de Trás-os-Montes e Alto Douro (UTAD), Departamento de Física. M. Duarte Naia é Assistente Estagiário no Departamento de Física da UTAD. Wagner L. Truppel é Assistente no mesmo Departamento, estando presentemente a realizar o seu doutoramento em Física na Universidade da Califórnia, Irvine, USA.

SIMPÓSIO SOBRE HISTÓRIA DA TECNOLOGIA

Lisboa, Caparica, 18-22 de Agosto de 1998

A Secção de História e Filosofia da Faculdade de Ciências e Tecnologia da Universidade Nova de Lisboa organizará, entre 18 e 22 de Agosto de 1998, em Lisboa, a XXV Conferência da Comissão Internacional da História da Tecnologia (ICOHTEC).

O tema geral da conferência será

European Technology in a Global Context

e os tópicos de referência para as sessões a organizar são os seguintes:

- Tecnologia e Descobrimientos
- Tecnologia e Exposições Universais
- Identidade Tecnológica e Instituições
- Estruturas de Mundialização da Tecnologia
- Tecnologia, Ciência e Economia
- Ensino Técnico: Para uma Perspectiva Comparativa
- Tecnologia e Aplicação da Pólvora num Contexto Internacional

As comunicações à conferência devem ter em conta os tópicos de referência. Qualquer membro do ICOHTEC pode, no entanto, submeter à aprovação, uma sessão com uma temática diferente, devendo apontar o seu organizador e reunir, pelo menos cinco trabalhos.

O resumo das comunicações deverá ser enviado até 31 de Dezembro de 1997, em formulário próprio a enviar junto com a 2.ª circular. Esta incluirá os preços relativos à inscrição no congresso e de hotéis.

A inscrição na conferência faz-se mediante o preenchimento de formulário próprio a enviar com a 2.ª circular.

A língua oficial da XXV Conferência do ICOHTEC é o inglês. As comunicações poderão ser, contudo, apresentadas em português, francês, alemão e espanhol, mas a sua tradução não será assegurada.

ICOHTEC Organizin Committee

Prof. A. Buchanan, Centre for the History of Technology, Univ. of Bath
Prof. H. J. Braun, Universitaet der Bundeswchr Hamburg

National Organizin Committee

Dr.ª Maria Paula Diogo, Fac. Ciências e Tecnologia UNL (Presidente)
Prof. António Manuel Nunes dos Santos, Dr.ª Ana Carneiro, Dr.ª Ana Simões, Dr. Francisco Domingues

Secretariat

Maria de Fátima Correia
Fundação da Faculdade de Ciências e Tecnologia da UNL
Quinta da Torre, 2825 Monte da Caparica, Portugal
Tel. 01-2954464 — Fax 01-2954461
e-mail: sec-csa@mail.fct.unl.pt

25th Symposium of the International Committee for the History of Technology (ICOHTEC)

Pre-Registration Form (Please, use CAPITAL LETTERS)

I am interested in receiving the next circular and call for papers

Surname: _____

Other Names: _____

Institution: _____

Address: _____

Post Code: _____

Country: _____

Tel: _____

Fax: _____

e-mail: _____

I am considering: Attending the Conference.....

Submitting a Oral Presentation.....