

Um dispositivo experimental simples para obtenção de linhas equipotenciais do campo eléctrico (*)

V. A. ESTEVES, L. F. PERALTA, A. M. A. COSTA, J. P. MARQUES e A. I. SERUYA

Departamento de Física da Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa
Rua Ernesto de Vasconcelos, Ed. C1, Piso 4 — 1700 LISBOA

1. Introdução

O potencial escalar e campo eléctrico são conceitos fundamentais do electromagnetismo. Este artigo pretende apresentar uma via possível para a sua introdução, através duma experiência que permita simultaneamente uma interpretação qualitativa e uma análise quantitativa rigorosa.

O nosso ponto de partida baseia-se na construção dum sistema, de natureza bidimensional, com a geometria da Fig. 1, que permite um traçado fácil das linhas equipotenciais. A novidade apresentada pela presente experiência encontra-se na configuração escolhida para o dispositivo experimental. De facto, esta permite a resolução exacta da equação de Laplace para o potencial eléctrico $V(x, y)$, tornando-se possível confrontar os resultados experimentais com as previsões teóricas. Uma das possibilidades apresentadas por este trabalho é a determinação das linhas equipotenciais através de cálculos efectuados em computador.

2. Construção experimental do sistema

A Fig. 1 mostra o arranjo esquemático das partes essenciais do sistema. É constituído por um suporte plano, quadrado, onde é colocada uma folha de papel grafitico, sobre a qual se determinaram as linhas equipotenciais. Uma placa de aglomerado de madeira, de dimensões $180 \times 180 \times 15$ mm, pode ser utilizada para tal fim. Esta placa poderá assentar (ou não) sobre quatro apoios adequados.

O potencial eléctrico na folha grafitada é estabelecido através dum conjunto de dois eléctrodos, um em forma de U e outro de I, assentes sobre esta. Os eléctrodos podem ser

talhados a partir duma placa condutora, por exemplo de latão. A espessura mínima aconselhável é de 2 mm, a fim de garantir um bom contacto entre os eléctrodos e o papel grafitico. Este contacto pode ser efectuado por intermédio de parafusos de fixação, aos quais podem ser ligados os fios eléctricos provenientes do gerador de tensão e do voltímetro.

2.1. Configuração das linhas equipotenciais

Em regime estacionário, o problema consiste em determinar o potencial $V(x, y)$ no domínio intra-eléctrodos, partindo do conhecimento da geometria do sistema e do valor do potencial na fronteira (Ver Fig. 1). Neste domínio, a solução da equação às derivadas parciais é única. No caso presente, em que se escolhe uma geometria bem definida e com um certo grau de simetria, a solução da equação de Laplace pode obter-se por integração directa. Para problemas com menor simetria, utilizam-se geralmente métodos numéricos.

A equação de Laplace: $\nabla^2 V(x, y) = 0$ escreve-se em coordenadas cartesianas:

$$\partial^2 V / \partial x^2 + \partial^2 V / \partial y^2 = 0 \quad (1)$$

Utilizando o método de separação das variáveis, em que a solução procurada se pode escrever na forma dum produto de funções, sendo cada termo tomado como uma

(*) Esta experiência foi idealizada para Fund. Física II dos cursos de Química e Bioquímica da F.C.U.L., podendo servir de experiência de demonstração ao nível do Ensino Secundário. A parte computacional deste trabalho esteve, na sua maioria, a cargo de L. Peralta. A Fig. 5 requiere uma «package» especial para o seu traçado (P. A. W., CERNLIB).

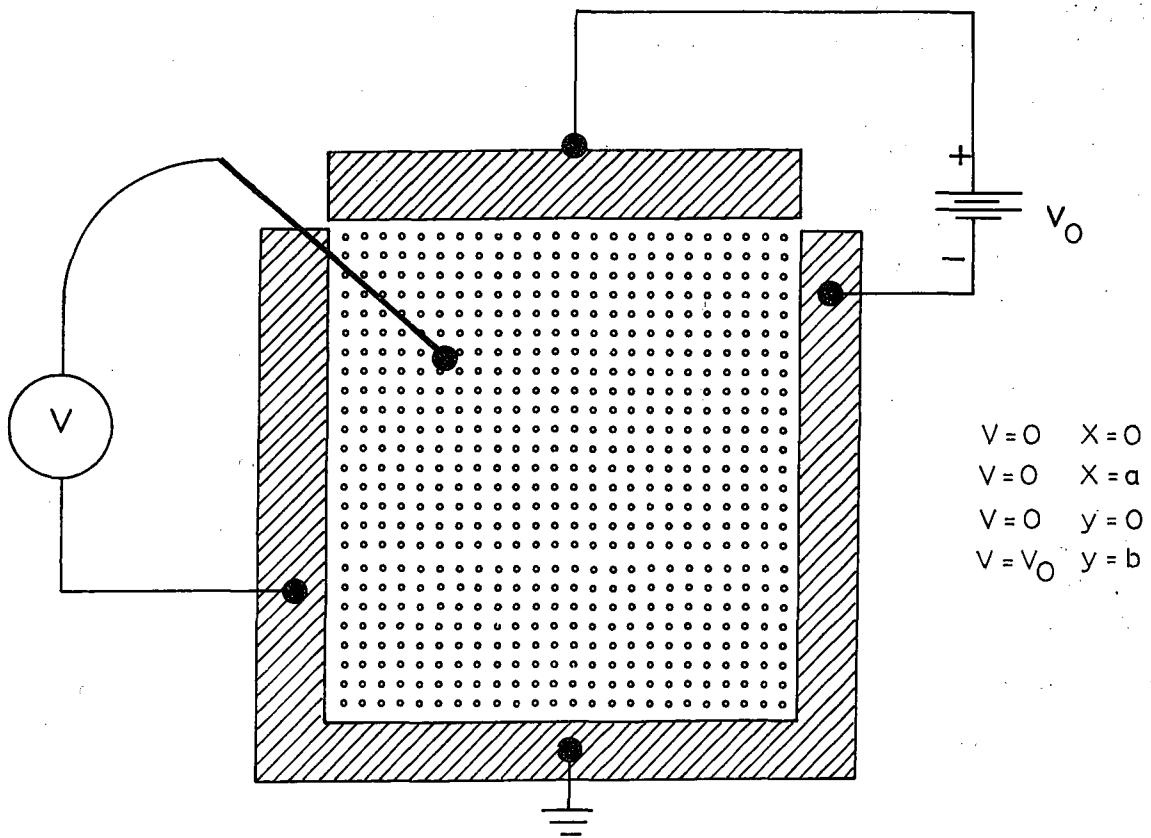


Fig. 1 — Arranjo experimental para o traçado das linhas equipotenciais.

função de uma só das variáveis (1, 2, 3), vem:

$$V(x, y) = X(x) \cdot Y(y) = X \cdot Y \quad (2)$$

Por substituição da Eq. (2) em (1) e dividindo por $V(x, y) = X \cdot Y$, obtém-se:

$$(1/X) \cdot X'' = - (1/Y) \cdot Y'' \quad (3)$$

em que se tomou $X'' = d^2 X/dx^2$ e $Y'' = d^2 Y/dy^2$, para simplificar a escrita. O primeiro membro de (3) é função exclusiva de x , e o segundo de y . Nesta condições cada membro deve ser uma constante, i.e:

$$X''/X = - \gamma^2 \quad (4a)$$

$$Y''/Y = \gamma^2 \quad (4b)$$

As Eqs. (4a) e (4b) constituem um sistema de duas equações diferenciais, cujas soluções são bem conhecidas:

$$X = C_1 \cos(\gamma x) + C_2 \sin(\gamma x) \quad (5a)$$

$$Y = C_3 \cosh(\gamma y) + C_4 \sinh(\gamma y) \quad (5b)$$

em que C_1, C_2, C_3 e C_4 são constantes reais. A escolha destas constantes depende das condições de fronteira para cada problema. No presente caso, estas impõem que a função $X(x)$ tenha dois zeros nos pontos $x=0$ e $x=a$, implicando $C_1 = 0$. Então, a solução mais geral pode escrever-se:

$$V(x, y) = C_2 \sin(\gamma x) [C_3 \cdot \cosh(\gamma y) + C_4 \cdot \sinh(\gamma y)] \quad (6)$$

A segunda condição de fronteira (Fig. 1) será satisfeita para valores de γ tais que

$$\gamma = (n \pi/a) \quad (7)$$

visto que $\sin(n \pi x/a) = 0$ para $x=0$ e $x=a$. A Eq. (6) pode escrever-se ainda:

$$V(x, y) = \sin(n \pi x/a) \cdot [C_{23} \cosh(n \pi y/a) + C_{24} \sinh(n \pi y/a)] \quad (8)$$

com $C_{23} = C_2 \cdot C_3$ e $C_{24} = C_2 \cdot C_4$.

É trivial demonstrar-se que a Eq. (8) ainda satisfaz a Eq. de Laplace e às condições de

fronteira da Fig. 1. A terceira condição de fronteira será satisfeita se $C_{23} = 0$. Resta determinar a constante C_{24} , impondo a condição de fronteira $V(x, y = b) = V_0$, com $0 < x < a$. Da inspeção da Eq. (8) verifica-se que é impossível satisfazer esta condição dada a variação sinusoidal em x . Todavia, dado que n pode assumir quaisquer valores inteiros $n = 1, 2, 3, \dots$, a linearidade da Eq. de Laplace permite escrever uma solução mais geral:

$$V(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sinh(n \pi y/a) \cdot \sin(n \pi x/a) \quad (9)$$

A Eq. (9) representa uma sobreposição de soluções, cada uma das quais da forma da Eq. (8). Então, $V(x, y = b) = f(x)$ pode escrever-se:

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \sinh(n \pi b/a)] \cdot \sin(n \pi x/a) = \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} B_n \cdot \sin(n \pi x/a) \quad (10) \end{aligned}$$

A Eq. (10) tem a forma duma série de Fourier e os coeficientes desconhecidos B_n são facilmente calculáveis, usando a técnica convencional de Fourier:

$$B_n = (2/a) \int_0^a f(x) \sin(n \pi x/a) dx \quad (11)$$

Com $f(x) = V_0$, os coeficientes B_n podem obter-se através da fórmula de recorrência:

$$B_n = (2 V_0/n \pi) [1 - (-1)^n] \quad (12)$$

Finalmente a solução procurada, pode escrever-se:

$$\begin{aligned} V(x, y) &= (V_0/\pi) \sum_{n=1}^{\infty} [n \pi y/a] / \\ &/ n \sinh(n \pi b/a) \cdot \sin(n \pi x/a) \quad (13) \end{aligned}$$

com n um número inteiro, ímpar.

A ilustração de (13) para uma tensão aplicada de $V_0 = 1$ volt e uma superfície plana, de lados $a = b = 16$ cm, permite visualizar estes conceitos. As linhas equipotenciais obtêm-se atribuindo a $V(x, y)$ diferentes valores;

i.e., fazendo: $V(x, y) = V_{c,i}$. Uma família de tais curvas equipotenciais está representada na Fig. 2. Todavia, para a sua representação

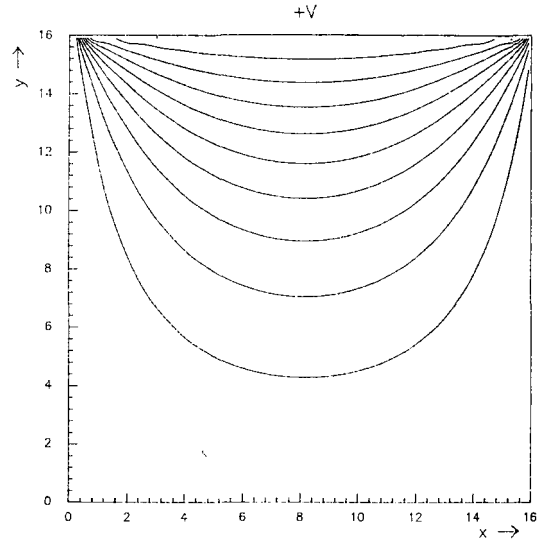


Fig. 2 — Conjunto de linhas equipotenciais obtidas no computador.

gráfica escolheu-se o processo de computação mais fácil, i.e., $V(x, y)$ foi calculado ponto a

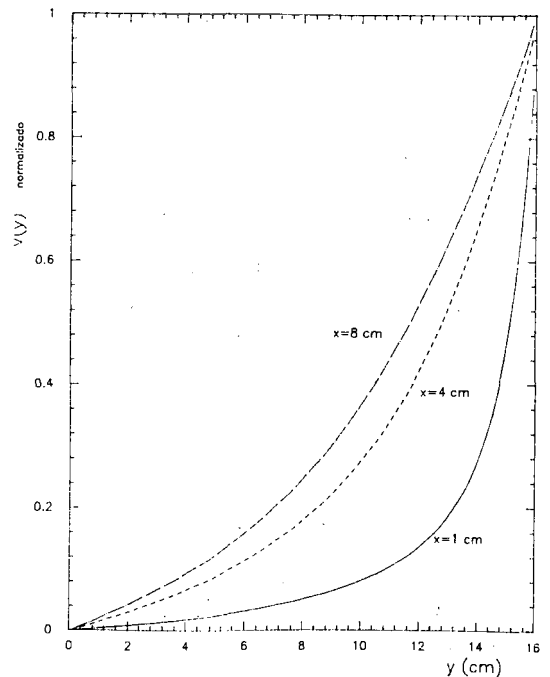


Fig. 3 — Gráfico do potencial $V(x, y=y_0)$ em função de x , para diferentes ordenadas y_0 .

ponto, para todos os pontos no intervalo $0 < x < 16$, $0 < y < 16$. Curvas normalizadas $V(x_0, y)$ para $x_0 = 1, 4, 8$ cm podem ver-se na Fig. 3. Em particular, a curva

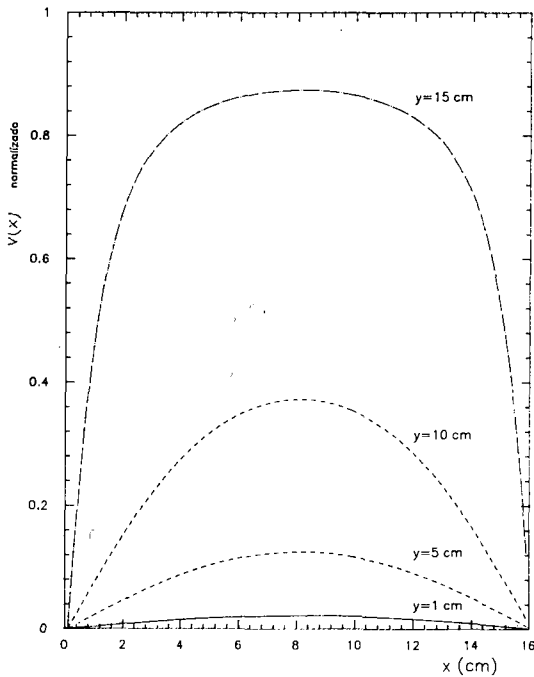


Fig. 4 — Gráfico do potencial $V(x_0, y)$ em função de y para diferentes valores de x_0 .

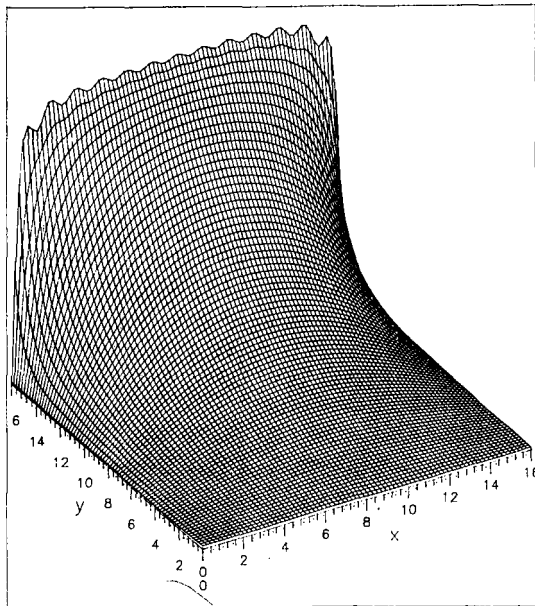


Fig. 5 — Superfície tridimensional $V(x, y)$.

correspondente a $x_0 = 8$ cm constitui uma possível tabela para identificação das linhas equipotenciais, obtidas por via experimental. Curvas análogas para $V(x, y_0)$ com $y_0 = 1, 5, 10, 15$ cm estão representadas na Fig. 4.

Um conjunto típico de curvas equipotenciais está representado no gráfico tridimensional $V(x, y)$ —Fig. 5, para as condições de fronteira indicadas na Fig. 1.

3. Distribuição do campo eléctrico

A distribuição do campo eléctrico pode obter-se através da Eq. (13), do potencial escalar associado. Esta é uma propriedade geral dos campos conservativos. As componentes do campo eléctrico \mathbf{E} tomam a forma:

$$E_x = - (4V_0/a) \sum_n [\sinh (n \pi y/a) / \sinh (n \pi b/a) \cdot \cos (n \pi x/a) \quad (14a)$$

$$E_y = - (4V_0/a) \sum_n [\cosh (n \pi y/a) / \sinh (n \pi b/a)] \cdot \sin (n \pi x/a) \quad (14b)$$

As Eqs. (14) permitem determinar \mathbf{E} em qualquer ponto $P(x, y)$, visto que $\tan \theta = (E_y/E_x)$ e o valor absoluto do campo é obtido por: $E = [E_x^2 + E_y^2]^{1/2}$. O campo de vectores pode então ser representado graficamente, como se mostra na Fig. 6. As linhas de força do campo eléctrico podem também ser obtidas por via computacional. Para o seu traçado, vamos considerar que o ângulo θ_1 e as componentes do campo são conhecidos para um qualquer ponto arbitrário $P_1(x_1, y_1)$. A posição dum ponto próximo $P_2(x_2, y_2)$ sobre a mesma linha de força pode calcular-se atendendo a que:

$$x_2 = x_1 + \Delta l \cos \theta_1 \quad (15)$$

e

$$y_2 = y_1 + \Delta l \sin \theta_1 \quad (16)$$

O acréscimo Δl tem de ser criteriosamente escolhido e suficientemente pequeno para que as linhas equipotenciais tenham significado. Uma vez obtido o ponto $P_2(x_2, y_2)$, as componentes do campo \mathbf{E} para este ponto e o ângulo θ_2 correspondente são de novo deter-

minados. Recorrendo às Eqs. (15) e (16), pode obter-se um conjunto de pontos $P_2 \dots P_n$, cuja ligação representa a linha de força procurada.

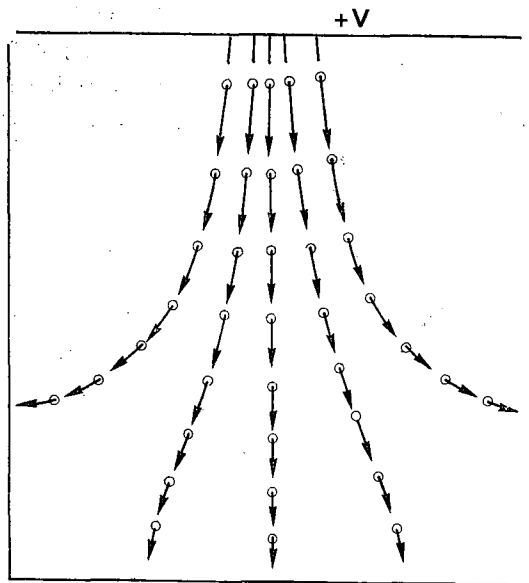


Fig. 6 — Representação aproximada do campo de vetores E .

As diferentes linhas de força podem obter-se por aplicação sucessiva a novos pontos de partida $P_j(x_j, y_j)$.

4. Conclusão

Com material acessível (folha de latão) e equipamento de uso corrente: [gerador de tensão, multímetro digital e papel grafítico], é possível construir um sistema experimental que permite traçar um conjunto de curvas equipotenciais. Pode recorrer-se a qualquer tipo de computador para a previsão e análise dos resultados experimentais.

REFERÊNCIAS

- [1] C. JOHNS — Engineering Electromagnetic Fields and Waves, Wiley International Edition, 1975.
- [2] P. LORRAIN; D. P. CORSON; F. LORRAIN — Electromagnetic Fields and Waves, W. H. Freeman, New York, 3. ed., 1987.
- [3] J. D. KRAUS — Electromagnetics, McGraw-Hill, 3. ed., 1984.

10th EPS Conference on Condensed Matter Physics (*)

Lisbon, 9-12 April 1990

— Plenary Sessions, Symposia, Posters —

Advanced list of Symposia:

Soft Matter

- Polymer Physics
- Macroscopic random systems and Membranes
- Nonlinear physics, Chaos and Turbulence
- Numerical methods in Liquids and Polymer melts
- Surfaces and interfaces

Solid State

- Heavy Fermions and High- T_c Superconductors
- Metallic magnetic Multilayers
- Quasicrystals
- Nonlinear Optical properties
- Superlattices and Quantum Wells
- Dielectric properties of Insulators
- Novel phenomena at low temperatures
- Clusters and Metallic particles
- New techniques in Condensed Matter

Advanced Materials for future Electronics.

Applied Physics

- Materials for Optoelectronics
- Materials for new Devices
- Metal-semiconductor Interfaces
- Electron transport in microstructures
- New materials and structures
- Device physics, modelling and processing

*

- Did you receive the 1st announcement?
- Do you want to receive the 2nd announcement?

*

Inf.: 10th Cond. Matt. Phys. Conf. Secretariat,
L. Alcácer, LNETI, P-2686 Sacavém Codex
J. B. Sousa, Lab. Física, Fac. Ciências
Porto, 4000 Porto
A. F. Martins, C. Física Mat. Cond.,
Av. Gama Pinto, 2, P-1699 Lisboa Codex

(*) Organized by the European Physical Society and the Portuguese Physical Society. Special sponsorship by UNESCO and E-MRS.