

Caos em Física^(*)

J. SOUSA RAMOS

Laboratório de Matemática Experimental — DMFCUL
e CFMC - INIC

1. Introdução

Durante o tempo em que decorrem as nossas vidas, neste final do século, a ciência está transpondo um dos seus principais paradigmas, que consiste em buscar o regular, o simples, o periódico, ... Hoje procura-se o irregular, o complexo, o aperiódico, ... Os sistemas e as suas dinâmicas apresentam comportamentos que na maioria das situações reais, são bastante complicadas, caóticas, estranhas, fractais. Daí o objectivo da nossa oficina-laboratório ser o estudo dos sistemas dinâmicos caóticos com as suas soluções tipo atractores estranhos, caracterizados por apresentarem uma geometria fractal. Oficina-laboratório porque estas dinâmicas foram descobertas e são investigadas no computador, laboratório por excelência, simbiose da natureza com a experimentação humana. Aqui é necessário uma referência didáctica. É urgente o uso corrente dos computadores nas escolas, não como privilégio deste ou daquele projecto, mas como um material banal, normal, ao qual professores e alunos têm acesso de um modo natural sem mistificações nem paternalismos. Um conceito de caos (caos molecular) entrou em Física por Boltzmann quando procurava fundar a termodinâmica recorrendo a um tratamento estatístico da mecânica de muitas partículas. Hoje a palavra caos está vulgarizada, e adjectiva um grande conjunto de situações. Na teoria moderna dos sistemas dinâmicos, o caos (caos determinístico) é um comportamento preciso e embora complexo pode-se encontrar ordem (ordem das árvores do caos, ver adiante). A medida da complexidade do caos é obtida por uma grandeza bem definida chamada entropia. O sistema dinâmico é dito caótico se a entropia é positiva, o que implica que o sistema tenha um número infinito de órbitas

repulsivas, com pelo menos uma das órbitas de período diferente de uma potência de 2. O conceito de entropia foi introduzido em termodinâmica no século passado por Clausius, e em mecânica estatística por Boltzmann. Tomou novas formas na teoria da informação com Shannon (1948) e em teoria ergódica com Kolmogorow (1954). Em 1967, Adler, Konheim e McAndrew estenderam esse conceito à dinâmica topológica chamando-lhe entropia topológica.

Por outro lado, Lorenz em 1963 [1], estudando aproximações às equações de Navier-Stokes que descrevem os fluidos, e Ruelle-Takens (1971) [2] numa tentativa de descrever a turbulência, chamam a atenção para as soluções de equações diferenciais ordinárias ditas de atractores estranhos, onde o comportamento assintótico é bastante complexo. Conjuntos limite estranhos haviam sido estudados no final do século passado por Cantor, von Koch, Hilbert, Klein, Poincaré, ..., em diversos contextos da matemática. Mandelbrot [3] a partir de 1975 enumera sistematicamente as situações físicas onde estes conjuntos surgem na natureza. Chama-lhes objectos e fenómenos fractais e hoje são vistos e estudados por toda parte. Uma outra pista para novos objectos e fenómenos para investigar, ver e ensinar, surgiram por volta de 1960 com von Neumann e Ulam — os autómatos celulares, procurando modelos matemáticos simples com capacidade de auto-organização. Recentemente o seu estudo tem sido sistematizado e divulgado por Wolfram [4].

Aqui, a nossa preocupação é dar sugestões e algoritmos para a introdução de uma prática

(*) I Encontro Regional do Ensino da Física, SPF — Fev./88, Lisboa.

experimental destas novas fenomenologias no ensino secundário.

2. Linear — Não-linear

A maioria dos fenómenos naturais são não-lineares. Matematicamente a diferença essencial entre linear e não-linear é que para uma equação linear, quaisquer duas soluções podem ser adicionadas para formar uma nova solução — *princípio de sobreposição*. A maior parte da matemática conhecida pelos físicos é linear, como a álgebra linear, a análise funcional, a análise de Fourier e de Laplace. Só em condições muito particulares os fenómenos são lineares, isto é, caracterizados por um comportamento regular, predizível e descritível por funções analíticas simples. Em geral, os fenómenos são não-lineares, complexos, turbulentos, irregulares ou caóticos. No entanto, é preciso não confundir uma condição necessária, a não linearidade, com condições suficientes para um sistema revelar comportamento turbulento ou caótico. Assim, temos muitos sistemas que, embora não-lineares, apresentam comportamentos com descrições analíticas simples. Por exemplo, o movimento planar do pêndulo, que é descrito pela seguinte equação diferencial ordinária de 2.^a ordem deduzida das leis de Newton:

$$d^2\theta(t)/dt^2 + (g/l) \sin \theta(t) = 0,$$

com as variáveis com o significado habitual, é uma equação não linear. Vulgarmente, considera-se a aproximação linear, regime de pequenas oscilações, caso em que a solução geral é descritível em termos de funções circulares, $\theta(t) = \phi_0 w^{-1} \sin(\omega t) + \theta_0 \cos(\omega t)$, onde θ_0 e ϕ_0 são a posição e a velocidade angular inicial, e $w = \sqrt{g/l}$ a pulsação. No entanto, o caso não linear também pode ser tratado analiticamente dando soluções explícitas em termos de funções elípticas. Qualquer equação diferencial ordinária de ordem k , pode ser transformada num sistema de equações diferenciais de 1.^a ordem autónomas (isto é, independentes da

variável «temporal» que parametriza as órbitas). Assim obtém-se no exemplo considerado, o sistema dinâmico:

$$\begin{cases} d\theta/dt = \phi \\ d\phi/dt = -(g/l) \sin \theta \end{cases}$$

ou, o que é o mesmo, o campo de vectores de componentes $(\phi, -g/l \sin \theta)$ no espaço de fase (θ, ϕ) .

Em dimensão 2, facilmente se prova não existirem órbitas com um comportamento complexo. No plano, ou temos pontos singulares, (zeros de campos de vectores, $d\theta/dt = d\phi/dt = 0$), órbitas fechadas (ciclos limite), ou órbitas que convergem ou divergem a partir destas. Se para obter complexidade não basta a não linearidade, que é preciso mais? Continuando com o sistema dinâmico anterior, vamos juntar um termo de força de fricção $a d\theta/dt$, dando

$$\begin{cases} d\theta/dt = \phi \\ d\phi/dt = -a\phi - (g/l) \sin \theta \end{cases}$$

o qual é ainda insuficiente para provocar a desejada complexidade.

3. Atractores estranhos

Que sucederá às órbitas se forcarmos o sistema por uma força externa periódica, $b \cos(\nu t)$, resultando o sistema dinâmico:

$$\begin{cases} d\theta/dt = \phi \\ d\phi/dt = -a\phi - (g/l) \sin \theta + b \cos \tau \\ d\tau/dt = \nu \end{cases}$$

onde $\tau = \nu t$? Aqui, os métodos analíticos são incapazes de qualquer descrição. Recorre-se então a novos métodos que tem surgido ultimamente, e podem ser rotulados de matemática experimental. Associando a teoria qualitativa dos sistemas dinâmicos, dinâmica simbólica e dinâmica topológica, à análise numérica, à teoria ergódica, à álgebra computacional e à computação gráfica, a matemática experimental desenvolve métodos próprios, descobrindo, experimentando e desenvolvendo a fenomenologia dos sistemas complexos (turbulentos, caóticos, estranhos, fractais, ...). Assim discre-

tizando o sistema dinâmico anterior, considerando o método de Euler (substituição das derivadas por razões incrementais e transformação em um processo iterativo) vem:

$$\left\{ \begin{array}{l} \theta_{k+1} = \theta_k + h\phi_k \\ \phi_{k+1} = \phi_k + h(-a\phi_k - c \sin \theta_k + b \cos \tau_k) \\ \tau_{k+1} = \tau_k + v/h \end{array} \right.$$

com $c=g/l$. Um programa iterativo simples, permite estudar experimentalmente a complexidade e diversidade das dinâmicas que o sistema apresenta quando se variam a , b , c e v , (por exemplo, $a=0.3$, $b=4.5$, $v=0.6$ e $c=4$), Fig. 1. O comportamento apresentado pelo

Resumindo, o que introduziu a complexidade além da terceira dimensão, foi o duplo aspecto de contração e expansão (hiperbolicidade), introduzida pela existência de termos positivos e negativos (onde pelo menos um é não linear), no campo de vectores.

4. Aplicações do plano

Embora nos sistemas dinâmicos contínuos exista a necessidade da terceira dimensão (além da não-linearidade), para se obter as soluções complexas, podemos seccionar o espaço tridimensional por um plano e estudar a aplicação

```

program pendulo; uses graph; const h:real=0.01;

var gd,gm, u,v:integer; x,y,x1,a,b,c,e,z:real;

procedure fase; var i:integer;

begin x:=0.5; y:=0.3; z:=0;

  for i:=1 to 20000 do begin

    x1:=x+h*y; y:=y+h*(-a*y-c*sin(x)+b*cos(z));

    z:=z+h*e; x:=x1; u:=trunc(x*3+200); v:=trunc(y*10+100);

    putpixel(u,v,1); end; end;

begin gd:=detect; gm:=1; initgraph(gd,gm,'');

a:=0.3; b:=4.5; e:=0.6; c:=4; fase; readln; closegraph; end.

```

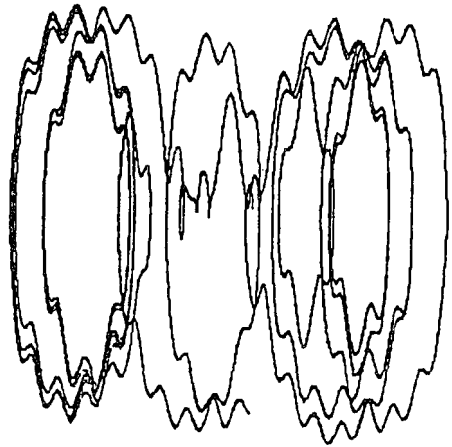


Fig. 1 — Atractor estranho do pêndulo.

sistema é o de um *atractor estranho*, quaisquer que sejam as condições iniciais. O sistema assintoticamente apresenta ou cai sempre no mesmo tipo de figura limite, a qual é estranha. A estranheza é resultante das irregularidades, fraccionamento (fractal) da forma geométrica da figura. São estes objectos estranhos, fractais que são as soluções típicas da natureza e da matemática dos sistemas dinâmicos. A sua geometria, topologia, propriedades ergódicas e dinâmicas, começam a ser estudadas sistematicamente. A sua experimentação em física, química, biologia, engenharias, vai ocupar os laboratórios dos centros de investigação e produção dos próximos anos.

induzida nesse plano pelos pontos de intersecção das órbitas contínuas com ele. Assim, partindo de um ponto P_0 do plano e comum a uma órbita, a aplicação anterior, dita de Poincaré, aplica o ponto P_0 num outro P_1 , obtido com o 1.º retorno da órbita ao plano. Note-se que, se a dinâmica tem uma órbita fechada, a aplicação de Poincaré terá um ponto periódico de período 2, os pontos P_1 e P_2 de intersecção da órbita fechada com o plano. Assim propriedades topológicas sobre o tipo de órbitas do campo de vectores tridimensional, como órbitas fechadas e atractores estranhos, transferem-se em propriedades topológicas sobre o tipo de pontos periódicos e aperiódicos

de aplicações do plano R^2 em R^2 . Consideremos o seguinte exemplo (Fig. 2):

$$\begin{cases} x_{k+1} = 1 - ax_k^2 + y_k \\ y_{k+1} = bx_k \end{cases}$$

com $a=1.2$, e $b=0.3$.

5. Aplicações do Intervalo

Um estudo exaustivo de todos os tipos de órbitas do tipo de atractores estranhos, no caso dos campos de vectores, ou de pontos aperiódicos no caso das aplicações do plano, ainda não é possível. No entanto, quando uma das dimensões é atractiva, e na descrição por uma aplicação de $R^2 \rightarrow R^2$, o sistema comporta-se assintoticamente como se fosse de $R \rightarrow R$.

Torna-se então possível uma redução da descrição a aplicações do intervalo $I=[0, 1]$ sobre ele próprio. Deste modo se vê como em sistemas unidimensionais, com a dinâmica descrita por uma aplicação não-linear, também possui a complexidade das soluções tipo atractor estranho. O modelo mais simples, mas só por si, capaz de encerrar toda uma família infinita de dinâmicas complexas é dado pela aplicação $f_b(x)=4bx(1-x)$ com $x \in I=[0, 1]$. No caso unidimensional os resultados são completos se recorrermos à dinâmica simbólica. Fixemos um valor de b , altura da parábola. Para cada valor inicial x_0 obtém-se por iteração a órbita numérica $x_0, x_1, \dots, x_i, \dots$ com $x_i = f_b^i(x_0) = f_b(x_{i-1})$, Fig. 3.

```

program henon;      uses graph;

const A:real=1.2; B:real=0.3; N:integer=1000;

var gd,gm,l,u,v:integer; X,Y,X1:real;

begin      gd:=detect; initgraph(gd,gm,""); line(0,0,600,0);

          line(600,0,600,200); line(600,200,0,200); line(0,200,0,0);

          x:=0.2; y:=0.1;      for l:=1 to N do begin

          X1:=1-A*X*X+Y;      Y:=B*X; X:=X1;

          u:=trunc(200*x+320); v:=trunc(150*y+100);

          putpixel(u,v,1); end; readln; closegraph;      end.

```

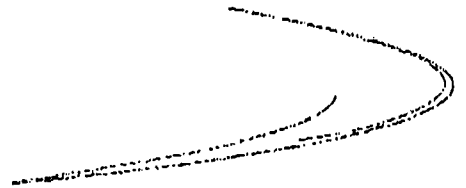


Fig. 2 — Aplicações do plano.

```

program parab; uses graph; var gd,gm,k,l:integer; b,x,x1:real;

procedure itera3; begin

for k:=1 to 8 do begin b:=0.8+k/40;

for l:=1 to 400 do begin x:=l/400; x1:=4*b*x*(1-x);

putpixel(l div 2,round(200-200*x),1);

end; line(0,200,200,0); x:=0.5;

for l:=1 to 75 do begin x1:=4*b*x*(1-x);

line(round(200*x),200-round(200*x),round(200*x),200-round(200*x));

line(round(200*x),200-round(200*x),round(200*x),200-round(200*x));

x := x1; end; end; end;

begin gd:=detect; gm:=1; initgraph(gd,gm,""); itera3; readln; closegraph; end.

```

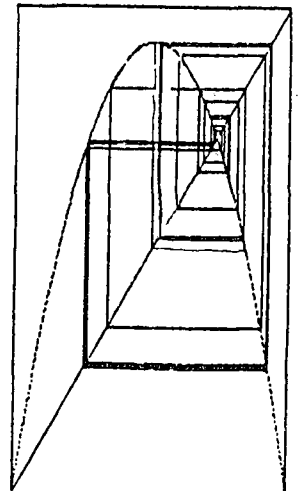


Fig. 3 — Iteradas da parábola.

Obtém-se uma codificação simbólica da órbita associando a cada ponto x_i um símbolo S_i ; com $S_i=L$ se $f'_b(x_0) < 0,5$; $S_i=R$ se $f'_b(x_0) > 0,5$ e $S_i=C$ se $f'_b(x_0) = 0,5$. Deste modo podemos associar a cada valor de b , o conjunto das órbitas simbólicas possíveis — *árvore das condições iniciais* A_{ci} (Fig. 4).



Fig. 4 — Árvore das condições iniciais.

Como caracterizar simbolicamente os valores de b ? Considera-se para cada b a órbita simbólica do ponto máximo $b=f_b(0,5)$. A sequência obtida $RL \dots$ caracteriza o valor do parâmetro b . Assim a árvore correspondente às órbitas dos possíveis b designa-se por *árvore do caos* ou das *seqüências máximas* A_{SM} [5] (Fig. 5). Nem todos os vértices

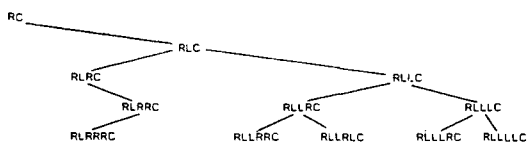


Fig. 5 — Árvore do caos.

nesta árvore são admissíveis. Dada uma sequência $S_1 S_2 \dots S_k$ ela é admissível ou realizável como seqüência correspondente a um valor de $b=f_b(0,5)$ se e só se for a *maior* de entre

as suas *rodadas*: $S_2 S_2 \dots S_k S_1$; $S_3 S_4 \dots S_k S_1 S_2$; ...; (maior na ordem indicada pela árvore).

Um programa simples, que gera o diagrama dito de bifurcações (Fig. 6) permite ver experimentalmente todo o jogo da criação de pontos periódicos atractivos e a sua destruição por conversão em repulsivos.

6. Autômatos celulares

As dinâmicas que temos vindo a considerar são descritas no espaço de fase contínuo e tempo discreto, e por dinâmica tem-se entendido a variação das variáveis espaciais (posições) em função do tempo. Para a maioria dos fenómenos naturais não é cómodo reduzir a dinâmica a mudanças de posição. Em geral temos variáveis tipo campo ϕ que são funções do espaço x e do tempo t . Sob o ponto de vista experimental o que é mais conveniente é partir de conjuntos discretos de valores para o espaço x , tempo t e para o campo ϕ . Assim a dinâmica passa a ser descrita por uma regra local f , que dá o valor:

$$\phi(x, t) = f[\phi(x-m, t-1), \dots, \phi(x-1, t-1), \phi(x, t-1), \phi(x+1, t-1), \dots, \phi(x+m, t-1)]$$

dados

$$\phi(x-m, t-1), \dots, \phi(x-1, t-1), \phi(x, t-1), \phi(x+1, t-1), \dots, \phi(x+m, t-1)$$

e com $m =$ inteiro pequeno (Fig. 7).

```

program bifurcacao;    uses graph;

var gd,gm,k,i:integer; b,x:real;

begin gd:=detect; gm:=1; initgraph(gd,gm,""); line(0,0,600,0);
      line(600,0,600,200); line(600,200,0,200); line(0,200,0,0);
  for k:=1 to 600 do begin b:=0.7+k/2000; x:=0.5;
    for l:=1 to 75 do begin x := 4*b*x*(1-x);
      if l > 25 then putpixel(k,round(200-200*x),1);
    end; end; readln; closegraph; end.

```

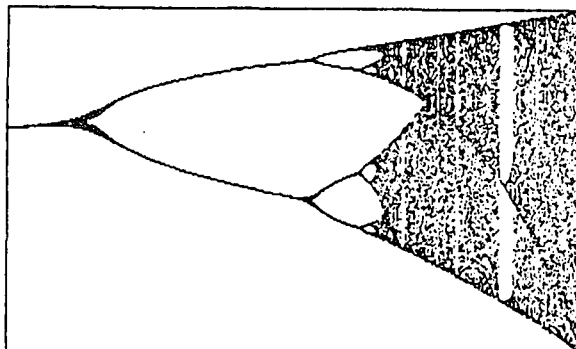


Fig. 6 — Diagrama de bifurcação.

```

program autcelulares; uses graph;
type configuracoes = array[1..160] of Integer;
    regra = array[1..8] of Integer;
var a,b:configuracoes; f:regra; gd,gm,c,co,s,r,k:integer;
procedure aut; var n,i,j:integer;
begin for n:=1 to 8 do begin r:=trunc(c/2);
    if odd(c) then f[n]:=1 else f[n]:=0; c:=r end;
    for i:=1 to 160 do begin r:=random(2);
        a[i]:=r; putpixel(i+s,1,r+co); end;
    for j:=2 to 120 do begin for k:=3 to 168 do begin
        k:=a[i-2]+a[i-1]+a[i]+a[i+1]+a[i+2]+1; b[i]:=f[k];
        putpixel(i+s,j,b[i]+co); end; b[1]:=0; b[159]:=0;
        b[2]:=0; b[160]:=0; a:=b; end; end;
begin gd:=detect; gm:=1; initgraph(gd,gm,''); line(0,0,600,0);
line(600,0,600,200); line(600,200,0,200); line(0,200,0,0); co:=8;
c:=20; s:=0; aut; co:=9; c:=50; s:=160; aut; readln; closegraph; end.

```

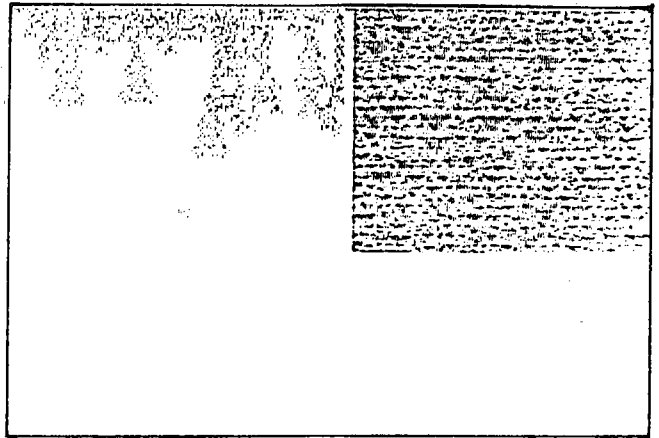


Fig. 7 — Autômatos celulares.

7. Entropia topológica

Como podemos então medir a complexidade topológica de uma dinâmica? Para cada período k existirão N_k pontos periódicos. Chama-se entropia topológica à grandeza $h_t = \lim_{k \rightarrow \infty} \log N_k^{1/k}$. Um modo possível de a calcular é através do maior valor próprio S_{max} , da matriz de Markov A associada,

$h_t = \log S_{max}$. Esta é obtida como a matriz de adjacência do grafo associado à órbita no intervalo (Fig. 8):

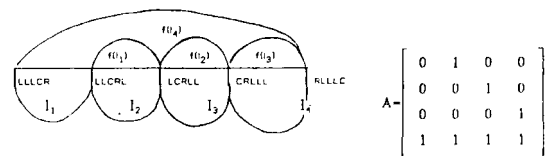


Fig. 8 — Grafo e matriz de Markov.

```

program liapunov; uses graph;
var gd,gm,k,l:integer; b,x,y,z:real;
procedure liap; begin for k:=1 to 600 do
begin b:=0.8+k/3000; x:=0.9; z:=0;
for l:=1 to 50 do begin x:=4*b*x*(1-x);
y:=4*b-8*b*x; z:=z+ln(abs(y)); end; z:=z/75;
putpixel(k,round(100-100*z),1); end; end;
begin gd:=detect; gm:=1; initgraph(gd,gm,'');
line(0,0,600,0); line(500,0,600,200); line(600,200,0,200);
line(0,200,0,0); liap; readln; closegraph; end.

```

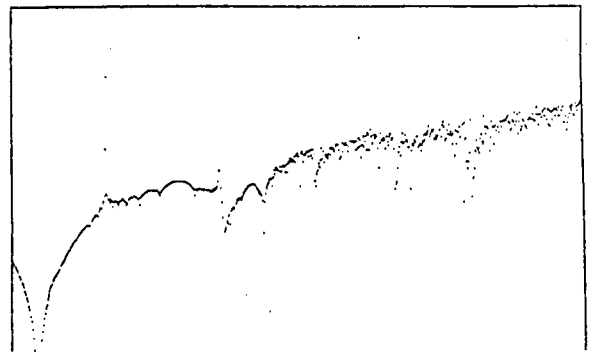


Fig. 9 — Expoente de Liapunov.

8. Expoentes de Liapunov

O expoente de Liapunov mede a taxa de divergência de trajectórias que partem vizinhas. Podemos no caso unidimensional defini-lo como (Fig. 9):

$$\lambda = \lim_{k \rightarrow \infty} (1/k) \sum_{i=0}^k \log Df_b(x_i),$$

9. Dimensão de Hausdorff

Os conjuntos limite não têm dimensão inteira. Ou têm comprimento nulo, embora não numeráveis (conjunto de Cantor) ou são bordos de áreas finitas, com comprimento infinito, curvas contínuas mas sem derivada em nenhum ponto (curvas de Koch, Fig. 10). São

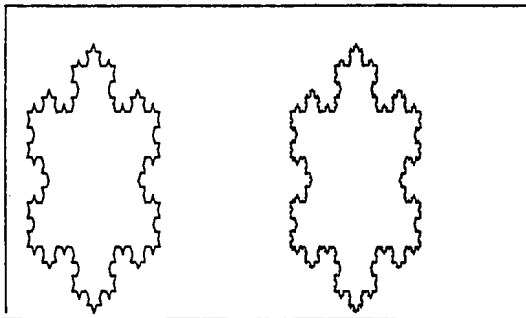


Fig. 10 — Curva de von Koch.

conjuntos ditos fractais [6], por serem fragmentados em todas as escalas em que são observados e por possuírem dimensão de Hausdorff não inteira. Esta foi definida em 1919, e podemos calculá-la do seguinte modo:

$$d_H = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\log N_\varepsilon}{\log 1/\varepsilon},$$

onde N_ε é o número mínimo de subintervalos necessários para cobrir o conjunto e ε é a unidade de escala considerada. Assim, o conjunto de Cantor tem $d_H(C) = \frac{\log 2}{\log 3}$ e a curva de von Koch tem $d_H(K) = \frac{\log 4}{\log 3}$.

10. Ensino do Caos, Atractores estranhos, Fractais e Autómatos celulares

Estes temas podem e devem ser introduzidos no ensino secundário. Qualquer deles pode ser encarado como um laboratório de experiências onde se pode aprender a descobrir «coisas» e a simular todo o tipo de fenómenos. Os alunos não precisam de conhecer mais do que o modelo que lhes é apresentado; os programas para o computador podem ser pedidos ao autor, os quais são simples e podem ser programados pelos próprios alunos. A experimentação, a procura de compreensão, a descoberta de regularidades dentro da complexidade, deve ser encarada como um jogo do qual se tira prazer e inteligibilidade.

REFERÊNCIAS

- [1] E. N. LORENZ — *Deterministic nonperiodic flow*. Jour. of Atmosf. Sc., **20**, 130-141 (1963).
- [2] D. RUELLE e F. TAKENS — *On the Nature of Turbulence*. Comm. Math. Physics, **20**, 167-192 (1971).
- [3] B. M. MANDELBROT — *The Fractal Geometry of Nature*. W. H. Freeman and Company (1982).
- [4] S. WOLFRAM — *Twenty Problems in the Theory of Cellular Automata*. Physica Scripta T.º, 170-183 (1985).
- [5] J. SOUSA RAMOS — *Dynamics Tree and the Chaos Order CFMC-E8/82* (1982).
- [6] H.-O. PEITGEN e P. H. RICHTER — *The Beauty of Fractals* Springer-Verlag (1986).

Quotas da SPF

Prezado sócio: se ainda não pagou as suas quotas para o ano de 1989, agradecemos que o faça o mais rapidamente possível junto da respectiva Delegação.

Assegurará desta forma melhores condições para o planeamento e expansão das actividades da Sociedade, bem como a recepção regular da Gazeta de Física.

*Quotas: não estudantes ... 2000 Escudos
estudantes 750 Escudos*