Um Problema de Mecânica

- *Calcular a altura h para que uma partícula de massa m, partindo do repouso no ponto A, e deslizando sem atrito sobre uma pista tipo «looping» (Fig. 1), passe pelo ponto O da circunferência de raio r.*
- *Calcular também as componentes e o módulo da velocidade nesse ponto O.*

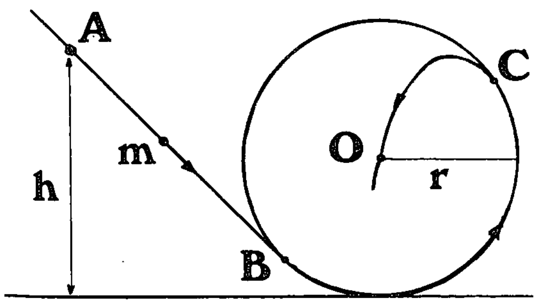


Fig. 1

Resolução

Para que a partícula de massa m, saindo do ponto A à altura h, possa passar no centro O do looping, terá de deixar de contactar com a pista num ponto C situado no quadrante superior direito da circunferência. Para o determinarmos exactamente, sigamos o movimento da partícula ao longo da sua trajectória.

- De A até B a partícula desliza num plano inclinado (seja α a sua inclinação), sujeita à acção simultânea de duas forças: o seu peso **P**, na vertical, e a reacção **R**, normal à pista por não haver atrito. Como m tem aqui uma trajectória rectilínea, não terá aceleração normal; a reacção da pista deverá então equilibrar exactamene a componente do peso segundo a normal (Fig. 2), isto é,

$$|\mathbf{R}| = |\mathbf{P}| \cos\alpha = mg \cos\alpha \qquad (1)$$

- De B até C a partícula descreve uma trajectória circular de raio r. Haverá necessariamente uma componente normal da aceleração, dada por $a_n = v^2/r$, onde v é o módulo da velocidade da partícula no ponto considerado. Pela lei de Newton, a componente normal da resultante das forças actuando sobre a partícula (**P** e **R**; por não haver atrito **R** continua normal à pista) está ligada com a aceleração normal pela equação,

$$R + P_n = m\ v^2 / r \qquad (2)$$

onde P_n é a componente do peso segundo a normal à pista. A intensidade da força de reacção da pista sobre m vem portanto dada, em cada ponto do arco BC, por

$$R = m\ v^2 / r - P_n \qquad (3)$$

É óbvio que à medida que m sobe no arco BC, vai perdendo energia cinética (que se transforma em energia potencial), acabando por se atingir um ponto para o qual R se torna nulo. Este será o ponto C, no qual m

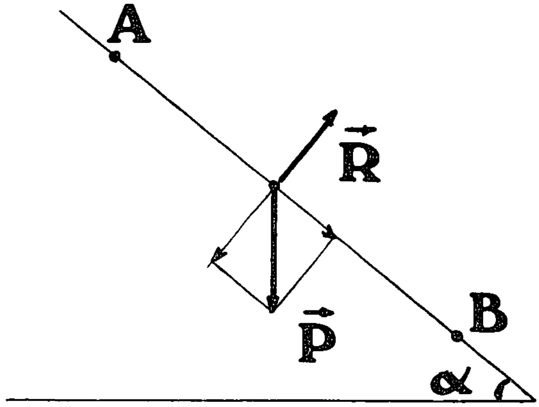


Fig. 2

deixa de estar em contacto com a pista, tendo-se então

$$m\ v_c^2 / r = P_n \qquad (4)$$

onde v_c é o módulo da velocidade de m no ponto C. É fácil ver, da figura 3, que se tem $P_n = P \text{ sen } \theta_c = mg \text{ sen } \theta_c$, donde resulta:

$$v_c^2 = g\ r \text{ sen } \theta_c \qquad (5)$$

Não havendo atrito, o princípio de conservação da energia mecânica diz-nos que a soma das energias cinética e potencial em cada ponto da trajectória é igual à energia mecânica inicial, mgh (por a partícula sair do repouso). Então, no ponto C temos:

$$1/2\ m\ v_c^2 + mg\ h_c = mg\ h \qquad (6)$$

Substituindo o valor de v_c^2 dado por (5) e dividindo por m, é fácil obter o resultado

$$\text{sen}\,\theta_c = 2\,(h-r)/(3r) \qquad (7)$$

Esta equação dá-nos o valor do ângulo ao centro que identifica o ponto C onde a partícula deixa de estar em contacto com a

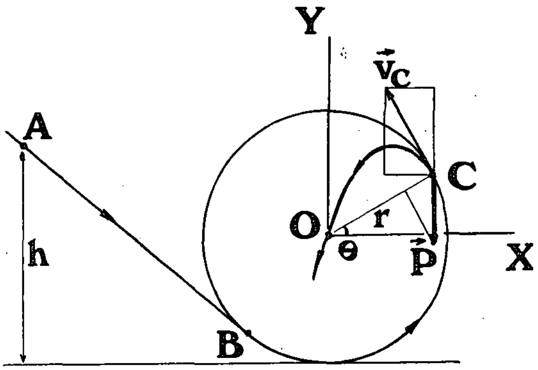


Fig. 3

pista. Como é óbvio, este ponto particular depende da altura h inicial. Por exemplo, quando $h = r$ temos $\theta_c = 0$; neste caso a partícula chega à «linha equatorial» e volta para trás. Qual a altura h para que o ponto C seja o mais alto possível ($\theta = \pi/2$) ? A expressão (7) dá-nos neste caso $h=5r/2$.

- A partir do ponto C a partícula deixa de estar em contacto com a pista (**R** $= 0$) ; a sua trajectória corresponderá então à da queda de um grave, lançado do ponto C com uma velocidade inicial de módulo $v_c = \sqrt{g\ r\ \text{sen}\ \theta_c}$ e de inclinação $(\pi/2-\theta_c)$ em relação à horizontal. Trata-se de um arco de parábola, como se ilustra na figura 3, para um caso particular. De facto, conforme o valor inicial de h, haverá um número infinito de pontos C possíveis; no problema pede-se para determinar a trajectória particular para a qual a partícula passa pelo centro O da circunferência. Para determinar o correspondente valor de θ_c (logo h, pois se tem $h=r(3\ \text{sen}\ \theta_c/2+1)$, da eq. (7)) tomemos um sistema de eixos ortonormados com origem em O. Pode-se então estabelecer as equações gerais do movimento do projéctil:

Eixo OX (mov. uniforme)

$$x = x_c + v_{xc}\, t \qquad (8)$$

$$v_x = v_{xc} \qquad (9)$$

Eixo OY (mov. uniformemente acelerado)

$$y = y_c + v_{yc}\, t - 1/2\, g\, t^2 \qquad (10)$$

$$v_y = v_{yc} - g\, t \qquad (11)$$

Eliminando o tempo entre as duas equações das coordenadas espaciais, obtém-se a equação da trajectória:

$$y = y_c + v_{yc}\,[\,(x-x_c)/v_{xc}\,] - 1/2\, g\,[\,(x-x_c)/v_{xc}\,]^2 \qquad (12)$$

No problema impõe-se que a trajectória passe pelo ponto O, de coordenadas $x=y=0$, o que implica

$$0 = y_c - v_{yc}\, x_c/v_{xc} - 1/2\, g\,(\,x_c/v_{xc}\,)^2 \qquad (13)$$

Como $x_c = r\cos\theta_c$, $y_c = r\,\text{sen}\,\theta_c$, $v_{xc} = -v_c\,\text{sen}\,\theta_c$ e $v_{yc} = v_c\cos\theta_c$, esta equação dá-nos imediatamente o valor particular de θ_c para que a partícula passe por O, vindo o resultado:

$$\text{cotg}^2\,\theta_c = 2 \quad . \qquad (14)$$

Sendo $\theta_c < \pi/2$, isto corresponde a um ângulo $\theta_c \simeq 35°$. Daqui concluiu-se que qualquer que seja o raio r da circunferência do «loop», para que a partícula passe por O terá de deixar o contacto com a pista num ponto C para o qual $\theta_c = \text{arc cotg}\,\sqrt{2} \simeq 35°$. Substituindo este valor na equação

$$h = r\ (\,3\,\text{sen}\,\theta_c/2 + 1\,) \qquad (15)$$

que resulta da equação (7), responde-se à primeira parte do problema posto; feitas as contas obtém-se a solução:

$$h = (\,1 + \sqrt{3}/2\,)\, r \qquad (16)$$

- A resolução da segunda parte do problema, que é calcular as componentes e o módulo da velocidade no ponto de abcissa e ordenada nula, é baseada nas equações gerais do movimento da partícula depois de deixar o contacto com a pista.

A componente da velocidade segundo a horizontal é constante e dada por (eq. (9)).

$$v_x = - v_c \operatorname{sen}\theta_c = - \sqrt{g\,r} \cdot 3^{-3/4} \qquad (17)$$

A componente da velocidade segundo a vertical é dada pela equação (11)

$$v_y = v_c \cos\theta_c - g\,t \qquad (18)$$

onde t é, aqui, o tempo que a partícula demora a passar do ponto C ($x = x_c$) ao ponto O ($x = 0$). Da eq. (8) tira-se

$$t = -x_c/v_{xc} = \sqrt{r/g}\cos\theta_c\,(\sin\theta_c)^{-3/2} \qquad (19)$$

donde

$$v_y = -\sqrt{gr}\cos^3\theta_c\,(\sin\theta_c)^{-3/2} = -(4/3)^{3/4}\sqrt{12}\,gr \qquad (20)$$

O módulo da velocidade da partícula quando passa no ponto O é dado por (*):

$$v = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = \sqrt[4]{3}\,\sqrt{gr} \qquad (21)$$

Finalmente, a expressão vectorial da velocidade no ponto O é dada por:

$$\mathbf{v} = v_x\,\mathbf{i} + v_y\,\mathbf{j} \qquad (22)$$

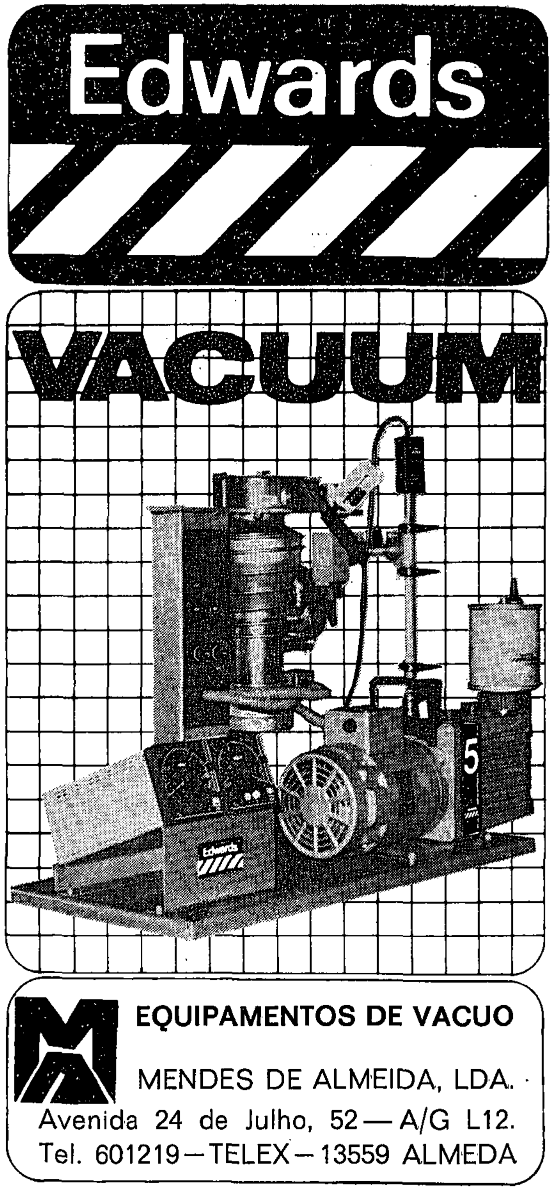
Se o leitor quiser traçar, com rigor, a trajectória da partícula após ter deixado de estar em contacto com a pista, poderá representar a função

$$y = 2\sqrt{2}\,x - (3/2)\sqrt{3}\,(x^2/r)$$

que resulta da eq. (12) quando se substitui x_c, y_c, v_{xc} e v_{yc} pelos valores acima determinados.

Rui M. Ferreira Coelho, 12.º ano
Escola Sec. Emídio Navarro, Viseu

(*) Este resultado podia obter-se, de um modo mais simples, aplicando o princípio da conservação da energia mecânica aos pontos A e O: $mgh = 1/2\, mv^2 + mgr$. A eq. (16) conduz imediatamente ao resultado (21).



Quotas da SPF

Prezado sócio: se ainda não pagou as suas quotas para o ano de 1987, agradecemos que o faça o mais rapidamente possível junto da respectiva Delegação.

Assegurará desta forma melhores condições para o planeamento e expansão das actividades da Sociedade, bem como a recepção regular da Gazeta de Física.

Quotas: não estudantes ... 1200 Escudos
estudantes .... 600 Escudos