# Forças nos eixos de rotação

## Algumas considerações elementares

JOÃO BESSA SOUSA
Laboratório de Física, Faculdade de Ciências do Porto

*No ensino das rotações dá-se muitas vezes o exemplo de uma porta móvel em torno do seu eixo, sob a acção de uma força aplicada* **F**, *encontrando-se frequentemente a afirmação que «a força de reacção do eixo sobre a porta é sempre igual e oposta à força aplicada, constituindo-se um binário de forças a actuar sobre a porta». Tal afirmação está em geral errada, analisando-se aqui várias situações ilustrativas, com ou sem atrito entre a porta e o eixo.*

### 1. Introdução

Consideremos a rotação de uma porta em torno de um eixo fixo ($\Delta$) sob a acção de uma força aplicada **F** suposta, por comodidade, normal ao seu plano e aplicada numa extremidade (Fig. 1). É frequente encontrar-se a afirmação que «a força de reacção do eixo

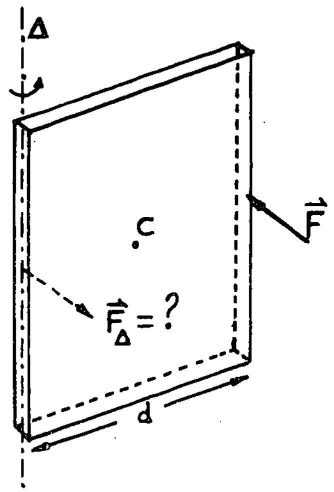


Fig. 1 — A aplicação da força **F** vai provocar o aparecimento de uma força de reacção $\mathbf{F}_\Delta$ no eixo de rotação; C é o centro de massa da porta.

sobre a porta ($\mathbf{F}_\Delta$) é sempre igual e oposta à força aplicada **F**», constituindo-se um binário de forças a actuar sobre a porta. A «justificação» deste resultado segue por vezes a seguinte via de raciocínio:

i. Se um sólido indeformável está ligado a um eixo fixo, então não pode ter movimentos de translação (mas só rotações).

ii. Portanto, as forças actuando sobre a porta ($\mathbf{F} + \mathbf{F}_\Delta$) deverão ter resultante nula, logo $\mathbf{F}_\Delta = -\mathbf{F}$ (constituindo-se um binário).

Infelizmente esta conclusão nem sempre está correcta. Como analisaremos adiante, se desprezarmos o atrito no eixo de rotação, o resultado $\mathbf{F}_\Delta = -\mathbf{F}$ não será válido. Existindo atrito, teremos ainda $\mathbf{F}_\Delta \neq -\mathbf{F}$ em geral, salvo no caso extremo em que **F** tem uma intensidade insuficiente para vencer o atrito entre o eixo e a porta (ficando esta em repouso); mas mesmo neste caso o sistema de todas as forças actuando sobre a porta não é equivalente a um simples binário de forças.

### 2. Ausência de atrito no eixo de rotação

Neste caso as forças que o veio, suposto cilíndrico, exerce sobre a porta são normais à superfície de contacto, sendo portanto equivalentes a uma força $\mathbf{F}_\Delta$ passando pelo eixo; $\mathbf{F}_\Delta$ não dá neste caso qualquer momento mecânico em relação ao eixo. A porta está então sujeita à acção de duas forças exteriores: **F** aplicada na sua extremidade, $\mathbf{F}_\Delta$ exercida pelo eixo.

Recordemos que o centro de massa da porta (ponto C na Fig. 1; fora do eixo de rotação) se desloca como se nele estivesse concentrada toda a massa (M) da porta e aplicada a resultante (**R**) de todas as forças exteriores:

$$M \, \mathbf{a}_C = \mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\Delta \qquad (1)$$

onde $\mathbf{a}_C$ é a aceleração do centro de massa da porta.

Se houvesse apenas um binário a actuar sobre a porta ($\mathbf{F}_\Delta = -\mathbf{F}$), como muitas vezes se afirma, teríamos uma resultante nula, logo

$$\mathbf{a}_C = 0 \qquad \mathbf{V}_C = \mathbf{const} \qquad (2)$$

O centro de massa seguiria então uma trajectória rectilínea com velocidade constante $\mathbf{V}_C$, o que é absurdo, pois C descreve uma trajectória circular em torno do eixo! Daqui se conclui que, na ausência de atrito, a força de reacção do eixo sobre a porta nunca pode ser igual a $-\mathbf{F}$. Calculemos então $\mathbf{F}$ neste caso de ausência de atrito.

Como o centro de massa descreve uma trajectória circular (raio R), haverá aceleração do centro de massa ($\mathbf{a}_C$), segundo a normal (versor $\mathbf{n}$) e segundo a tangente (versor $\mathbf{t}$) à trajectória, de acordo com a conhecida decomposição:

$$c = \frac{dV_C}{dt}\,\mathbf{t} + \frac{V_C^2}{R}\,\mathbf{n} \qquad (3)$$

Usando a eq. 1 obtemos:

$$M\,\frac{dV_C}{dt}\,\mathbf{t} + M\,\frac{V_C^2}{R}\,\mathbf{n} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\Delta \qquad (4)$$

expressão que nos permite explicitar a força $\mathbf{F}_\Delta$:

$$\mathbf{F}_\Delta = -\mathbf{F} + (M\,\frac{dV_C}{dt}\,\mathbf{t} + M\,\frac{V_C^2}{R}\,\mathbf{n}) \qquad (5)$$

Vê-se que $\mathbf{F}_\Delta$ não é igual a $-\mathbf{F}$, sendo a diferença dada pelo termo entre parêntesis no segundo membro. Mesmo que $\mathbf{F}$ fosse aplicada com a porta em repouso ($V_C = 0$) o termo entre parêntesis não seria nulo, pois aparecia imediatamente uma aceleração do centro de massa devida à força aplicada ($dV_C/dt \neq 0$).

Para termos o valor de $\mathbf{F}_\Delta$ precisamos de conhecer $dV_C/dt$, ou, equivalentemente, a aceleração angular da porta ($d\omega/dt$; $\omega$ = velocidade angular), uma vez que $V_C = R\omega$:

$$\frac{dV_C}{dt} = R\,.\,\frac{d\omega}{dt} \qquad (6)$$

Para calcular $d\omega/dt$ basta aplicar o teorema do momento cinético,

$$I_\Delta \cdot \frac{d\omega}{dt} = M_\Delta \qquad (7)$$

onde $I_\Delta$ é o momento de inércia da porta em em relação ao eixo e $M_\Delta$ é a grandeza da resultante, segundo $\Delta$, dos momentos das forças aplicadas em relação a esse eixo. Como $\mathbf{F}_\Delta$ não dá, na ausência de atrito, momento em relação ao eixo, temos:

$$M_\Delta = F\,.\,d \qquad (8)$$

onde *d* é a distância entre o ponto de aplicação de $\mathbf{F}$ e o eixo, e se admitiu $\mathbf{F}$ normal ao plano da porta. Substituindo (8) em (7) e usando as eqs. (6) e (7) obtém-se (com $V_C = 0$):

$$\mathbf{F}_\Delta = -\mathbf{F} + \left(\frac{M\,R\,d}{I_\Delta}\right)\mathbf{F} \qquad (9)$$

onde se usou $\mathbf{F} = F\,\mathbf{t}$ (no exemplo considerado). Podemos simplificar esta expressão, introduzindo o valor do momento de inércia da porta em relação ao eixo $\Delta$:

$$I_\Delta = Md^2/3 \qquad (10)$$

e fazendo $d = 2R$. Obtemos então:

$$\mathbf{F}_\Delta = \frac{1}{2}\,\mathbf{F} \qquad (11)$$

Chegamos a um resultado interessante: no exemplo considerado ($V_C = 0$), o eixo reage sobre a porta com uma força ($\mathbf{F}/2$) com a mesma direcção e sentido da força aplicada!

Os cálculos foram feitos para o instante da aplicação de $\mathbf{F}$, supondo a porta inicialmente em repouso. Em instantes posteriores, devido à aceleração $d\omega/dt \neq 0$, o centro de massa da porta adquire uma velocidade $V_C$ finita.

Este facto origina uma nova componente de $\mathbf{F}_\Delta$, dirigida segundo a normal, pois se tem das eqs. (6) e (9):

$$\mathbf{F}_\Delta = \frac{1}{2}\,\mathbf{F} + \left(M\,\frac{V_C^2}{R}\right)\mathbf{n} \qquad (12)$$

A nova componente de $\mathbf{F}_\Delta$ tem uma explicação física clara: é responsável pela aceleração normal ($V_C^2/R$) a que o centro de massa da porta tem de estar sujeito para percorrer efectivamente a trajectória de raio R.

Até aqui consideramos o caso de uma porta simples, com o eixo de rotação num dos lados, ficando o centro de massa fora do eixo. Consideremos por momentos o caso da porta tipo guarda-vento, com duas abas e o eixo de rotação a meio, como se mostra na Fig. 2.

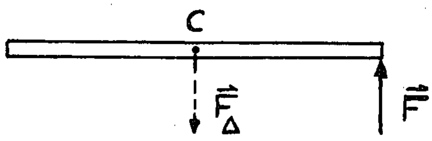


Fig. 2 — Quando o eixo de rotação, fixo, passa pelo centro de massa da porta (C), a força de reacção $\mathbf{F}_\Delta$ é igual e oposta à força aplicada $\mathbf{F}$ (constituindo com ela um binário de forças).

Neste caso o centro de massa cai no eixo de rotação, estando portanto sempre em repouso. Isto significa que a resultante das forças aplicadas à porta, $\mathbf{R} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_\Delta$, terá de ser nula, logo $\mathbf{F}_\Delta = -\mathbf{F}$ neste caso particular.

## 3. Efeito do atrito

*a)* Se a força $\mathbf{F}$ aplicada for insuficiente para vencer as forças de atrito estático entre o veio e a porta, ficando esta imobilizada ($V_C = 0$, $a_C = 0$), tira-se da eq. (1) que a resultante de todas as forças exteriores é então nula, isto é:

$$\mathbf{F}_\Delta = -\mathbf{F} \qquad (13)$$

onde $\mathbf{F}_\Delta$ é a resultante das forças distribuídas sobre a superfície de contacto veio-porta (exercidas pelo veio sobre a porta):

$$\mathbf{F}_\Delta = \sum_i \mathbf{f}_i \qquad (14)$$

O somatório estende-se a todas as forças de origem microscópica $\mathbf{f}_i$ que se exercem nos vários pontos (i) de contacto entre o veio e a porta.

Notemos que a condição $\mathbf{F}_\Delta = -\mathbf{F}$ não significa que o sistema das forças exteriores seja simplesmente equivalente a um binário. Na verdade, estando a porta em repouso ($\omega = 0$, $d\omega/dt = 0$), de acordo com a eq. (7) terá de ser também nulo o momento de todas as forças aplicadas em relação ao eixo de rotação, o que significa que as forças de atrito têm de produzir um momento em relação ao eixo de rotação, precisamente igual e oposto ao produzido pela força $\mathbf{F}$:

$$\mathbf{M}_\Delta \text{ (forças atrito)} + \mathbf{M}_\Delta \text{ (força } \mathbf{F}) = 0 \qquad (15)$$

O sistema das forças exercidas pelo veio sobre a porta é pois equivalente, neste caso, a uma força de valor $\mathbf{F}_\Delta = -\mathbf{F}$ (eq. (13)) e a um binário dando um momento $\mathbf{M}_\Delta$ (atrito) $= -\mathbf{M}_\Delta$ (força $\mathbf{F}$) em relação ao eixo de rotação.

*b)* No caso de as forças de atrito serem insuficientes para impedir o movimento da porta sob a acção de $\mathbf{F}$, o movimento circular do centro de massa implica necessariamente $\mathbf{a}_C \neq 0$ (sempre que há curvatura na trajectória, há aceleração!), logo, pela eq. (1), tem-se como resultante das forças exercidas pelo veio sobre a porta:

$$\mathbf{F}_\Delta \neq -\mathbf{F}$$

Podemos portanto afirmar que o movimento de uma porta em torno de um eixo num dos seus lados nunca pode ser descrito como o resultado da acção de um sistema de forças unicamente equivalente a um binário. Esta conclusão é também válida para a situação em que a porta fica imobilizada sob a acção do atrito estático.

## 4. Considerações finais

Para finalizar, analisemos criticamente o conteúdo das afirmações (i) e (ii), procurando detectar o erro subjacente aos raciocínios então seguidos. O erro resultou de se ter admitido que um sólido em movimento de rotação pura apenas pode estar sujeito à acção de forças exteriores equivalentes a um binário. É óbvio que se o centro de massa do sistema não cair no eixo de rotação, terá necessariamente movimento, e por se tratar de uma trajectória com curvatura, este movimento é sempre acelerado. Para produzir essa aceleração as forças exteriores terão necessariamente uma resultante diferente de zero (eq. 1), não podendo ser simplesmente equivalente a um binário (que tem resultante nula).

Julgamos terem ficado esclarecidas as razões de um equívoco que se encontra frequentemente em livros didáticos, nomeadamente em pontos de exame propostos aos alunos.