Gaz. Fis., Vol. 8 Fasc. 4, 1985

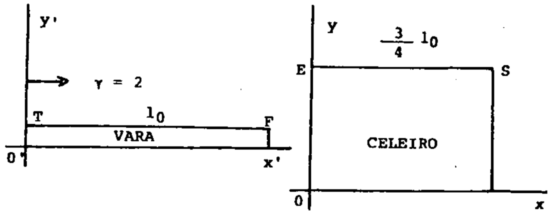
Paradoxo da vara e do celeiro e invariância relativista

A. A. GONÇALVES DA SILVA, P. M. ARAÚJO SÁ
Departamento de Engenharia Electrotécnica, F.E.U.P.

Estuda-se um paradoxo clássico sobre comprimento em relatividade. As equações de Lorentz parecem não o resolver: observadores inerciais diferentes tiram conclusões diferentes. Esclarece-se que tal não contradiz o princípio da invariância e ilustra-se fisicamente por meio de duas «experiências de pensamento».

I. Introdução

Um corredor segura uma vara com comprimento próprio l_0 e move-se com velocidade $v = (\sqrt{3}/2)\, c = 0{,}866\, c$ (*) em direcção a um celeiro com comprimento próprio $(3/4)\, l_0$ (v. Fig.). Em repouso encontra-se um agricultor



(T — Traseira; F — Frente; E — Entrada; S — Saída).

que afirma que a vara se contrairá e caberá no celeiro, afirmando o corredor que o celeiro contrairá e não poderá conter a vara. Quem tem razão? Será esta uma pergunta com sentido?

Este problema foi colocado aos alunos do 1.º ano do Curso de Engenharia Electrotécnica da F.E.U.P., numa das cadeiras de Física. Constatou-se que a sua interpretação era mais difícil do que o previsto e não completamente satisfatória na literatura disponível. O estudo que se segue é feito àquele nível.

II. A transformação de Lorentz

Considerando um refencial fixo, S, em relação ao qual se move com velocidade $\mathbf{v} = v\,\mathbf{i}$ um referencial S′, as equações de transformação de Lorentz podem escrever-se (além de $\Delta y = \Delta y'$; $\Delta z = \Delta z'$):

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} \Delta x &= \gamma\,(\Delta x' + v\,\Delta t') \\ \Delta t &= \gamma\,(\Delta t' + v/c^2 . \Delta x') \end{aligned}$$

$$\text{ou}\quad \text{(II)}\quad \begin{aligned} \Delta x' &= \gamma\,(\Delta x - v\,\Delta t) \\ \Delta t' &= \gamma\,(\Delta t - v/c^2 . \Delta x) \end{aligned}$$

sendo, respectivamnte, Δx, Δt, $\Delta x'$, $\Delta t'$ intervalos de espaço e de tempo em S e S′ entre os mesmos dois acontecimentos. A equivalência matemática dos dois sistemas é clara (inversão), correspondendo fisicamente a poder considerar-se que S′ está parado e S se move com velocidade $\mathbf{v} = -v\,\mathbf{i}$ (invariância).

Para calcular intervalos é necessário definir cuidadosamente os acontecimentos em questão. Estes podem ser escolhidos como se segue, para o nosso problema.

Acontecimento 1. Frente ≡ Entrada

$$x'_1 = l_0\,,\ t'_1 = 0\,;\ x_1 = 0\,,\ t_1 = 0$$

Acontecimento 2. Traseira ≡ Entrada

$$x'_2 = 0\,,\ \Delta x'_{21} = -\,l_0\,;\ x_2 = 0\,,\ \Delta x_{21} = 0$$

Das equações (I) ou (II) resulta:

$$\Delta t_{21} = l_0/(2v)\,;\ \Delta t'_{21} = l_0/v$$

Acontecimento 3. Frente ≡ Saída

$$x'_3 = l_0\,,\ \Delta x'_{31} = 0\,;\ x_3 = 3/4\ l_0\,,\ \Delta x_{31} = 3/4\ l_0$$

Das equações (I) ou (II) resulta:

$$\Delta t_{31} = 3l_0/(4v)\,;\ \Delta t'_{31} = 3l_0/(8v)$$

Assim, segundo S′ a traseira chega à entrada após a frente ter chegado à saída e a vara não cabe, enquanto que segundo S a traseira chega à entrada antes de a frente atingir a saída e a vara cabe. Para quem esperasse resolver o «paradoxo», o resultado é uma desilusão!

Mas não dizia Einstein que o movimento (inercial) é relativo, não dependendo as conclu-

(*) $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} = 2$.

sões do referencial em que nos colocamos? Não! Einstein diz que é indiferente considerar S com $\mathbf{v} = o$ e S′ com $\mathbf{v} = v\,\mathbf{i}$ ou S′ com $\mathbf{v} = o$ e S com $\mathbf{v} = -\,v\,\mathbf{i}$ não sendo por isso possível distinguir se se está em repouso ou com velocidade constante não nula — e isso está confirmado pois os sistemas (I) e (II) fornecem as mesmas conclusões. Mas não diz que observadores em referenciais inerciais diferentes medem o tempo e o espaço da mesma maneira: pelo contrário, foi aqui que ele revolucionou os conceitos da Mecânica. As equações I transformam a frase «não cabe» na frase «cabe» — funcionam assim como operadores. Mas mesmo estas frases são polémicas: o que é «caber»? O agricultor argumenta: meço as extremidades do celeiro ($\Delta x = 3/4\ l_0$) simultaneamente ($\Delta t = o$) e constato que nesse instante a vara está no interior daquele. Mas o corredor sorrirá perante tal ingenuidade, pois nessas condições é $\Delta t' = -\gamma\,.\,v/c^2$, $\Delta x = -\gamma\,.\,v/c^2\,.\,3/4\ l_0$ ($<o$), isto é, para ele o que se passou foi que o agricultor mediu primeiro à saída e só *depois* à entrada — e daí o seu «erro»! Daí também uma interpretação física para o desacordo.

É igualmente assim que um observador que vê uma carga eléctrica em movimento mede um campo eléctrico e um campo magnético, enquanto que um segundo movendo-se com ela mede apenas um campo eléctrico. Ambos têm razão! As equações de Lorentz transformam este campo eléctrico no campo electromagnético do primeiro referencial.

III. Uma experiência com parede. Elasticidade

Apesar das explicações anteriores, é grande a tentação no sentido de fechar ambas as extremidades do celeiro «quando» o agricultor considera que a vara lá está contida e verificar o que acontece. Se o agricultor, que não ouve nenhum barulho, não vê as portas ou a vara a partir, etc., parar a experiência logo após ter demonstrado que tinha razão, como poderá o corredor ver coisas partidas, apesar de para ele não ser possível fechar as portas? Aqui tem de haver acordo: ou há «explosão» ou não, admitindo-se apenas que se situe diferentemente no espaço-tempo. Mais uma vez estamos a ser enganados pelas palavras! E estamos também a omitir um aspecto físico essencial. Façamos a experiência.

Suponhamos que à saída do celeiro existe um muro [1],

$$\text{Muro} \equiv \text{Saída},$$

que aguentará todos os tratos a que vai ser submetido; e que à entrada existe uma porta que se pode fechar.

A inclusão do muro vai alterar por completo a situação: vamos ver que assim o corredor também «verá» a vara dentro do celeiro! Coloquemo-nos no seu referencial: os comprimentos (bem medidos, isto é, com $\Delta t' = o$) da vara e do celeiro são respectivamente l_0 e $3/4\,.\,l_0/\gamma = 3/8\ l_0$ e quando Frente $\equiv$ Muro existe um comprimento $5/8\ l_0$ de vara fora do celeiro. Mas nenhum efeito físico se faz sentir na Traseira enquanto a onda elástica, orginada no choque, não chega lá, e o corredor continua a corrida com a mesma velocidade e a mesma facilidade! E se a onda se propagasse instantaneamente (pergunta de um estudante desatento)? Aqui entra de novo a relatividade: nenhuma interacção se pode propagar com velocidade superior a c. Vamos considerar a situação mais desfavorável: a onda de choque propaga-se com velocidade c (corpo rígido em relatividade [2]) levando um tempo l_0/c até atingir a Traseira. Mas o celeiro continua a mover-se à velocidade de $-v\,\mathbf{i}$ e para que engula a vara decorre um tempo de apenas $5/8\ l_0/v = 0{,}72\ l_0/c < l_0/c$: só depois de a vara estar totalmente contida no celeiro é que a sua traseira sente o choque. O corredor sentirá então um enorme «coice relativista», proveniente da expansão da vara — expansão elástica, tal como a contracção elástica resultante do choque — e, se a porta da entrada se tiver fechado o sistema «explodirá» também. O corredor e o agricultor concordarão quanto aos resultados da experiência: a vara cabe; o sistema «explode»!

Pode verificar-se que mesmo que o celeiro tivesse um comprimento próprio de apenas $(2-\sqrt{3})\ l_0 = 0{,}268\ l_0$ *ou* que se movesse com uma velocidade de 0,28 c ainda a vara caberia nele.

IV. Uma experiência com guilhotina

E se accionarmos uma guilhotina colocada na Entrada quando Frente ≡ Muro e estão 5/8 l_0 de vara fora do celeiro? A vara é cortada (corredor) ou não (agricultor)? É outra questão mal colocada. Retomemos os acontecimentos 1, 2 e 3. Suponhamos agora que o acontecimento 3 (Frente ≡ Muro) é também caracterizado por:

«Emissão, em Frente ≡ Muro, de uma ordem de disparo da guilhotina colocada na Entrada»

(note-se de passagem que tal emissão é feita em instantes diferentes em S e S′, como se viu). Consideremos ainda:

Acontecimento 4.: «Ordem de Disparo Atinge a Entrada»

$$\Delta x_{41} = 0 ; \; \Delta t_{41} = 3/4 \; l_0 \; (1/c + 1/v)$$

Das equações (I) ou (II) resulta:

$$\Delta x'_{41} = -2{,}80 \; l_0 ; \; \Delta t'_{41} = 3/2 \; l_0 \; (1/c + 1/v) ,$$

isto é, para S′ a guilhotina atravessa o eixo (2,8 l_0) atrás da Traseira e não corta a vara, concordando com S. O desacordo será quanto ao ponto do espaço-tempo em que a guilhotina cai e não quanto à integridade da vara.

É também evidente que o instante em que se sincronizam os relógios nada altera (mas a sincronização só pode ser feita uma vez...).

V. Conclusão

A linguagem corrente e os conceitos do dia-a-dia são fecundos na formulação de questões sem sentido. Em particular, não deve confundir-se invariância relativista, que garante que todas as leis da Física são as mesmas em referenciais inerciais diferentes, com «Invariância nos resultados das medidas». E também não podemos impor condições físicas impossíveis (e.g. interacções instantâneas) quando se realiza uma experiência de pensamento.

Agradecemos ao Prof. E. Lage (Laboratório de Física, FCUP) pela útil discussão sobre aspectos essenciais e à Dr.ª F. Mota (idem) pela interessada leitura e comentários.

REFERÊNCIAS

[1] RINDLER, W. — Essential Relativity: Special, General, and Cosmological, Revised Second Edition, 1979, Springer-Verlag.

[2] BROTAS, A. — «A Necessidade duma Elasticidade Relativista dos Corpos Rígidos», 2.ª Conferência Nacional de Física, Porto, 1980.

Ponto de Física do 12.º ano

Soluções «oficiais» e soluções correctas

C. RAMALHO CARLOS, EDUARDO MARTINHO, JORGE VALADARES

Divisão de Educação da Sociedade Portuguesa de Física

No passado mês de Julho decorreram as chamadas provas de aferição do 12.º ano de escolaridade, as quais tiveram este ano um peso muito importante na nota de candidatura para os pretendentes ao ingresso no ensino superior.

A prova escrita de Física da 1.ª fase/1.ª chamada (Ponto 73) teve dois casos: um no problema do «satélite», outro no problema do «balão». Na presente nota faz-se uma breve análise desses casos.

Problema do satélite

O enunciado do problema II.2 era o seguinte:

«2. Um satélite de massa 2000 Kg descreve uma órbita de raio igual a 9000 Km em volta da Terra com velocidade de módulo constante. Calcule:

2.1 O trabalho que seria necessário realizar para afastar o satélite até uma distância infinita da Terra.

2.2 A grandeza do momento angular do satélite suposto um ponto material, em relação ao centro da Terra».

No tocante a este enunciado, e a outros do mencionado ponto, percebe-se mal que se