NOTAS E COMENTÁRIOS

SOBRE A DEMONSTRAÇÃO DE QUE UM CAMPO DE FORÇAS CENTRAL É CONSERVATIVO

J. MIRANDA LEMOS *

No livro «*The Feynman lectures on Physics*», Feynman, Leighton, Sands (Addison Wesley, 1975), pode ler-se na pág. 13-5 (I vol.), quando se pretende provar que o trabalho total realizado pela força da gravidade quando se transporta uma partícula numa trajectória fechada é nulo:

«(...) we might like to assert that a real curve could alwais be imitated sufficiently well by a a series of sawtooth jiggles like those of fig. 13-4 (...)« (fig. 1 do nosso texto).

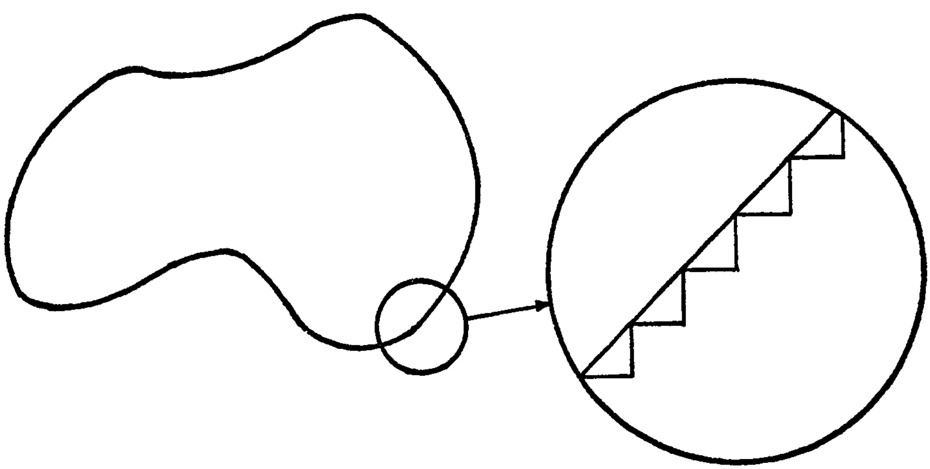

Fig. 1

Critiquemos esta afirmação. Como o trabalho depende do espaço percorrido pelo ponto de aplicação da força, para que duas trajectórias sejam aproximadas uma da outra para efeitos do trabalho realizado ao

* Aluno do IST (Telecomunicações electrónica).

longo delas, é necessário que tenham, não somente forma aproximada, mas também comprimento aproximadamente igual.

Recordando á fórmula que dá o comprimento de uma curva em função das suas equações paramétricas

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'^2(t) + \Psi'^2(t)dt}$$

vemos que é necessário, para podermos garantir que duas curvas têm «aproximadamente« o mesmo comprimento, não só que tenham apenas «aproximadamente« a mesma forma, mas também que as primeiras derivadas das funções que as definem parametricamente num dado referencial, sejam contínuas, o que significa que as curvas não podem ter «bicos».

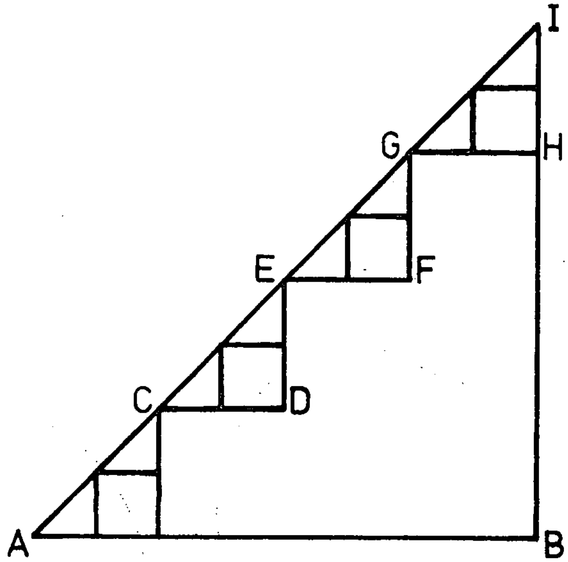

Fig. 2

Para vermos como duas curvas podem ter sensivelmente a mesma forma sem terem o mesmo comprimento, consideremos um triângulo rectângulo de lados de comprimento unitário. A sua hipotenusa mede $\sqrt{2}$. Podemos aproximá-la pela linha quebrada $ABC...I$ (fig. 2) e, em princípio, seríamos levados a pensar que o seu comprimento é uma aproximação de $\sqrt{2}$. Se repararmos porém que

$$\overline{AB} + \overline{CD} < ... \overline{OP} = 1$$

$$\overline{BC} + \overline{DE} + \overline{FG} + ... + \overline{PQ} = 1$$

vem que o seu comprimento é 2. Aumentando o número de pontos que definem a linha quebrada, vemos que esta se confunde com a diagonal, mas o seu comprimento permanece igual a 2. Como sabemos que $\sqrt{2} \neq 2$ somos levados a concluir que este paradoxo é devido aos «bicos« da linha quebrada.

Voltemos porém à demonstração referida no início. Se bem que o comprimento da linha quebrada não seja igual ao da trajectória real, vamos demonstrar que o trabalho realizado ao longo de ambas as curvas é igual. Isto é equivalente a mostrar que em cada um dos triângulos elementares (formados por uma porção de trajectória real e dois segmentos perpendiculares da linha quebrada), o trabalho realizado ao longo da hipotenusa é igual ao realizado ao longo dos catetos.

Para tal atente-se que para uma linha quebrada suficientemente «fina«, o campo na zona do triângulo é uniforme dado este ter dimensões pequenas.

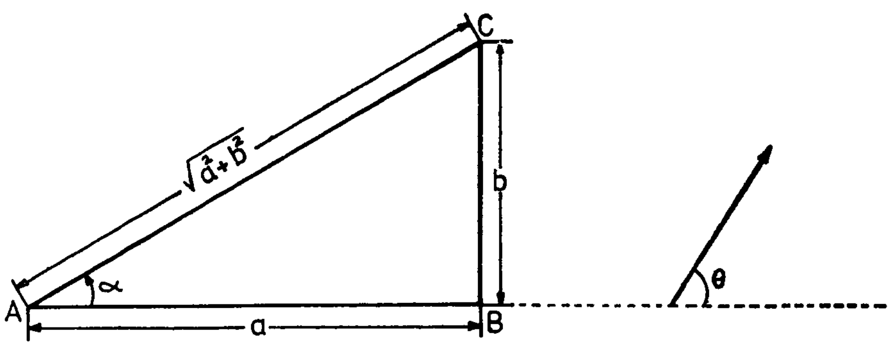

Fig. 3

O problema reduz-se então a mostrar que dados 3 pontos A, B e C que definem um triângulo rectângulo em B (ver fig. 3), situados num campo uniforme, o trabalho W_{AC} realizado quando se leva uma partícula de A a C pela hipotenusa é igual ao realizado quando a partícula vai de A a B e daí para C, W_{ABC}. Tem-se

$$\sqrt{a^2+b^2}\left(\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cos\theta+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\operatorname{sen}\theta\right)=a\cos\theta+b\operatorname{sen}\theta$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\,(\cos\theta\cos\alpha+\operatorname{sen}\theta\operatorname{sen}\alpha)=a\cos\theta+b\operatorname{sen}\theta$$

$$\sqrt{a^2+b^2}\cos(\theta-\alpha)=a\cos\theta+b\operatorname{sen}\theta$$

Mas

$$W_{AC} = F\sqrt{a^2 + b^2} \cos (\theta - \alpha)$$

$$W_{ABC} = F (a \cos \theta + b \operatorname{sen} \theta)$$

donde

$$W_{AC} = W_{ABC}$$

No texto citado esta demonstração é apresentada no caso particular em que $\theta = 0$, o que é suficiente para o problema que aí se considera.