

## Uma interpretação atomística do princípio de Arquimedes

por JOÃO A. BESSA MENESES E SOUSA

(Prof. Aux. da Faculdade de Ciências do Porto.  
Bolsheiro do Instituto de Alta Cultura)

### 1. Introdução

É bem conhecido o enunciado elementar do princípio de Arquimedes sobre a impulsão, bem como a sua demonstração baseada na consideração de um fluido em equilíbrio, no qual se isola conceptualmente uma porção com um volume  $V$  e superfície  $\Sigma$ , de escolha arbitrária; as forças de pressão exercidas sobre  $\Sigma$  pelo fluido restante, com resultante  $I_0$  (fig. 1a), equilibram necessariamente o peso  $P_0$  da porção de fluido considerada ( $I_0 = P_0$ ).

Substituindo a porção de fluido considerada por um corpo com o mesmo volume  $V$  e superfície  $\Sigma$  (fig. 1b), as forças de pressão exercidas sobre esta continuam exactamente as mesmas, uma vez que o fluido exterior «ignora» o que está no interior de  $\Sigma$ . A única diferença é que em vez do peso  $P_0$  teremos de considerar o peso  $P$  do corpo; a força resultante ( $F$ ) será então:

$$F = P - I_0 = P - P_0.$$

Daqui que todo o corpo mergulhado num fluido em equilíbrio sofra da parte deste

uma impulsão vertical ( $I$ ) dirigida de baixo para cima e igual ao peso do volume de fluido deslocado ( $I = I_0 = P_0$ ; princípio de Arquimedes). Observe-se que este princípio deve a sua origem à existência da gravidade, deixando portanto de ter sentido em regiões onde esta se não faz sentir. Os termos «vertical» e «peso» que figuram no enunciado são meros reflexos deste carácter restricto.

Trata-se de uma demonstração do tipo macroscópico, onde não se levanta o problema de *conhecer* a origem física da impulsão. A simplicidade do enunciado e a sua aplicabilidade imediata a casos da observação quotidiana não exigem, do ponto de vista prático, quaisquer tratamentos mais complexos deste princípio. No entanto, julgamos haver muito valor formativo numa interpretação deste princípio à luz de um modelo atomístico da matéria, porque tais interpretações trazem sempre uma maior clarificação dos fenómenos físicos em jogo, contribuindo para uma compreensão mais profunda e intelectualmente mais satisfatória da realidade. Por simplicidade de tratamento, consideraremos aqui apenas o caso de

um corpo mergulhado num fluido gasoso em equilíbrio a uma temperatura constante  $T$  (valor absoluto).

## 2. Noções elementares sobre teoria cinética dos gases

Numa interpretação atomística, um fluido gasoso não é mais do que um agregado de moléculas (ou apenas átomos)

percorre livremente uma distância média de cerca de  $1000 \text{ \AA}$  antes de colidir com uma outra molécula do gás; esta distância média, característica de cada gás e dependente da sua pressão e temperatura, recebe o nome de livre percurso médio, representando-se aqui pelo símbolo  $\lambda$ .

A energia cinética das moléculas de qualquer gás é tanto maior quanto mais elevada for a sua temperatura  $T$ , po-

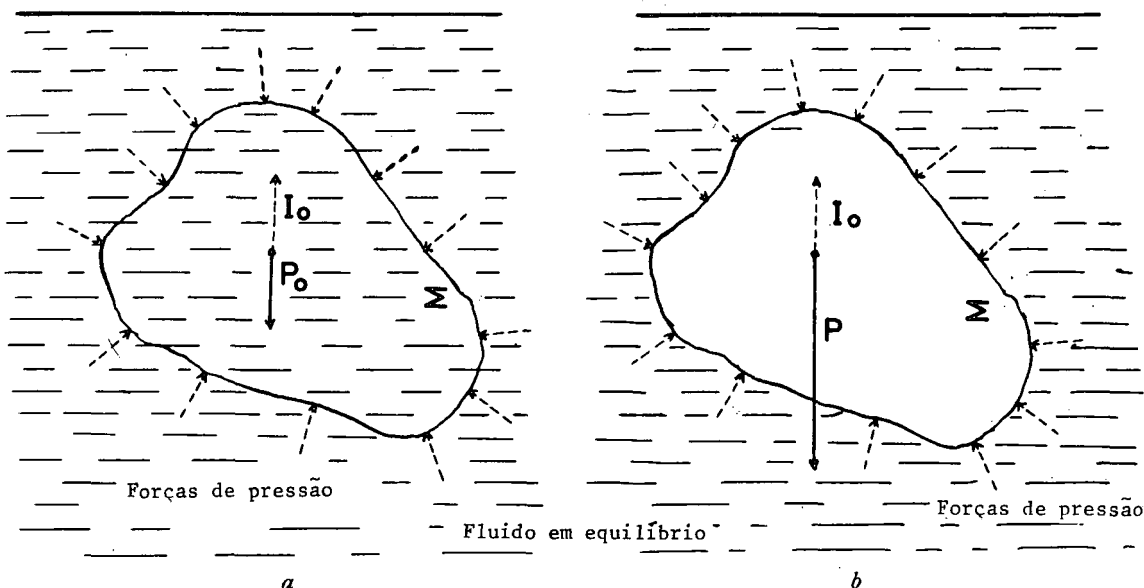


Fig. 1 — *a*. Fluido em equilíbrio;  $I_0$  representa a resultante das forças de pressão exercidas sobre  $\Sigma$ ;  $P_0$  é o peso da porção de fluido isolada conceptualmente. *b*. Quando se substitui a superfície conceptual  $\Sigma$  pela superfície  $\Sigma$  de um corpo real, não se alteram as forças de pressão exercidas do exterior sobre  $\Sigma$ .

em incessante movimento de agitação térmica e suficientemente afastadas umas das outras para que se possam considerar livres na maioria do tempo. Por exemplo, no ar à temperatura e pressão normais há cerca de  $10^{19}$  moléculas em cada  $\text{cm}^3$ , distando uma das outras cerca de  $30 \text{ \AA}$  em média; esta separação é muito superior à dimensão linear das próprias moléculas em causa ( $\sim 3 \text{ \AA}$ ). Quanto ao movimento, e ainda nas condições normais admitidas, cada molécula

dendo mostrar-se que, em média,

$$(1) \quad (1/2) \cdot m v^2 = (3/2) \cdot k T$$

onde  $m$  é a massa de uma molécula,  $v$  um valor médio da sua velocidade e  $k$  uma constante universal (constante de Boltzmann,  $k = 1,38 \cdot 10^{-16} \text{ erg} \cdot \text{K}^{-1}$ ).

Que acontece se mergulharmos um corpo no seio deste fluido? Como é de esperar, as moléculas do gás, no seu movimento incessante de agitação térmica,

acabarão por chocar muitas vezes com as paredes do corpo, originando cada choque uma pequena força elementar dirigida do gás para o corpo; a pressão habitual  $p$  não é mais do que o resultado da sobreposição destas pequenas forças elementares, referidas à unidade de área da parede do corpo. Em média, e para um dado elemento de superfície, haverá tantas moléculas que nele embatem vindas da «direita» como da «esquerda», pelo que a força de pressão resultante terá a direcção da normal ao elemento de superfície, qualquer que seja a orientação deste no espaço.

De que dependerá esta pressão  $p$ ? Como é óbvio, será tanto mais elevada quanto maior for o número de moléculas que chocam na unidade de tempo com a unidade de superfície considerada, número que é proporcional à concentração  $n$  de moléculas junto à superfície e à sua velocidade  $v$ ; por outro lado,  $p$  será tanto maior quanto mais elevada for a impulsão ( $mv$ ) das moléculas ao dirigirem-se para a parede do corpo. Um cálculo rigoroso confirma estas afirmações, mostrando que:

$$(2) \quad p = (1/3) \cdot n v \cdot m v = \frac{1}{3} n m v^2.$$

Como, por (1), a energia cinética só depende da temperatura, segue-se que a pressão depende em última análise da concentração de moléculas  $n$  e da temperatura  $T$  do gás:

$$(3) \quad p = (2/3) \cdot n \cdot (1/2) m v^2 = \\ = (2/3) \cdot n \cdot (3/2) k T = n k T.$$

### 3. Interpretação microscópica do princípio de Arquimedes

#### 3.1. Aspectos qualitativos

De posse destes conhecimentos, voltamos novamente ao princípio de Arquimedes,

considerando por comodidade o caso de um corpo de forma cilíndrica mergulhado verticalmente num fluido gasoso à temperatura  $T$ . A existência de uma impulsão vertical, dirigida de baixo para cima, significa que a pressão sobre a base inferior é maior que a pressão exercida pelo fluido sobre a base superior; estando o gás à mesma temperatura  $T$  em todos os seus pontos, é óbvio (expressão 3) que a diferença de pressões entre as bases só pode resultar de uma diferença na concentração  $n$  das moléculas do gás, devendo haver necessariamente um maior número de moléculas junto da base inferior. Porquê?

Precisamente porque as moléculas do gás estão sujeitas à acção da gravidade, que produz nelas acelerações descendentes segundo a vertical que levam à sua gradual acumulação nas regiões de menor altitude. Porém, esta acumulação não continua indefinidamente, porque o efeito da gravidade começa a ser cada vez mais contrariado pelos choques das moléculas que descem com as que estão já nas camadas subjacentes. Estes choques originam portanto um fluxo molecular ascendente que se vai opor ao fluxo descendente devido à gravidade. Claro que se atinge finalmente uma situação de equilíbrio quando estes fluxos se tornam iguais.

Tentemos pôr estas ideias em termos mais objectivos, começando por supôr que não há diferenças de concentração no seio do gás ( $\Delta n = 0$ ), nem na acção da gravidade: cada molécula está então apenas sujeita aos choques com outras moléculas do gás. Por ser  $T = \text{const.}$  e  $\Delta n = 0$ , há, em média, uma completa simetria do gás à volta da molécula considerada, pelo que se compensarão os efeitos dos seus choques sucessivos. Por isso a velocidade de agitação térmica  $v$  (ou «molecular») imposta pela temperatura do gás terá uma direcção e sentido variando frequente e

caoticamente no tempo (devido aos choques), de tal modo que ao fim de um elevado número de colisões a molécula tem uma grande probabilidade de se conservar ainda na mesma região inicial do gás. A temperatura confere portanto uma velocidade de agitação molecular  $v$ , mas não confere uma velocidade de arrastamento da molécula em qualquer direcção e sentido particulares. A velocidade molecular  $v$  depende apenas da temperatura  $T$  e da massa  $m$  de cada molécula ( $1/2 \cdot m v^2 = 3/2 \cdot k T$ ), apresentando valores muito elevados à temperatura ambiente; por exemplo, para o caso do ar nas condições normais,  $v(O_2) \cong 480 \text{ m/s}$  e  $v(N_2) \cong 515 \text{ m/s}$ .

### 3.2. Fenómenos de arrastamento e difusão no seio de fluidos gasosos

a) Vejamos agora o que acontece quando está presente a acção da gravidade, mas não há inicialmente diferenças de concentração no seio do gás ( $\Delta n = 0$ ): cada molécula adquire então uma aceleração  $g$  segundo a vertical e no sentido descendente. Se só existisse uma molécula, esta aceleração produziria uma velocidade de arrastamento (sobreposta à velocidade molecular  $v$ ) aumentando indefinidamente no tempo. Havendo outras moléculas no gás, esta velocidade não cresce indefinidamente, porque quando a molécula em causa percorre uma distância da ordem do seu livre percurso médio  $\lambda$  colide com uma molécula vizinha. Como  $\lambda \cong 10^3 \text{ A}^0$  para os gases nas condições normais de pressão e temperatura e a velocidade molecular tem valores da ordem de  $500 \text{ m/s}$ , segue-se que o «tempo de vida média» ( $\tau$ ) durante o qual a molécula considerada se desloca em voo livre (isto é, sem chocar) é da ordem de

$$\tau = \frac{\lambda}{v} \cong \frac{10^3 \text{ A}^0}{500 \text{ m/s}} = 2 \times 10^{-10} \text{ s.}$$

Em tão curto intervalo de tempo a molécula considerada não poderá ter adquirido velocidade de arrastamento apreciável no sentido descendente, pois

$$g \cdot \tau \cong 2 \cdot 10^{-9} \text{ m/s}$$

que é um valor insignificante quando comparado aos valores típicos da velocidade molecular imposta pela agitação térmica, da ordem das centenas de  $\text{m/s}$  como vimos.

Sendo os efeitos dos choques perfeitamente aleatórios, a molécula considerada perde, em média e ao fim do tempo  $\tau$ , a velocidade de arrastamento adquirida desde a última colisão, recomeçando em seguida um novo ciclo de aceleração sob a acção da gravidade; diz-se que a molécula perdeu a «memória», pois a direcção da sua velocidade após o choque não conserva qualquer relação com a sua direcção antes do choque.

Calculemos agora a distância média de arrastamento,  $\langle Z \rangle$ , percorrida segundo a vertical pela molécula considerada, entre duas colisões sucessivas;  $\langle Z \rangle$  será a média das diferentes distâncias  $Z_i$  de arrastamento na vertical percorridas pela molécula entre as várias colisões sucessivas:

$$\langle Z \rangle = \frac{Z_1 + Z_2 \dots + Z_N}{N}$$

Designemos por  $\Delta t_i$  o intervalo de tempo que medeia entre a colisão de ordem  $(i-1)$  e a colisão seguinte  $(i)$ ; como entre colisões a molécula está apenas sujeita à acção da gravidade e esta tem sempre a mesma direcção e sentido, teremos um deslocamento na direcção vertical dado por

$$\Delta Z_i = (1/2) \cdot g \cdot (\Delta t_i)^2$$

donde

$$\begin{aligned} \langle Z \rangle &= (1/2) \cdot g \cdot \frac{\Delta t_1^2 + \Delta t_2^2 + \dots + \Delta t_N^2}{N} = \\ &= (1/2) \cdot g \cdot \langle \Delta t^2 \rangle. \end{aligned}$$

O valor médio dos *quadrados dos tempos*  $\Delta t_i$  entre colisões sucessivas da molécula considerada,  $\langle \Delta t^2 \rangle$ , está intimamente ligado ao valor médio dos *tempos*  $\Delta t_i$  entre colisões sucessivas,  $\langle \Delta t \rangle (\equiv \tau)$ , podendo mostrar-se que

$$\begin{aligned} \langle \Delta t^2 \rangle &= 2 \langle \Delta t \rangle^2 \\ &\equiv 2 \tau^2. \end{aligned}$$

Introduzindo este resultado na expressão de  $\langle \Delta Z \rangle$  temos,

$$\langle \Delta Z \rangle = \frac{1}{2} g \cdot 2 \tau^2 \equiv g \tau \cdot \langle \Delta t \rangle.$$

Vemos que tudo se passa como se a aceleração da gravidade conferisse às moléculas uma velocidade média de arrastamento constante ( $u$ ) de valor  $u = g \tau$ ; ao fim de um tempo  $t$  suficientemente longo relativamente a  $\tau$  podemos dizer que a molécula considerada percorreu uma distância  $Z$  dada por:

$$Z = u \cdot t = g \cdot \tau \cdot t.$$

A figura seguinte ilustra o efeito de arrastamento devido a  $g$ , que acabamos de calcular.

Atendendo a que todas as moléculas estão sujeitas à acção da gravidade, e que há  $n$  moléculas por unidade de volume, é fácil concluir que o número médio de moléculas que atravessam, na unidade de tempo, um elemento de superfície  $S$  num plano horizontal é dado por:

$$\left( \frac{dN}{dt} \right)_{g(\downarrow)} = S n g \tau.$$

Se só existisse a gravidade ( $\Delta n = 0$ ) haveria portanto o estabelecimento de um fluxo contínuo de moléculas no sentido descendente com o valor dado pela expressão supra. Na prática, este fluxo não pode manter-se, pela simples razão

de originar uma progressiva acumulação de moléculas nas regiões a baixa altitude e uma conseqüente rarefacção de moléculas nas regiões superiores; estas diferenças de concentração ( $\Delta n$ ) originam um fenómeno de difusão no sentido ascendente que tende a contrariar a acção

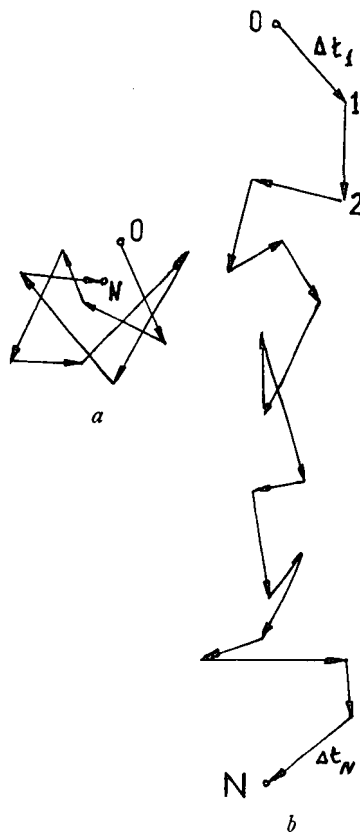


Fig. 2 - a. Movimento de agitação molecular na ausência de forças externas. b. Movimento de arrastamento de uma molécula, produzido pela aceleração da gravidade e sobreposto ao seu movimento de agitação molecular. Ao fim de  $N$  choques a molécula desloca-se na vertical de uma distância média  $N \cdot \langle s \rangle$ , com  $\langle s \rangle = g \tau \cdot \tau = g \tau^2$ .

da gravidade, estabelecendo-se o equilíbrio ao fim de um tempo característico para cada gás. Antes de tratarmos do equilíbrio entre os dois fluxos antagónicos, será conveniente considerar com mais detalhe o fenómeno da difusão.

b) Por comodidade de tratamento supomos que não há agora a acção da gravidade, mas apenas diferenças de concentração de moléculas segundo a vertical ( $dn/dz \neq 0$ ); quanto à temperatura  $T$ , supomo-la constante em todo o fluido gasoso. O número de moléculas que passam, na unidade de tempo e no sentido ascendente, através de um elemento de superfície horizontal  $S$  e à altitude  $z$  é proporcional à concentração  $n$  de moléculas, à sua velocidade molecular  $v$  e, naturalmente, à área  $S$  da superfície considerada:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\uparrow} = \text{const. } n \cdot v \cdot S.$$

Em que ponto devemos tomar o valor de  $n$ ? Precisamente à cota  $z$  correspondente à posição da superfície  $S$ ? É claro que não, pois as moléculas que atravessam a superfície vêm de posições que distam da superfície cerca de  $\lambda$ ; em primeira aproximação, poderemos tomar  $n$  calculado à cota ( $z - \zeta\lambda$ ), onde  $\zeta$  é um factor da ordem da unidade:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\uparrow} = \text{const. } n(z - \zeta\lambda) \cdot v \cdot S.$$

Do mesmo modo poderemos calcular o número de moléculas que atravessam, por difusão, o elemento  $S$ , vindas das camadas superiores:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{\downarrow} = \text{const. } n(z + \zeta\lambda) \cdot v \cdot S.$$

O número de moléculas que *efectivamente* passam, por difusão, de baixo para cima, na unidade de tempo é dado por:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dN}{dt}\right)_{d(\uparrow)} &= \left(\frac{dN}{dt}\right)_{\uparrow} - \left(\frac{dN}{dt}\right)_{\downarrow} = \\ &= \text{const. } v \cdot S \cdot [n(z - \zeta\lambda) - n(z + \zeta\lambda)]. \end{aligned}$$

Desenvolvendo

$$n(z - \zeta\lambda) \cong n(z) - \zeta\lambda \frac{dn}{dz} + \dots;$$

$$n(z + \zeta\lambda) \cong n(z) + \zeta\lambda \frac{dn}{dz} + \dots$$

temos,

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{d(\uparrow)} = \text{const. } \lambda \cdot v \cdot S \cdot \left(-\frac{dn}{dz}\right).$$

Um cálculo rigoroso mostra que a constante de proporcionalidade vale  $1/3$ , donde:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{d(\uparrow)} = \frac{1}{3} S \cdot \lambda \cdot v \cdot \left(-\frac{dn}{dz}\right).$$

Usa-se o índice  $d$  nesta expressão para distinguir este fluxo de *difusão* no sentido ascendente do fluxo de arrastamento no sentido descendente causado pela *gravidade*:

$$\left(\frac{dN}{dt}\right)_{g(\downarrow)} = S n g \tau.$$

c) Para um fluido em equilíbrio, estes fluxos tornam-se iguais, podendo escrever-se:

$$\frac{1}{3} S \lambda v \left(-\frac{dn}{dz}\right) = S n g \tau.$$

Como  $\lambda = v \tau$ , podemos simplificar esta expressão, obtendo

$$\frac{1}{3} v^2 \left(-\frac{dn}{dz}\right) = n g$$

e como  $(1/2) m v^2 = (3/2) k T$  temos ainda:

$$dn/n = -(m g / k T) \cdot dz.$$

Esta expressão diz-nos que num gás em equilíbrio tem de haver uma diminuição relativa da concentração das suas moléculas ( $dn/n < 0$ ) com o aumento da altitude ( $dz > 0$ ), tanto maior quanto maior for a massa das moléculas e menor a temperatura do gás.

### 3.3. O princípio de Arquimedes

Consideremos um corpo cilíndrico mergulhado verticalmente num fluido gasoso, estando este em equilíbrio; seja  $S$  a área de cada base do cilindro e  $dz$  a altura. As forças de pressão exercidas pelo gás sobre as duas bases do cilindro são diferentes, valendo

$$p(z+dz)S = f_{\downarrow}(z+dz) = n(z+dz) \cdot kT \cdot S$$

$$p(z) \cdot S = f_{\uparrow}(z) = n(z) \cdot kT \cdot S.$$

A força de impulsão resultante vale portanto

$$I(\uparrow) = f_{\uparrow}(z) - f_{\downarrow}(z+dz)$$

$$= kTS[n(z) - n(z+dz)]$$

$$= kTS(-dn/dz) \cdot dz.$$

Mas, como vimos, para um gás em equilíbrio verifica-se que

$$(-dn/dz) = (mg/kT) \cdot n,$$

donde:

$$I(\uparrow) = kTS(mg/kT)ndz =$$

$$= (mg) \cdot (Sdz \cdot n).$$

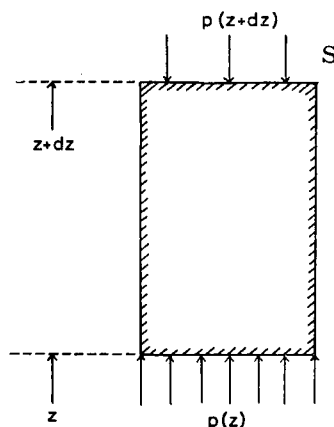
Atendendo a que  $mg$  representa o peso de cada molécula do gás e  $(Sdz \cdot n)$  representa o número de moléculas de gás contidas num volume igual ao do corpo  $(Sdz)$ , concluímos que a força de impulsão é igual ao peso do fluido deslocado pelo corpo, que é afinal o princípio de Arquimedes.

Usámos nesta demonstração, por simplicidade, um corpo de forma cilíndrica; notemos contudo que se o corpo não tiver esta forma, é sempre possível decompô-lo em volumes elementares cilíndricos e aplicar a cada um deles o raciocínio atrás referido.

Referimos também que não se fez intervir na demonstração apresentada a acção das forças exercidas pelo fluido sobre a superfície lateral do cilindro; é fácil ver que estas forças se compensam

em pontos diametralmente opostos, por não haver diferenças de concentração de moléculas em cada plano horizontal.

Por último chamamos a atenção para o facto de a justificação microscópica



Nível de referência

Fig. 3

apresentada se basear num modelo atômístico particular de um estado também particular da matéria — o dos gases perfeitos. Se quiséssemos interpretar microscopicamente o princípio de Arquimedes no caso dos fluidos líquidos, teríamos de usar um modelo atômístico diferente, que fosse capaz de descrever com boa aproximação o comportamento dos líquidos em causa. É este o preço (redução da generalidade dos tratamentos) que se tem de pagar em geral nas interpretações microscópicas, em troca de uma maior penetração no detalhe dos fenómenos físicos em jogo.

#### BIBLIOGRAFIA

- L. LANDAU, A. KISAIGORODSKI, éditions Mir, Moscou, 1966, cap. XI.
- D. TABOR, *Gases, Liquids and solids*, the Penguin Library of the Physical Sciences (Physics/Chemistry), 1969, cap. 4.
- MAX BORN, *Física Atômica*, ed. Fundação Calouste Gulbenkian, 1965, cap. 1, apêndice II.