apenas através de pequenas indicações conseguidas em laboriosos e complexos sistemas experimentais cujo custo é via de regra assombrosamente grande. O custo de cerca de 10^8-10^{10} escudos típico de instalações experimentais em construção deve ser comparado com 10^2 escudos preço duma lupa com a qual já conseguimos estender o nosso domínio de observação.

Tais somas astronómicas utilizadas na pesquisa dessas elusivas percepções da natureza representam um esforço colectivo que os governos das nações investem sem grande esperança dum retorno directo, embora o produto imediato de tais investimentos se manifeste na preparação intelectual e tecnológica da sociedade e possa reverter a curto prazo num benefício económico. São finalmente considerações deste género que limitam a observação da natureza.

Quantificação de um campo

por Filipe Duarte Santos

(Laboratório de Física e Engenharia Nucleares
e Laboratório de Física da Faculdade de Ciências de Lisboa)

A mecânica quântica não relativista permite uma compreensão unificada e consistente do ponto de vista lógico de um vastíssimo número de fenómenos em física molecular, atómica e nuclear. Esta é a principal razão da sua grande importância na ciência contemporânea. A estrutura de base desta teoria foi lançada entre os anos de 1923 e 1926. Reconheceu-se cedo que esta teoria não podia servir para descrever o comportamento dinâmico de partículas com velocidades próximas da velocidade da luz, deficiência que foi parcialmente superada com o aparecimento da teoria relativista dos electrões de Dirac em 1928. Outra deficiência, talvez mais profunda, resulta da teoria pressupor que o número de partículas num dado sistema é constante, independente do tempo: o integral, estendido a todo o espaço, da distribuição de probabilidade relativa à posição de uma partícula é constante e igual a um. Contudo conhecem-se inúmeros fenómenos nos quais o número de partículas é variável. São exemplos a emissão espontânea de um fotão por um átomo excitado, na ausência de um campo de radiação exterior e o decaimento nuclear β no qual um neutrão de um núcleo atómico origina um protão, um electrão e um antineutrino. Em física das partículas elementares os processos em que há criação e aniquilação de partículas são frequentíssimos. A teoria quântica dos campos permite incluir a possibilidade destes fenómenos na estrutura da mecânica quântica.

Em mecânica clássica o campo é um conceito que essencialmente permite interpretar a interacção entre dois corpos separados por uma distância finita. Por exemplo, a interacção entre duas cargas eléctricas a e b resulta da interacção da carga a com o campo eléctrico produzido pela carga b. A ideia nova e básica na teoria quântica dos campos é associar a cada tipo de campo uma partícula com uma determinada massa e spin—os quanta do campo. A excitação, ou seja o aumento de energia, do campo corresponde à criação de quanta desse campo.

Para precisar ideias e porque é um

exemplo simples e històricamente importante consideremos um campo electromagnético de radiação. Utilizando um potencial vector $\vec{A}(\vec{r},t)$ solenoidal as equações básicas deste campo podem escrever-se

$$(1) \qquad \vec{B}=\nabla\times\vec{A}\,,\ \vec{E}=-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t},$$

$$(2) \qquad \nabla^2\vec{A}-\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{A}}{\partial t^2}=0$$

onde $\vec{E}$ e $\vec{B}$ representam respectivamente o vector campo eléctrico e magnético. As ondas descritas pela equação (2) propagam-se no vácuo e numa direcção $\vec{k}$, perpendicular aos vectores $\vec{E}$ e $\vec{B}$, com a velocidade da luz, representada por c.

Consideremos o desenvolvimento em série de Fourier do campo vectorial $\vec{A}$ num dado instante t. Podemos admitir, sem perda de generalidade, que o volume V onde se faz o desenvolvimento é um cubo de aresta L centrado na origem. Visto o vector $\vec{A}$ ser real tem-se

$$(3) \qquad \vec{A}(\vec{r},t)=\frac{1}{\sqrt{V}}\sum_{\vec{k}}\sum_{\alpha=1,2}\left[c_{\vec{k}\alpha}(t)\vec{u}_{\vec{k}\alpha}(\vec{r})+ c^*_{\vec{k}\alpha}(t)\vec{u}^{\,*}_{\vec{k}\alpha}(\vec{r})\right]$$

onde

$$(4) \qquad \vec{u}_{\vec{k}\alpha}(\vec{r})=\vec{\varepsilon}^{(\alpha)}\,e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}}\,,\quad V=L^3.$$

$\vec{\varepsilon}^{(1)}$ e $\vec{\varepsilon}^{(2)}$ são dois versores escolhidos de modo que $\vec{\varepsilon}^{(1)},\vec{\varepsilon}^{(2)}$ e $\vec{k}$ constituam um triedro ortogonal directo e são chamados vectores de polarização. Esta escolha é necessária para o potencial vector ser solenoidal, conforme se supôs de início. Impondo condições de fronteira periódicas na superfície do volume V as componentes do vector número de onda $\vec{k}$ devem satisfazer as relações:

$$(5) \qquad k_x, k_y, k_z=\frac{2\pi n}{L},\quad n=\pm1,\pm2,\cdots$$

O primeiro somatório na equação (3) estende-se a todos os vectores $\vec{k}$ cujas componentes são dadas por estas relações e os vectores $\vec{u}_{\vec{k}\alpha}$ satisfazem às seguintes equações de ortonormalização:

$$(6) \qquad \frac{1}{V}\int d\vec{r}\,\vec{u}_{\vec{k}\alpha}(\vec{r})\,\vec{u}^{\,*}_{\vec{k}'\alpha'}(\vec{r})=\delta_{\vec{k},\vec{k}'}\delta_{\alpha\alpha'}.$$

A dependência no tempo do segundo membro da equacão (3) está contida nos coeficientes $c_{\vec{k}\alpha}$. Substituindo a equação (3) na equação (2) conclui-se que satisfazem à equação

$$(7) \qquad \left(\frac{d^2}{dt^2}-\omega^2\right)c_{\vec{k}\alpha}(t)=0$$

onde

$$(8) \qquad \omega=kc$$

e k representa o módulo do vector $\vec{k}$. Sem perda de generalidade podemos escolher a seguinte solução da equação (7):

$$(9) \qquad c_{\vec{k}\alpha}(t)=c_{\vec{k}\alpha}(0)\,e^{-i\omega t}.$$

As várias grandezas associadas ao campo de radiação podem obter-se fàcilmente da equação (3). Em particular o hamiltoniano do campo dado pelo integral

$$(10) \qquad H=\frac{1}{2}\int(\vec{E}^2+\vec{B}^2)\,d^3r$$

no cubo de volume V, exprime-se, utilizando as equações (1), (3) e (6), pela relação

$$(11) \qquad H=2\sum_{\vec{k}}\sum_{\alpha}k^2\,c^*_{\vec{k}\alpha}(t)\,c_{\vec{k}\alpha}(t).$$

O desenvolvimento em série de Fourier do potencial vector, embora de natureza estritamente formal, sugeriu ideias muito fecundas. Comecemos por reparar que a equação (7) é análoga à equação do movimento de um oscilador harmónico clássico de frequência angular ω. Esta analogia torna-se ainda mais patente se utilizarmos as variáveis

$$(12) \qquad Q_{\vec{k}\alpha} = \frac{1}{c}(c_{\vec{k}\alpha} + c^*_{\vec{k}\alpha})$$

$$P_{\vec{k}\alpha} = -\frac{i\omega}{c}(c_{\vec{k}\alpha} - c^*_{\vec{k}\alpha})$$

que nos permitem escrever o hamiltoniano sob a seguinte forma;

$$(13) \qquad H = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} \frac{1}{2}(P^2_{\vec{k}\alpha} + \omega^2 Q^2_{\vec{k}\alpha}).$$

Desta relação obtém-se

$$(14) \qquad \frac{\partial H}{\partial Q_{\vec{k}\alpha}} = -\frac{\partial P_{\vec{k}\alpha}}{\partial t}, \quad \frac{\partial H}{\partial P_{\vec{k}\alpha}} = \frac{\partial Q_{\vec{k}\alpha}}{\partial t}$$

e portanto conclui-se que $P_{\vec{k}\alpha}$ e $Q_{\vec{k}\alpha}$ são variáveis canònicamente conjugadas. Estas equações têm a forma das equações de Hamilton onde $Q_{\vec{k}\alpha}$ e $P_{\vec{k}\alpha}$ desempenham o papel de coordenadas generalizadas da posição e momento. A equação (13) sugere que o campo de radiação se pode considerar como um conjunto de osciladores harmónicos independentes caracterizados por $\vec{k}$ e α e cujas variáveis dinâmicas conjugadas são combinações lineares ortogonais dos coeficientes do desenvolvimento em série de Fourier do potencial vector. Com base nesta descrição Rayleigh e Jeans, no fim do século passado, deduziram a distribuição da energia com a frequência da radiação num corpo negro atribuindo a cada oscilador uma energia média de KT onde K é a constante de Boltzmann e T a temperatura. Porém verificou-se que a lei obtida estava em desacordo com a experiência para grandes valores de ω qualquer que fosse a temperatura. Planck em 1901 começou por procurar uma fórmula empírica para a lei da radiação do corpo negro. A expressão que encontrou conduziu-o a conceber uma das ideias mais revolucionárias da ciência contemporânea: a energia de cada oscilador em lugar de ser uma quantidade arbitrária é um múltiplo inteiro $\hbar\omega$ onde $\hbar$ é uma constante universal.

É evidente que esta hipótese de natureza fundamental ultrapassa o formalismo que se desenvolveu acima apesar de, sob certos aspectos, ter sido sugerido por ele. Impunha-se a procura de um novo conceito de campo compatível com a hipótese de Planck.

Aqui convém abrir um parêntesis para considerar um oscilador harmónico unidimensional em mecânica quântica, ou mais precisamente, uma partícula de massa m com movimento segundo um eixo q, num potencial da forma $\frac{1}{2}\omega^2 m q^2$. O hamiltoniano da partícula é pois

$$(15) \qquad H = \frac{1}{2m}(p^2 + \omega^2 m^2 q^2)$$

onde q e p são respectivamente os operadores de posição e momento linear e satisfazem à equação

$$(16) \qquad qp - pq = i\hbar.$$

Em mecânica clássica q e p não são operadores e portanto comutam. Com base na equação (16) é possível concluir, depois de algumas contas, que o espectro de energia do oscilador harmónico quântico é dado por

$$(17) \quad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega, \quad n = 0, 1, 2, \cdots \infty.$$

Note-se que a propriedade dos níveis de energia do oscilador harmónico quântico serem equidistantes de $\hbar\omega$ conjuga-se perfeitamente com a hipótese de Planck acima referida. A aplicação da mecânica quântica ao problema do oscilador harmónico parece pois encaminhar-nos no bom sentido para fundamentar a hipótese de Planck.

Em 1927 Dirac guiado pelas analogias entre o campo de radiação e um conjunto de osciladores harmónicos independentes e apoiando-se na teoria quântica dessa época propôs que as variáveis P e Q canònicamente conjugadas, definidas na equação (12), se considerassem como operadores não comutáveis satisfazendo a equações análogas às que verificam os operadores q e p do oscilador harmónico unidimensional:

$$(18)\qquad \begin{aligned} &[Q_{\vec{k}\alpha}, P_{\vec{k}'\alpha'}] = i\hbar\,\delta_{\vec{k}\vec{k}'}\,\delta_{\alpha\alpha'}, \\ &[Q_{\vec{k}\alpha}, Q_{\vec{k}'\alpha'}] = [P_{\vec{k}\alpha}, P_{\vec{k}'\alpha'}] = 0, \end{aligned}$$

onde o comutador de duas variáveis A e B se representou por $[A, B]$,

$$AB - BA = [A, B].$$

Este foi o passo decisivo na construção da teoria quântica do campo de radiação. Consideremos as seguintes combinações lineares dos operadores P e Q:

$$(19)\qquad \begin{aligned} a_{\vec{k}\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega Q_{\vec{k}\alpha} + iP_{\vec{k}\alpha}), \\ a^+_{\vec{k}\alpha} &= \frac{1}{\sqrt{2\hbar\omega}}(\omega Q_{\vec{k}\alpha} - iP_{\vec{k}\alpha}) \end{aligned}$$

onde a^+ é o operador adjunto do operador a. Verifica-se fàcilmente a partir das equações (12) que os operadores a e a^+ são as variáveis análogas aos coeficientes de Fourier c e c^*, a menos de uma constante:

$$(20)\qquad c_{\vec{k}\alpha}(t) \to c\sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}}\,a_{\vec{k}\alpha}(t).$$

Estes operadores satisfazem às seguintes relações de comutação;

$$(21)\qquad \begin{aligned} &[a_{\vec{k}\alpha}, a^+_{\vec{k}'\alpha'}] = \delta_{\vec{k}\vec{k}'}\,\delta_{\alpha\alpha'}, \\ &[a_{\vec{k}\alpha}, a_{\vec{k}'\alpha'}] = [a^+_{\vec{k}\alpha}, a^+_{\vec{k}'\alpha'}] = 0 \end{aligned}$$

que se deduzem das equações (18) e (19). Nas equações (18) a (21) as componentes dos vectores $\vec{k}$ continuam a satisfazer às relações (5) e α para cada vector $\vec{k}$ toma os valores 1 e 2. É conveniente introduzir o operador

$$(22)\qquad N_{\vec{k}\alpha} = a^+_{\vec{k}\alpha}\,a_{\vec{k}\alpha}.$$

Representemos por $|n_{\vec{k}\alpha}>$ um vector próprio normalizado do operador $N_{\vec{k}\alpha}$ pertencente ao valor próprio $n_{\vec{k}\alpha}$:

$$(23)\qquad N_{\vec{k}\alpha}|n_{\vec{k}\alpha}> = n_{\vec{k}\alpha}|n_{\vec{k}\alpha}>.$$

Demonstra-se com base nas relações de comutação (21) que os valores próprios de $N_{\vec{k}\alpha}$ são os números inteiros não negativos,

$$(24)\qquad n_{\vec{k}\alpha} = 0, 1, 2, \cdots \infty$$

e ainda que os operadores a e a^+ satisfazem às equações,

$$(25)\qquad a_{\vec{k}\alpha}|n_{\vec{k}\alpha}> = \sqrt{n_{\vec{k}\alpha}}\,|n_{\vec{k}\alpha} - 1>,$$

$$(26)\qquad a^+_{\vec{k}\alpha}|n_{\vec{k}\alpha}> = \sqrt{n_{\vec{k}\alpha} + 1}\,|n_{\vec{k}\alpha} + 1>.$$

Voltemos de novo à interpretação física do formalismo que estamos a desenvolver. O que se fez de essencial foi considerar

P e Q como operadores em lugar de números. Porém, as vantagens deste passo não se manifestaram ainda. O hamiltoniano do «novo» campo obtém-se substituindo na equação (11) os coeficientes c e c^* pelos operadores a e a^+ de acordo com a relação (20):

$$H = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} a^+_{\vec{k}\alpha} a_{\vec{k}\alpha} \hbar\omega = \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} N_{\vec{k}\alpha} \hbar\omega .$$

Estabelecida uma correspondência biunívoca entre o conjunto dos números inteiros e positivos e o conjunto dos valores possíveis das quatro variáveis k_x, k_y, k_z e α os estados do campo são representados pelos vectores

$$(28) \quad |n_{\vec{k}_1\alpha_1}, n_{\vec{k}_2\alpha_2}, \cdots > = |n_{\vec{k}_1\alpha_1} > |n_{\vec{k}_2\alpha_2} > \cdots .$$

Na sucessão $\vec{k}_1\alpha_1, \vec{k}_2\alpha_2, \cdots$ estão incluídos todos os diferentes valores que $\vec{k}\alpha$ pode tomar.

De acordo com as equações (23), (27) e (28) estes vectores são vectores próprios do hamiltoniano do campo pois satisfazem à equação

$$(29) \quad H|n_{\vec{k}_1\alpha_1}, n_{\vec{k}_2\alpha_2}, \cdots > = $$
$$= \left(\sum_{i=1}^{\infty} n_{\vec{k}_i\alpha_i} \hbar\omega_i \right) |n_{\vec{k}_1\alpha_1}, n_{\vec{k}_2\alpha_2}, \cdots >$$

onde $\omega_i = k_i c$ para $i = 1, 2, 3, \cdots \infty$. A quantidade entre parêntesis no segundo membro desta equação é òbviamente a energia do campo quando ele se encontra no estado representado pelo vector (28). Consequentemente a energia do campo só pode variar de um modo discreto por saltos de $\hbar\omega_i$. A hipótese de Planck snrge-nos agora como um resultado da quantificação do campo de radiação.

Ao campo de radiação está associada uma partícula chamada fotão de massa nula e spin igual a um. O estado de um fotão fica caracterizado por $\vec{k}$ e α: $\hbar\vec{k}$ é o momento linear do fotão e α descreve o seu estado de polarização. Qual a energia de um fotão num estado $\vec{k}, \alpha$? Aplicando a equação relativista que relaciona a energia total de uma partícula com o seu momento linear, ao fotão obtém-se

$$(30) \quad E = \sqrt{m^2 c^4 + p^2 c^2} = p\,c = \hbar\,k\,c = \hbar\,\omega .$$

Esta equação permite interpretar os números $n_{\vec{k}\alpha}$. Visto a energia do campo num determinado estado ser a soma das energias dos fotões presentes nesse estado, da equação (29) conclui-se que $n_{\vec{k}_i\alpha_i}$ é o número de fotões no estado $\vec{k}_i\alpha_i$. Esta a razão porque se chama a $n_{\vec{k}\alpha}$ número de ocupação do estado $\vec{k}\alpha$. O estado do campo de radiação fica completamente caracterizado pelos números de ocupação $n_{\vec{k}_i\alpha_i}$ $(i = 1, 2, \cdots \infty)$. O estado do campo em que apenas existe um fotão $\vec{k}_1\alpha_1$ corresponde evidentemente a $n_{\vec{k}_1\alpha_1} = 1$ e é representado pelo vector $|1000\cdots>$. A energia deste estado é $\hbar\omega_1$, de acordo com a equação (29).

A interpretação física dos operadores a e a^+ é agora imediata com base nas equações (25) e (26): $a^+_{\vec{k}\alpha}$ e $a_{\vec{k}\alpha}$ são respectivamente operadores de criação e aniquilação de fotões $\vec{k}\alpha$.

O formalismo da quantificação do campo de radiação permite fazer o estudo rigoroso de grande número de fenómenos. São exemplos importantes a emissão e absorção de fotões por átomos e núcleos atómicos.

As equações de Maxwell continuam válidas na teoria quântica do campo electromagnético? De acordo com as equações (3) e (20) o potencial vector do campo de radiação é

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \frac{1}{\sqrt{V}} \sum_{\vec{k}} \sum_{\alpha} c \sqrt{\frac{\hbar}{2\omega}} \cdot$$

$$\cdot [a_{\vec{k}\alpha}(t)\, \vec{u}_{\vec{k}\alpha}(\vec{r}) + a^{+}_{\vec{k}\alpha}(t)\, \vec{u}^{*}_{\vec{k}\alpha}(\vec{r})]$$

As componentes deste vector, em lugar de funções reais de x, y, z e t são operadores. Os operadores vectoriais $\vec{E}$ e $\vec{B}$ obtêm-se a partir de $\vec{A}$ utilizando as equações (1) e as suas componentes podem não comutar. Por exemplo demonstra-se que

$$E_x(\vec{r},t)\,B_y(\vec{r}\,',t) - B_y(\vec{r}\,',t)\,E_x(\vec{r},t) =$$
$$= i c \hbar \frac{\partial}{\partial z} \delta(\vec{r} - \vec{r}\,')$$

onde δ representa a função de Dirac. Sob o ponto de vista físico isto significa que não é em geral possível obter valores de precisão tão grande quanto se queira numa medição simultânea de $\vec{E}$ e $\vec{B}$. Se prosseguíssemos poderia começar a parecer que o preço da quantificação do campo é muito elevado devido à relativa complexidade do seu formalismo e ao número de fenómenos peculiares que implica. A quantificação do campo permite uma descrição mais detalhada de certos fenómenos porém essa descrição deve aproximar-se daquela que já conhecíamos se não estivermos interessados no «detalhe». Por outras palavras: em que condições podemos utilizar as equações de Maxwell na sua interpretação clássica sem grandes preocupações? Essencialmente quando o número de fotões correspondentes a uma onda electromagnética de comprimento de onda λ num volume $(\lambda/2\pi)^3$ for muito maior do que 1. Por exemplo para uma estação de rádio que emite na frequência de 98.7 Mc ($\lambda/2\pi \simeq 48$ cm) com uma potência de 135 kW o número de fotões num volume $(\lambda/2\pi)^3$ a cerca de 5 milhas da antena é aproximadamente 10^{17}. Por outro lado é evidente que existem hoje em dia domínios da física nos quais é indispensável utilizar o formalismo da quantificação do campo.

Mencionou-se apenas a quantificação do campo electromagnético de radiação. Porém, para outro tipo de campo o processo de quantificação utiliza essencialmente as mesmas ideias fundamentais. Se considerássemos o campo nuclear a sua quantificação levar-nos-ia a falar dos mesões que são os quanta desse campo. Os números de ocupação $n_{\vec{k}\alpha}$ para fotões podem tomar qualquer valor inteiro. Isto é podemos ter qualquer número de fotões num certo estado $\vec{k}\alpha$. As partículas com esta propriedade chamam-se bosões e satifazem à estatística de Bose-Einstein. Existem na natureza outras partículas cujos números de ocupação apenas podem tomar os valores 0 e 1, o que significa não poder existir mais de uma partícula num certo estado. Estas partículas denominam-se fermiões e satisfazem à estatística de Fermi-Dirac. São exemplos os electrões, protões e neutrões. De acordo com a teoria quântica relativista dos campos as partículas com spin semi-inteiro são fermiões e as partículas com spin inteiro bosões.

BIBLIOGRAFIA

A. MESSIAH, *Mecanique Quantique,* Vol. II.
P. A. M. DIRAC, *The Principles of Quantum Mechanics.*
J. J. SAKURAI, *Advanced Quantum Mechanics.*
F. MANDL, *Introduction to Quantum Field Theory.*
W. HEITLER, *The Quantum Theory of Radiation.*