GAZETA DE FÍSICA

Fundador: ARMANDO GIBERT

Vol. IV, Fasc. 4 Abril de 1963

O ensino elementar da Cinemática por meio de gráficos

Em 1956, um grupo de professores americanos, universitários e do ensino médio, resolveu organizar e publicar um curso de Física destinado à iniciação desta ciência. Designa-se esse grupo por *Physical Science Study Committee* (PSSC) e é constituído por algumas das maiores notabilidades que exercem o ensino da Física nos Estados Unidos ou que estão interessadas no seu desenvolvimento. Dentre eles avultam, pela sua categoria profissional e pela intervenção permanente e superior que tiveram na organização deste curso, os professores Jerrold R. Zacharias e Francis L. Friedman, ambos do Departamento de Física do Instituto de Tecnologia de Massachusetts.

A elaboração do curso, a sua planificação, os ensaios a que foi sujeito, a sua discussão, a redacção do texto, consumiram quatro anos de trabalho e exigiram a colaboração de centenas de especialistas, na sua maioria professores, a que se juntaram investigadores, fotógrafos e desenhadores.

O curso foi escrito, modificado, novamente escrito, e assim seguidamente, em sucessivas redacções, até se considerar excelente. Antes de publicado foi experimentado em 1500 escolas dos Estados Unidos sobre uma totalidade de 80 000 alunos.

Deste trabalho, sério e monumental, resultou a obra intitulada *Physics* editada por D. C. Heath and Company, Boston, Massachusetts, com 700 páginas de grande formato, primorosamente ilustrada (1).

Independentemente desta obra, mas em complemento dela, foi também publicado um Guia de Laboratório que acompanha a exposição do texto.

É claro que um livro organizado em condições tão excepcionais tem que ser necessàriamente bom. E é. Pelo seu aspecto torna-se um prazer lê-lo, e pelo seu conteùdo é uma permanente fonte de sugestões didácticas e de esclarecimentos e ensinamentos de toda a ordem.

Apesar de todas as excelências, inegáveis, não podemos subtrair-nos, nalguns passos da sua leitura, a certa surpresa não só no tratamento de alguns pormenores como na própria planificação do trabalho. Sem dúvida que o nosso ambiente pedagógico é notàvelmente distinto do correspondente americano e que a essa diferença se pode atribuir certo grau daquela referida surpresa. Contudo, mesmo esforçando-nos por entender o ambiente em que esse ensino decorrerá, ficamos indecisos sobre a validade de algumas atitudes didácticas.

A surpresa que sentimos torna-se mais relevante na apreciação dos conhecimentos matemáticos que o ensino da Física exige.

---

(1) Há edição, em língua espanhola, da Editorial Reverté.

Entende-se que uma iniciação da Física, embora com características tão acentuadamente práticas e experimentais como estas, exija certa preparação matemática e, na verdade, abundam em todo o curso as expressões matemáticas e as aplicações numéricas. A leitura do texto, porém, deixa a impressão de que o estudante vai adquirindo os conhecimentos matemáticos à medida que necessita deles e que não tem nenhuma preparação nesse sentido mesmo ao nível elementar. Por exemplo, logo de início, ao tratar-se das medidas de tempo (cap. 2.º, § 7), indica-se, a propósito, quantos segundos decorreram, até hoje, desde que apareceu o primeiro animal sobre a superfície sólida da Terra. Esse número de segundos corresponde a 12 seguido de quinze zeros. Após isto diz-se quanto tempo leva um raio de luz a atravessar o vidro de uma janela, o que corresponde a uma fracção de segundo cujo numerador é 1, e o denominador o algarismo 1 seguido de onze zeros. Dir-se-ia que o motivo por que os autores da obra apresentam estes exemplos fosse o de provocarem uma oportunidade para ensinarem as potências de 10. Realmente, em pouco mais de uma página ensinam, como se fosse a primeira vez que os alunos recebessem tais conhecimentos, as potências de 10 de expoente positivo e negativo, a multiplicação e divisão dessas potências e a soma de produtos em que um dos factores é uma potência de 10.

Oito páginas adiante estão os autores estudando as medidas de comprimento, ensinando a avaliar distâncias por triangulação. Supondo que querem medir a largura de um rio (Cap. 3.º, § 2), constroem dois triângulos convenientes recorrendo à relação de proporcionalidade directa entre os lados homólogos. Conclui-se, portanto, que os estudantes já conhecem essas regras, como seria admissível, visto não estarem ali expostas. Apesar disso, é a seguir, no Cap. 4.º, § 1, que se vai explicar o que é uma proporcionalidade directa em termos tão minuciosos como se os estudantes desconhecessem o assunto por completo.

Ultrapassando repentinamente a elementaridade destes conhecimentos, já vamos encontrar, pouco mais adiante, o conceito de «velocidade de um móvel num dado instante», com a expressão matemática $v = \lim\limits_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta d}{\Delta t}$. Num intervalo de 26 páginas vai-se da apresentação da proporcionalidade directa à noção de limite, o que é surpreendente, acentuando que as 26 páginas não são de exposição matemática mas de Física onde, de longe em longe, surge um recurso à Matemática.

Da leitura deste curso interessou-nos especialmente o estudo da Cinemática todo baseado em representações gráficas. Encontrámos-lhe vários pormenores de que discordámos e que seria fastidioso e inútil apontar. Confunde-se, por exemplo, a distância percorrida por um móvel durante um certo intervalo de tempo, com a distância a que o móvel se encontra do ponto de partida, ao fim desse mesmo tempo (caso da figura 15 no Cap. 5.º).

A leitura desse capítulo despertou-nos o gosto de redigir as páginas que se seguem, aproveitando a linha geral da exposição do curso americano e adaptando-a ao nosso modo de expôr. À margem do horário das aulas do Liceu em que trabalhamos, reunimos um grupo de alunos bem dotados, do 6.º ano, e fizemos-lhes uma lição dentro destes moldes, que nos pareceu proveitosa. É o que apresentaremos na continuação.

A) *Estudo dos gráficos espaço-tempo*

1. Quando um corpo se desloca mantendo sempre o mesmo valor numérico da velocidade dizemos que o seu movimento é *uniforme*; no caso contrário dizemos que é *variado*.

Falemos primeiro do movimento uniforme.

Se formos de automóvel e virmos que, durante um longo trajecto, o ponteiro do marcador das velocidades indica *sempre* 60 km/h, saberemos que o nosso carro se desloca com movimento uniforme e que, se assim se mantivesse, andaria 60 km em cada hora, 30 km em meia hora, 15 km em um quarto de hora, 1 km em cada minuto, e ser-nos-ia sempre fácil saber que espaço percorreria num dado intervalo de tempo, e também quanto tempo gastaria para andar um certo percurso. Quando um movimento é uniforme não há dificuldade em resolver tais problemas porque, por ser uniforme, os espaços percorridos hão-de ser directamente proporcionais aos tempos gastos em percorrê-los. Representando por e qualquer espaço percorrido, e por t o tempo gasto em percorre-lo, os valores de e serão directamente proporcionais aos valores de t, o que se exprime escrevendo

$$\frac{e}{t} = \text{constante}$$

Esta constante, cujo valor se obtém dividindo o espaço andado pelo tempo gasto, é exactamente a velocidade de que o móvel vai animado. Se a representarmos por v escreveremos

$$\frac{e}{t} = v$$

ou então

$$e = v\,t$$

que chamaremos *equação do espaço andado por um corpo com movimento uniforme*

Quanto maior for o valor de t, maior será, evidentemente, o respectivo valor de e.

2. Podemos fazer a representação gráfica desta equação (fig. 1) traçando dois eixos coordenados rectangulares, marcando num deles os valores dos espaços percorridos (e) e no outro os valores dos tempos gastos em percorrê-los (t).

Suponhamos que o corpo considerado percorria 50 m em 1 minuto, 100 m em 2 minutos, 150 m em 3 minutos, e que assim continuava, nesse ritmo, com movimento uniforme. A linha representativa do movimento seria a recta OA. (O ponto O, que é a origem das coordenadas, corresponde a $t = 0$ e a $e = 0$, o que significa que o corpo, no instante «zero», isto é, no momento em que se iniciou a contagem do tempo, ainda não tinha começado a mover-se).

Concluiremos que *o gráfico espaço-tempo de um movimento uniforme é uma linha recta.*

3. Se quisermos conhecer o valor da velocidade de que o móvel vai animado também o gráfico nos poderá informar. Bastará olhar para ele para vermos imediatamente

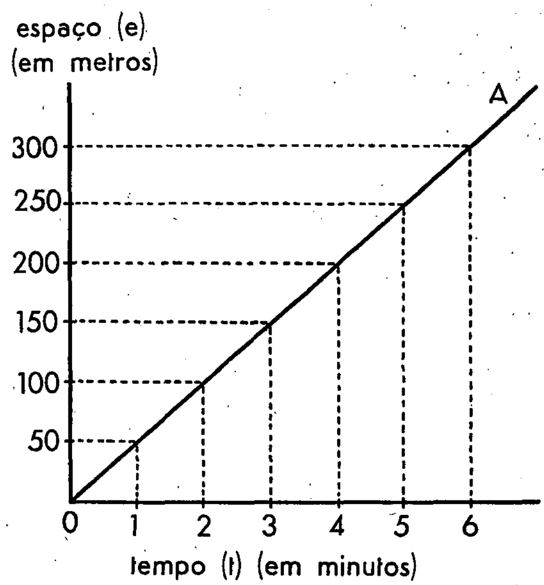

Fig. 1

que o móvel andou 50 m em 1 minuto e que, portanto, a sua velocidade vale 50 metros por minuto (50 m/min). Mas poderiamos chegar ao mesmo resultado servindo-nos de outros valores inscritos nos eixos coordenados. Por exemplo: entre os tempos 3 e 5 (ou seja, 2 minutos) o móvel andou um percurso compreendido entre 150 m e 250 m (ou seja, 100 m). A sua velocidade é, portanto, de 100 metros em 2 minutos, ou seja 50 m/min, como já sabíamos.

O cálculo da velocidade pode ser feito recorrendo a quaisquer dois pontos da recta OA. Repare-se na figura 2 em que repetimos o mesmo gráfico da figura 1 mas sem traçarmos as linhas que serviram para determinar os pontos da recta OA. Marcámos, nessa linha, dois pontos quaisquer, P e Q, e a partir deles vamos calcular a velocidade do móvel.

Para isso tracemos os segmentos PR e QR respectivamente paralelos aos eixos t e e.

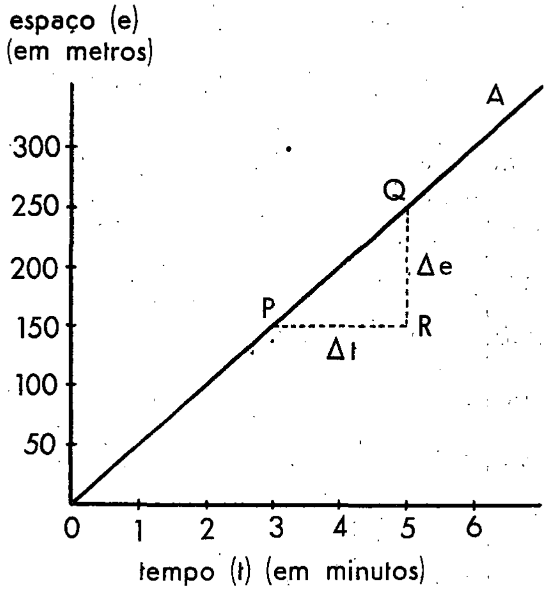

Fig. 2

O segmento QR corresponde a um certo espaço (250m—150m) que representaremos, em geral, por Δe (delta e); o segmento PR corresponde ao intervalo de tempo (5min—3min) gasto em percorrer o espaço Δe. Representêmo-lo por Δt (delta t). A velocidade do móvel será dada, em geral, pelo quociente $\frac{\Delta e}{\Delta t}$ (que neste caso, é igual a 50 m/min) (1). Poderíamos assim escrever:

$$v = \frac{\Delta e}{\Delta t}.$$

4. A razão entre os segmentos QR e PR (ou seja, entre Δe e Δt) é aquilo a que costuma chamar-se o *declive* da recta (OA). Numa rua ou numa estrada que sobe é costume falar-se em declive para dar a entender se a inclinação da subida é muito ou pouco acentuada. Quando percorremos uma rampa, passando de um nível inferior para outro superior, subimos um tanto na vertical e avançamos um tanto na horizontal. Quem subisse uma rampa que fosse representada pela recta OA da figura 2, e caminhasse desde P até Q, quando chegasse a Q teria subido o comprimento Δe na vertical e avançado o comprimento Δt na horizontal. O declive da rampa seria dado pelo quociente $\frac{\Delta e}{\Delta t}$.

Concluimos que no gráfico da equação do movimento uniforme $e = v t$, *o declive da recta representativa indica a velocidade do móvel.*

5. Com os conhecimentos que já adquirimos será fácil interpretar o movimento representado no gráfico da figura 3. Significa

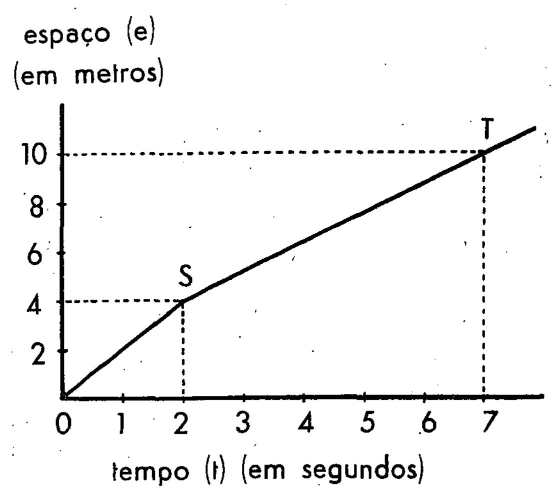

Fig. 3

que um certo móvel percorreu 4 metros em 2 segundos, com movimento uniforme de velocidade igual a 2 m/s $\left(= \frac{4\,\text{m}}{2\,\text{s}}\right)$, e que ao fim desses 2 segundos mudou a velocidade

(1) O símbolo Δe representa, em geral, uma diferença de espaços percorridos; e o símbolo Δt uma diferença de tempos gastos.

constante, que levava, para outro valor passando a percorrer $10\,\mathrm{m} - 4\,\mathrm{m} = 6\,\mathrm{m}$ em $7\,\mathrm{s} - 2\,\mathrm{s} = 5\,\mathrm{s}$. Agora a sua velocidade, também constante durante essa parte do trajecto, valia $1{,}2\,\mathrm{m/s}$ $\left(= \frac{6\,\mathrm{m}}{5\,\mathrm{s}}\right)$.

Bastaria reparar em que o segmento ST faz, com o eixo dos tempos, um ângulo menor do que o segmento OS, para se concluir que a velocidade correspondente a ST era menor do que a correspondente a OS. Como o declive dos dois segmentos é diferente conclui-se que o movimento foi executado com velocidades diferentes. A maior velocidade corresponde ao declive maior.

6. Observemos agora o gráfico da figura 4. Que significará?

Significa que um certo móvel começou a deslocar-se com movimento uniforme percor-

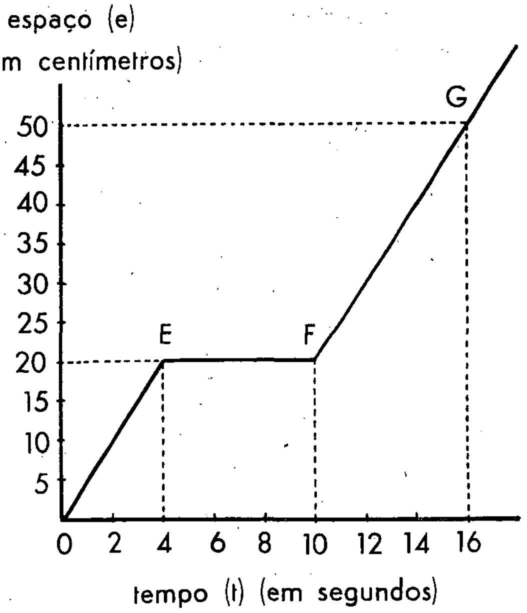

Fig. 4

rendo 20 cm em 4 s, com a velocidade constante de $5\,\mathrm{cm/s}$ $\left(= \frac{20\,\mathrm{cm}}{4\,\mathrm{s}}\right)$ (segmento OE). Ao fim de 4 segundos parou (ponto E) e *esteve parado* durante 6 segundos ($= 10\,\mathrm{s} - 4\,\mathrm{s}$).

Realmente o segmento EF significa que o móvel esteve parado visto ser paralelo ao eixo dos tempos, isto é, enquanto o tempo decorreu desde 4 segundos até 10 segundos, o espaço percorrido manteve-se constante (20 cm em E, ou em F, ou em qualquer ponto de EF). O móvel esteve, portanto, parado. Ao fim de 10 segundos voltou a andar e percorreu então 30 cm ($= 50\,\mathrm{cm} - 20\,\mathrm{cm}$) em 6 s ($16\,\mathrm{s} - 10\,\mathrm{s}$), com movimento uniforme de velocidade constante igual a $5\,\mathrm{cm/s}$ $\left(= \frac{30\,\mathrm{cm}}{6\,\mathrm{s}}\right)$. Quer dizer que o móvel retomou o seu movimento exactamente com a mesma velocidade que tivera antes, o que aliás se concluía imediatamente do gráfico por o segmento FG ser paralelo a OE, isto é, por o declive de FG ser o mesmo de OE.

7. Consideremos agora o caso representado na fig. 5. Aí as grandezas cujos valores estão assinalados nos eixos coordenados continuam a ser o espaço e o tempo, mas a linha (L) traçada já não é recta nem poligonal. É curva.

Se a linha é curva isso significará que o movimento de que se trata não é uniforme, isto é, a velocidade não tem valor constante. De facto vê-se, por exemplo, no gráfico que o móvel andou 12 km em 10 minutos, mas que, em 30 minutos, que é triplo do intervalo de tempo, não andou o triplo do espaço, que seria 36 km. Andou 20 km.

Concluiremos que *um movimento é variado quando o seu gráfico espaço-tempo for uma linha curva.*

8. Se o movimento representado na fig. 5 é variado poderemos perguntar quanto valerá, por exemplo, a sua velocidade correspondente ao ponto A? Talvez, depois do que dissemos, haja a tentação de responder que vale $\frac{12\,\mathrm{km}}{10\,\mathrm{min}}$, ou seja $72\,\mathrm{km/h}$, mas fàcilmente se perceberá que não é assim. O que o gráfico informa é que o móvel andou 12 km em 10 minutos mas isso não quer dizer, de modo nenhum, que ao fim dos 10 minutos a sua velocidade fosse de $\frac{12\,\text{km}}{10\,\text{min}}$, isto é, 72 km/h. Se o automóvel em que passeamos gastar uma hora para percorrer 50 km, por

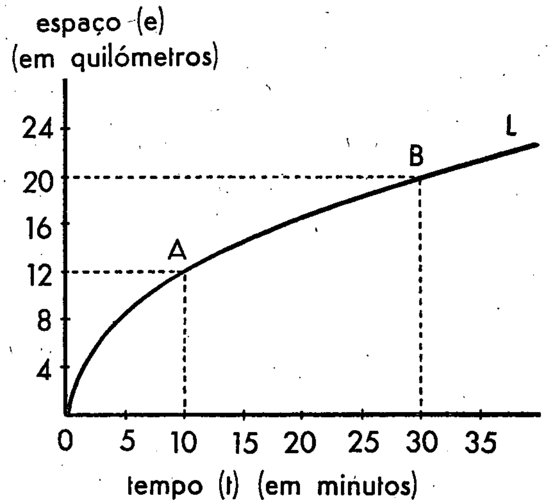

Fig. 5

exemplo, isto não significa que ao fim de uma hora o marcador das velocidades esteja indicando 50 km/h. O nosso automóvel teria andado umas vezes mais depressa, outras vezes mais devagar, conforme as conveniências e as necessidades, mas, no total, teria percorrido 50 quilómetros em 1 hora. Num caso destes diremos que a *velocidade média* do automóvel foi de 50 km/h, o que não significa que andasse 50 km em 1 hora, nem 25 km em meia hora nem 5 km em 6 minutos.

Chamamos *velocidade média* à velocidade *(constante)* com que um corpo deveria percorrer um certo espaço, *com movimento uniforme,* para gastar o mesmo tempo que realmente gastou percorrendo esse espaço com a sua velocidade variável, conforme era.

Assim, voltando ao gráfico da fig. 5 e verificando que o ponto A corresponde a um espaço *total* de 12 km percorrido num tempo *total* de 10 minutos, podemos concluir que a velocidade *média* do móvel durante esse intervalo de tempo vale $\frac{12\,\text{km}}{10\,\text{min}}$, ou seja 72 km/h. O que não sabemos é quanto vale a velocidade no instante correspondente ao ponto A, isto é, 10 minutos depois de ter iniciado o movimento.

Na fig. 6 repetimos o gráfico da fig. 5 e acrescentámos apenas um segmento de recta que vai de O a A, para mostrarmos que, se o móvel percorresse os 12 km em 10 minutos *com movimento uniforme,* o gráfico espaço-tempo seria esse segmento de recta OA. A velocidade *constante* do móvel seria dada por $\frac{\Delta e}{\Delta t} = 72\,\text{km/h}$. Esse seria o valor da *velocidade média* do movimento variado de que estamos tratando, relativo àquele intervalo de tempo.

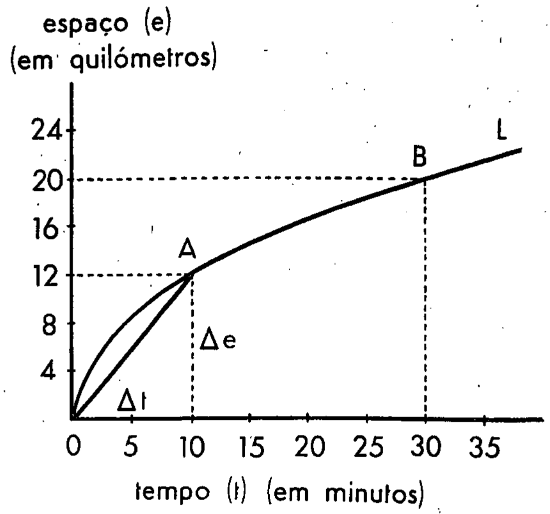

Fig. 6

9. Mas não será possível conhecer realmente a velocidade que o móvel tem em qualquer instante, relativamente ao ponto A ou a B, ou a outro qualquer, por intermédio do gráfico? Vamos ver que é.

Na fig. 7 voltámos a repetir o gráfico das figs. 5 e 6 e vamos de novo considerar o mesmo ponto A da curva traçada. A questão posta é esta: quanto valerá a velocidade do móvel no instante correspondente ao ponto A?

Para tentarmos responder à pergunta marcámos no gráfico dois pontos, P e Q, de maneira que A ficasse entre eles (sem ser necessário que ficasse ao meio) e unimos PQ por um segmento de recta. Podemos afirmar, de acordo com o que dissemos anteriormente, que o declive desse segmento de recta PQ representa a *velocidade média* do móvel no intervalo de tempo que decorreu entre 5 minutos e 15 minutos. Nesses 10 minutos de intervalo ($=15\,\text{min}-5\,\text{min}$) o móvel percorreu $6{,}2\,\text{km}\;(=14{,}5\,\text{km}-8{,}3\,\text{km})$[1].

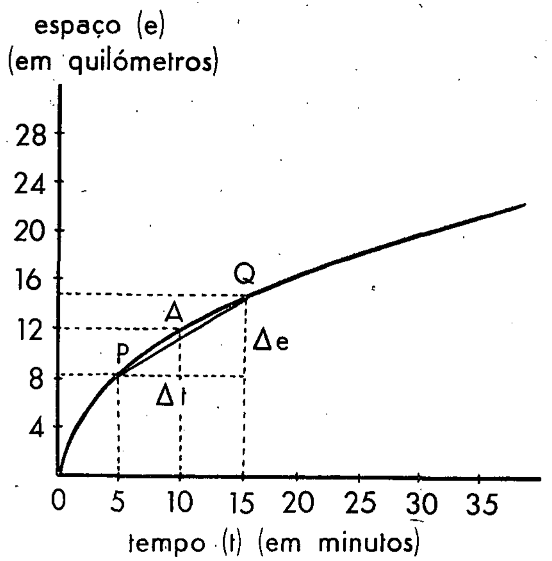

Fig. 7

A sua velocidade média $\left(\dfrac{\Delta e}{\Delta t}\right)$ foi de $\dfrac{6{,}2\,\text{km}}{10\,\text{min}}$, ou seja de $37{,}2\,\text{km/h}$.

Este valor nada nos diz, porém, a respeito da velocidade no momento correspondente ao ponto A porque, em 10 minutos de intervalo, podiam-se ter dado grandes variações de velocidade, embora a média ficasse nos $37{,}2\,\text{km/h}$. No instante correspondente a A a velocidade poderia ter sido superior a $37{,}2\,\text{km/h}$, ou inferior, ou até, por mero acaso, igual a esse valor.

(1) Os valores 14,5 km e 8,3 km não estão assinalados no gráfico mas determinam-se fàcilmente por comparação com os comprimentos dos segmentos que aí estão marcados.

Mas suponhamos que em vez de um intervalo de 10 minutos tinha considerado um intervalo de 10 segundos, isto é, tinha escolhido os pontos P e Q em lugares mais próximos de A, intervalados apenas de 10 segundos. O quociente $\dfrac{\Delta e}{\Delta t}$, correspondente a esse intervalo mais apertado (que seria o declive do novo segmento PQ), também não nos diria qual era o valor da velocidade relativa ao instante A mas não deveria estar muito afastado desse valor por que a variação da velocidade durante 10 segundos tem probabilidades de ser menor do que durante 10 minutos.

Mas consideremos o intervalo de tempo ainda mais pequeno, de décimos de segundo, de centésimos de segundo, de milésimos de segundo, tão pequeno quanto quisermos. Se marcássemos os dois pontos P e Q, ficando A entre eles, correspondentes a um intervalo de 1 milésimo de segundo (marcado no eixo dos tempos), a velocidade média respectiva $\left(\dfrac{\Delta e}{\Delta t}\right)$ não seria ainda, rigorosamente, a velocidade no instante relativo a A, mas deveria diferir tão pouco dela que, sem grande erro, poderíamos tomar uma coisa pela outra.

Sendo assim, a velocidade do móvel num dado instante (serve de exemplo o instante correspondente ao ponto A) pode-se calcular, com pequeníssimo erro, calculando a velocidade média $\left(\dfrac{\Delta e}{\Delta t}\right)$ do móvel num intervalo de tempo (Δt) muitíssimo pequeno, no qual esteja contido o instante considerado. O erro será tanto menor quanto mais pequeno for o intervalo Δt, isto é, quanto mais o valor de Δt se aproximar de zero.

Estas palavras traduzem-se matemàticamente da seguinte forma simbólica:

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta e}{\Delta t}$$

que significa que *a velocidade* (v) *de um móvel num dado instante* (quando o movimento é variado) é igual ao limite (lim) para que tende a velocidade média $\left(\frac{\Delta e}{\Delta t}\right)$ do móvel, correspondente a um intervalo de tempo (Δt) (onde está incluído o instante considerado), quando se faz tender êsse intervalo para zero ($\Delta t \rightarrow 0$).

10. Esta *velocidade num dado instante* também pode ter a sua representação gráfica, como vamos ver.

Olhemos de novo para o gráfico da figura 7 e notemos que o segmento de recta PQ se distingue bem do arco PQ. Se, porém, tomássemos os pontos P e Q muito próximos de A já o segmento de recta não se distinguiria, com facilidade, do respectivo arco, o que significava, fìsicamente, que não haveria grande erro em substituir o movimento variado, que o corpo tinha, nesse intervalo de tempo, por um movimento uniforme cuja velocidade (então constante) fosse a velocidade média relativa ao intervalo PQ. No *limite*, apertando cada vez mais o intervalo Δt, isto é, fazendo tender Δt para zero ($\Delta t \rightarrow 0$), os pontos P, Q e A confundir-se-iam num só, e a linha recta que contivesse o segmento PQ passaria a tocar num só ponto da curva, que seria o ponto A. Por outras palavras: a linha recta que contivesse o segmento PQ tornar-se-ia então tangente à curva no ponto A. *O declive dessa tangente seria a velocidade no instante considerado.*

Assim se torna possível determinar, por meio do gráfico, a velocidade em qualquer instante.

11. Apliquemos os conhecimentos adquiridos ùltimamente a um outro exemplo. Suponhamos que nos apresentam o gráfico espaço-tempo representado pela curva L da figura 8. Pergunta-se: O movimento de que se trata será uniforme ou variado? É variado porque o gráfico é uma linha curva.

A velocidade do móvel variou sempre em todo o movimento ou teria tido valor constante durante algum intervalo de tempo? Variou sempre porque o gráfico não apresenta nenhuma porção rectilínea.

Qual foi o valor da velocidade média do móvel *durante* as primeiras 5 horas de movimento? Foi de $\frac{220\text{ km}}{5\text{ h}}$, ou seja, de 44 km/h.

Qual seria o valor da velocidade do móvel ao fim dessas 5 horas de movimento, isto é, a velocidade *nesse próprio instante*?

Para responder à pergunta traça-se uma recta (T) tangente à curva no ponto (P)

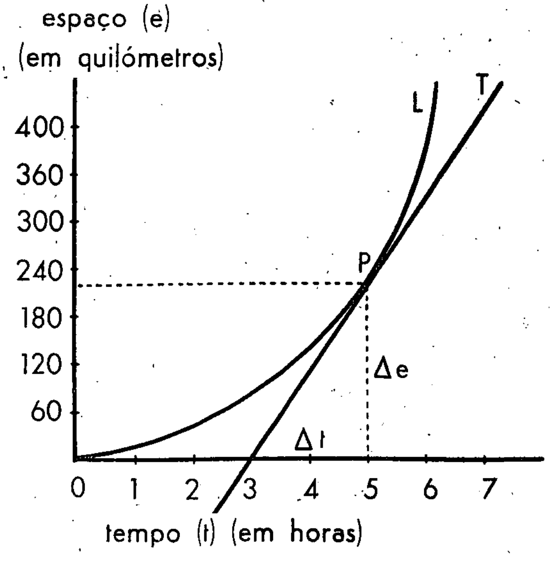

Fig. 8

correspondente a esse instante. A velocidade nesse instante será dada pelo declive dessa tangente. Como a figura mostra esse declive $\left(\frac{\Delta e}{\Delta t}\right)$ vale $\frac{220\text{ km}}{5\text{ h}-3\text{ h}}=\frac{220\text{ km}}{2\text{ h}}=110\text{ km/h}$.

A velocidade no instante correspondente ao fim das 5 horas, valia 110 km/h.

B) Estudo dos gráficos velocidade-tempo

12. Os valores marcados em qualquer dos gráficos anteriores representam espaços percorridos e tempos gastos em percorrê-los, mas também poderemos traçar gráficos em que as grandezas representadas sejam as velocidades dos móveis e os tempos gastos em adquiri-las (assim como as velocidades adquiridas e os espaços percorridos).

Observemos o gráfico da figura 9. No eixo das ordenadas inscreveram-se valores da velocidade de um móvel expressos em quilómetros por hora; no eixo das abcissas

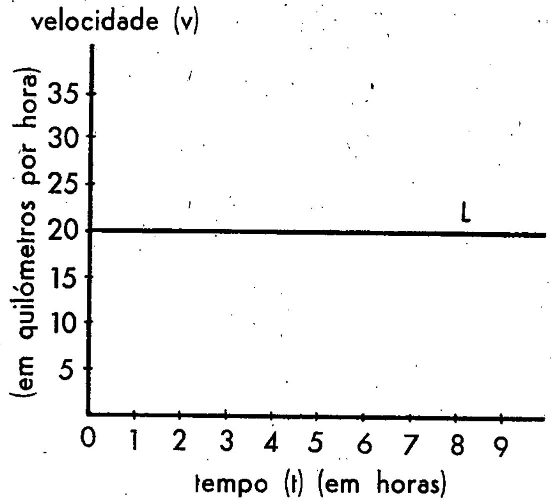

Fig. 9

marcaram-se os valores dos tempos decorridos expressos em horas. Nestas condições que significa a linha L? Significa que à medida que o tempo decorreu, a velocidade do móvel manteve sempre o mesmo valor, que foi de 20 km/h. O movimento a que se refere o gráfico é, portanto, uniforme [1].

Conclusão: *o gráfico velocidade-tempo representa um movimento uniforme quando a linha traçada for paralela ao eixo dos tempos.*

13. Consideremos dois pontos A e B situados nessa linha L (fig. 10). O segmento AB assim definido representa um intervalo de tempo (Δt) correspondente a 3 horas ($= 7\,\text{h} - 4\,\text{h}$).

Tracemos os segmentos AA' e BB' perpendiculares ao eixo dos tempos. Esses segmentos representam a velocidade v, constante, do móvel (20 km/h).

Ficou assim traçado na figura um rectângulo ($ABB'A'$) cujos lados consecutivos medem v e Δt. A superfície da área deste rectângulo vale $v \cdot \Delta t$. Como o produto da velocidade (v) do móvel pelo tempo decorrido (Δt) dá o valor do espaço (Δe) que foi percorrido durante esse tempo com movimento uniforme (§ 1), concluímos que *o gráfico velocidade-tempo* nos *permite conhecer o valor dos espaços andados, por meio da medida de superfícies.*

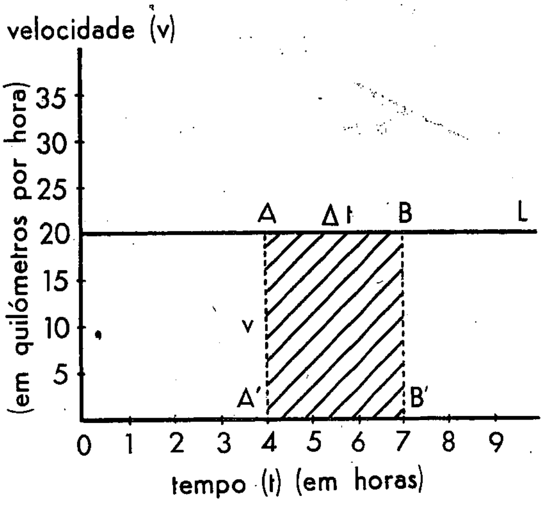

Fig. 10

14. Estudemos agora o gráfico velocidade-tempo da figura 11. Que significa? Significa que à medida que o tempo decorreu, a velocidade do móvel foi aumentando. Ao fim de 1 h a velocidade valia 5 km/h; ao fim de 2 h valia 10 km/h; ao fim de 3 h valia 15 km/h, etc. Como a velocidade do móvel foi sempre aumentando diz-se que o movimento é acelerado.

Este movimento acelerado tem ainda uma particularidade notável: é que a sua velocidade aumenta regularmente, isto é, aumenta

[1] Repare-se em que, no gráfico, à abcissa de valor zero corresponde a ordenada de valor 20 km/h, o que não quer dizer que o móvel *começasse a mover-se* à velocidade de 20 km/h. Isso não seria possível porque, por mais depressa que arrancasse, sempre teria de ir da velocidade inicial zero à velocidade 20 km/h. O que significa é que no momento em que se começou a contar o tempo (momento zero) a velocidade do móvel valia 20 km/h.

sempre o mesmo ao fim de intervalos de tempo iguais. Por este motivo se chama *uniformemente acelerado.*

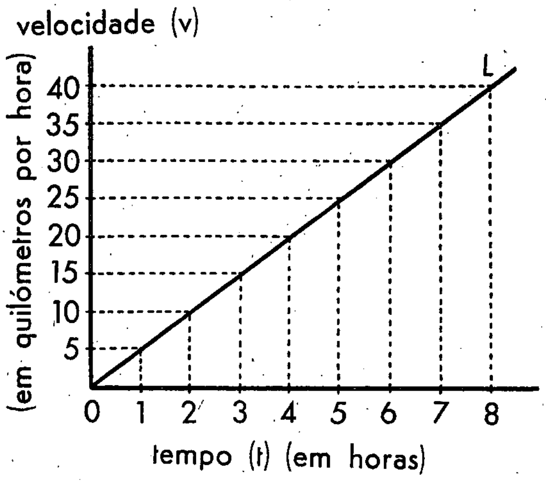

Fig. 11

15. Também podemos conhecer, por meio do gráfico, qual é o aumento de velocidade que o móvel sofre durante um intervalo de tempo qualquer.

Observemos a figura 12, que é repetição da anterior. Na linha L marcámos dois pontos A e B correspondentes aos instantes 3 h e 5 h, nos quais as velocidades valem respectivamente 15 km/h e 25 km/h. No intervalo $\Delta t = 2\,\text{h}$ $(= 5\,\text{h} - 3\,\text{h})$, a velocidade do móvel aumentou de

$$\Delta v = 10\,\text{km/h}\ (= 25\,\text{km/h} - 15\,\text{km/h})\,.$$

Reparemos em que, sendo L uma recta, o quociente $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ pode servir para indicar o seu *declive*, conforme já estudámos no § 4, figura 2, a propósito de um caso semelhante. Quaisquer que fossem os pontos A e B que tivessemos marcado na recta L da figura 12 que estamos considerando, o quociente $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ teria sempre o mesmo valor, isto é, seria constante pois o declive da recta é constante. Para outros pontos os valores de Δv e de Δt poderiam ser diferentes mas o seu quociente $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ é que valeria sempre o mesmo.

No caso da figura o seu valor seria (escolhendo os pontos A e B que aí estão marcados) $\dfrac{10\,\text{km/h}}{2\,\text{h}}$, ou seja 5 km/h/h. Este valor significa que a velocidade do móvel aumenta 5 km/h em cada hora.

O quociente $\dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ que indica o aumento de velocidade (5 km/h, neste exemplo) que um móvel sofre em cada unidade de tempo (1 hora, neste exemplo) chama-se *aceleração* e costuma-se representar pela letra j. Assim:

$$j = \frac{\Delta v}{\Delta t}\,.$$

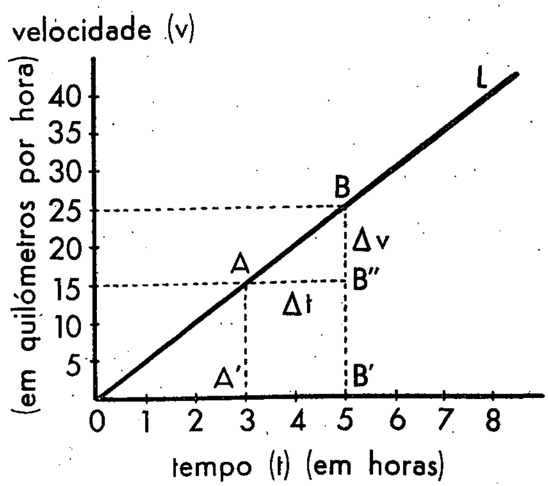

Fig. 12

Conclusão: No movimento uniformemente acelerado, o aumento de velocidade que o móvel sofre por unidade de tempo é constante e designa-se por «aceleração do movimento». O seu valor (j) é dado pelo quociente entre a variação de velocidade (Δv) sofrida pelo móvel durante um certo intervalo de tempo (Δt) e o valor desse mesmo intervalo de tempo.

16. No exemplo numérico anterior o valor da aceleração era 5 km/h/h. Como este símbolo (km/h/h) é um pouco extenso é costume escreve-lo deste outro modo mais simples: km/h². Lê-se «quilómetro por hora quadrada». Anàlogamente se poderia dizer «metro por minuto quadrado», «centímetro por segundo quadrado», etc.

A unidade de aceleração é sempre dada por uma unidade de comprimento a dividir por uma unidade de tempo ao quadrado.

17. Durante o intervalo de tempo Δt em que a velocidade do móvel aumentou de Δv, o móvel considerado percorreu um certo espaço. Poderá o gráfico dizer-nos quanto valia esse espaço percorrido? Vamos ver que sim.

Concluímos anteriormente (fig. 10) que o espaço percorrido por um móvel animado de movimento *uniforme* poderia ser calculado no próprio gráfico por intermédio da medida de uma superfície ($A\,B\,B'A'$ dessa figura). Será também possível agora calcular o espaço andado recorrendo ao mesmo processo, isto é, avaliando a área $A\,B\,B'A'$, da figura 12?

Naturalmente temos hesitação em responder porque o movimento agora não é uniforme; é uniformemente acelerado. A superfície $A\,B\,B'A'$ já não é um rectângulo, como na figura 10; é um trapézio. Contudo, embora o movimento seja uniformemente acelerado, poderemos imaginar o intervalo de tempo Δt dividido em intervalos muitíssimo pequenos de modo que em cada um dos quais a respectiva variação de velocidade seja tão diminuta que se possa supor constante; e supor, além disso, que essa velocidade constante, em cada intervalo, fosse aumentando sucessivamente de cada um para o seguinte. Esta suposição consistiria em substituir o gráfico da figura 12 pelo da figura 13. Nesta, o trapézio $A\,B\,B'A'$ da figura 12 foi substituido por um conjunto de rectângulos cuja área total pouco difere da do trapézio e diferirá tanto menos quanto maior for o número de rectângulos que imaginarmos. A cada um destes corresponderia uma velocidade constante e os espaços percorridos durante os respectivos intervalos de tempo poderiam ser calculados determinando os valores das áreas desses rectângulos, conforme fizemos na figura 10. O espaço total, que seria a soma desses espaços, corresponderia ao valor da área do trapézio da figura 12, tanto mais rigorosamente quanto maior fosse o número de rectângulos considerados.

Calculemos então essa área.

O trapézio $A\,B\,B'A'$ (figura 12) pode ser dividido em duas partes: no rectângulo $A\,B''B'A'$ e no triângulo $A\,B''B$. Os lados adjacentes do rectângulo são $A\,A'$ e Δt. $A\,A'$ significa a velocidade do móvel (15 km/h) num certo instante (3 h). Repre-

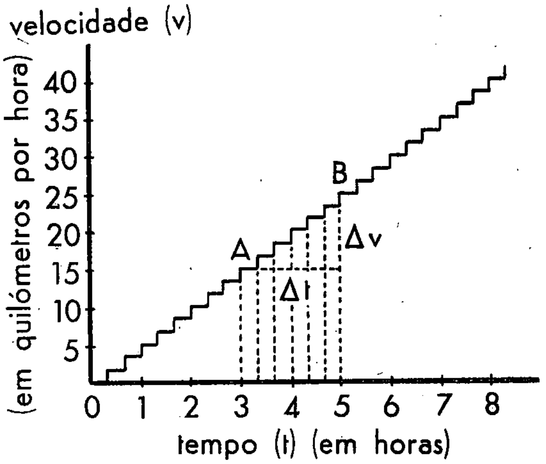

Fig. 13

sentaremos essa velocidade, por ser relativa ao ponto A, por v_A. A área da superfície do rectângulo valerá então $v_A \cdot \Delta t$. A área do triângulo ($A\,B''B$) valerá $\frac{1}{2}\Delta v \cdot \Delta t$. A área total do trapézio, que representa o valor do espaço (Δe) andado no tempo Δt, será a soma das duas áreas:

$$(1) \qquad \Delta e = v_A \cdot \Delta t + \frac{1}{2}\Delta v \cdot \Delta$$

Se quisermos que figure nesta expressão o valor (j) da aceleração do móvel bastará recordar (§ 15) que $j = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ e que, portanto,

$\Delta v = j \cdot \Delta t$. Substituindo este valor de Δv na equação (1), anterior, vem:

$$\Delta e = v_A \cdot \Delta t + \frac{1}{2} j \overline{\Delta t}^2 \qquad (2)$$

Esta equação serve para calcular o valor do espaço (Δe) percorrido por um móvel, com movimento uniformemente acelerado (cuja aceleração, constante, tem o valor j), durante o intervalo de tempo (Δt) contado a partir de um instante em que a sua velocidade tinha o valor v_A.

Se quisermos conhecer o valor do espaço percorrido pelo móvel a partir do momento em que ele começa a mover-se, isto é, em que a sua velocidade é nula, utilizaremos a mesma equação fazendo nela $v_A = 0$. Virá:

$$\Delta e = \frac{1}{2} j \overline{\Delta t}^2 .$$

18. O gráfico da figura 12 também permite estabelecer a relação entre a velocidade do móvel correspondente ao ponto B (que é dada pela ordenada BB') e a velocidade correspondente ao ponto A (que é dada pela ordenada AA'). Representaremos a primeira por v_B e a segunda por v_A, isto é, $v_B = BB'$ e $v_A = AA'$,

A figura mostra que

$$BB' = B''B' + BB''$$

ou

$$BB' = AA' + BB''$$

ou

$$v_B = v_A + \Delta v .$$

Como $\Delta v = j \Delta t$, poderemos escrever:

$$v_B = v_A + j \Delta t \qquad (3)$$

Esta equação serve para calcular o valor da velocidade (v_B) que um móvel animado de movimento uniformemente acelerado adquiriu ao fim de um intervalo de tempo Δt contado a partir de um momento em que a sua velocidade tinha o valor v_A. Se partir do repouso será $v_A = 0$ e portanto:

$$v_B = j \Delta t .$$

19. Estivemos a estudar um *movimento uniformemente acelerado*. Anàlogamente poderemos considerar um *movimento que seja uniformemente retardado*, isto é, um movimento em que a velocidade vá diminuindo à medida que o tempo decorre mas sempre com a mesma regularidade, de tal modo que a sua diminuição tenha sempre o mesmo valor para iguais intervalos de tempo.

O gráfico velocidade-tempo da **figura 14** traduz exactamente um movimento deste tipo. No momento em que se iniciou a contagem do tempo (tempo zero) a velocidade do móvel valia 40 km/h; uma hora depois valia 35 km/h; outra hora depois (tempo total: 2 h) valia 30 km/h; e assim sucessivamente. Ao fim de 8 h, a velocidade valia zero: o móvel tinha parado.

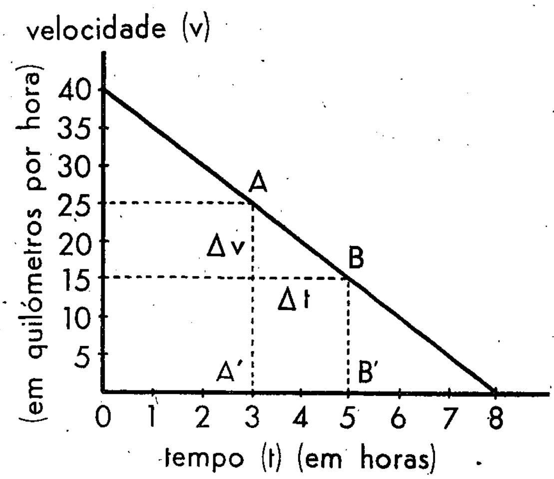

Fig. 14

Como a velocidade vai diminuindo, o movimento é retardado; mas como a diminuição é regular, visto a linha representativa ser uma recta, o movimento é *uniformemente retardado*. Também por a linha ser recta sabemos que o seu declive é constante e que é dado por $\frac{\Delta v}{\Delta t}$. Este quociente, à semelhança do que vimos no § 15, representa o valor da diminuição constante da velocidade em cada unidade de tempo. Também se representa por j e também se lhe chama «aceleração» embora seja, neste caso, *a subtrair*.

De facto a figura mostra que a velocidade correspondente ao ponto B ($v_B = 15\,\text{km/h}$) é igual à velocidade correspondente ao ponto A ($v_A = 25\,\text{km/h}$) subtraído do valor do segmento Δv. Isto é:

$$v_B = v_A - \Delta v$$

ou

$$v_B = v_A - j\,\Delta t \tag{4}$$

A expressão matemática é semelhante à que deduzimos no § 18 (equação 3) com a diferença de que a parcela $j\,\Delta t$ se subtrai em vez de se somar, visto o movimento ser retardado.

Anàlogamente chegaríamos à conclusão de que o valor do espaço (Δe) percorrido pelo corpo durante o intervalo de tempo Δt, com movimento uniformemente retardado, seria dado pela área da superfície do trapézio $ABB'A'$, cujo valor seria:

$$\Delta e = v_A\,\Delta t - \frac{1}{2} j\,\overline{\Delta t}^2 . \tag{5}$$

Esta expressão é também análoga à equação (2) do § 17, com a diferença de que a segunda parcela se subtrai no caso presente em vez de se somar.

20. Como nos movimentos retardados a velocidade diminui à medida que o tempo decorre, e como, apesar disso, continuamos a usar, para eles, a palavra «aceleração», podemos distinguir os casos dos movimentos acelerados e retardados dizendo que, nos primeiros, a *aceleração* é *positiva*, e nos segundos, *negativa*, o que corresponde a considerar os valores numéricos de j como podendo ser positivos ou negativos. Sendo assim as expressões (2) e (3) poderão só por si traduzir tanto os movimentos uniformemente acelerados (j positivo) como os uniformemente retardados (j negativo). As equações (4) e (5) ficarão assim incluídas nas equações gerais (2) e (3).

21. Quando estudámos o gráfico espaço-tempo considerámos o caso de a linha representativa ser uma recta (§ 2, fig. 1), o que significava que a velocidade era constante, e seguidamente o caso de a linha ser curva (§ 7, fig. 5), o que significava que o movimento era variado. Isso conduziu-nos ao conceito de «velocidade média num dado intervalo de tempo» (§ 8) e ao conceito de «velocidade num dado instante» (§ 9).

Na continuação estudámos o gráfico velocidade-tempo e considerámos igualmente o caso de a linha representativa ser uma recta: se fosse paralela ao eixo dos tempos (§ 12, fig. 9) isso significaria que o movimento era uniforme (velocidade constante); se fosse oblíqua (§ 14, fig. 11) isso significaria que o movimento era uniformemente acelerado. Resta considerar o caso em que esse gráfico fosse uma linha curva.

O caso de o gráfico velocidade-tempo ser uma linha curva é muito semelhante ao caso de o gráfico espaço-tempo quando também é uma linha curva. De facto consideremos de novo a figura 5 e suponhamos que os valores marcados em ordenadas eram de velocidades (e não de espaços) em quilómetros por hora. O ponto A indicaria que a velocidade do móvel ao fim de 10 minutos valia 12 km/h; o ponto B indicaria que a velocidade ao fim de 30 minutos valia 20 km/h. No intervalo de 20 min (= 30 min — 10 min), a velocidade do móvel variara de 8 km/h (= 20 km/h — — 12 km/h). Diríamos então que a sua *aceleração média* naquele intervalo de tempo fora de 8 km/h em 20 min (8 km/h / 20 min), que é o mesmo que dizer $24\,\text{km/h}^2$.

Dizer que a aceleração média é de $24\,\text{km/h}^2$ não significa que a aceleração correspondente ao ponto A tenha esse valor, nem a correspondente ao ponto B, nem a *qualquer* outro ponto do intervalo AB, embora esse valor possa coincidir com o real valor da aceleração num determinado instante desse intervalo.

Se quiséssemos conhecer o valor da aceleração, por exemplo, no instante correspondente ao ponto A, isto é, ao fim de 10 minutos exactos, procederíamos como fizemos no caso da figura 8. Tiraríamos uma tangente à curva no ponto A; o valor do declive dessa tangente seria o valor da «aceleração no instante considerado». Esse valor (j), à semelhança do caso do § 9, seria dado por:

$$j = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

em que Δt representaria o intervalo de tempo, muito curto, dentro do qual estava contido o instante «10 minutos», e Δv a variação de velocidade sofrida pelo móvel nesse pequeno intervalo de tempo [1].

22. Resumo.

A) Gráfico espaço-tempo

1) Uma linha recta, inclinada sobre o eixo dos tempos (fig. 1), significa que o movimento representado é uniforme [2]; o declive dessa recta sobre esse eixo indica a velocidade constante do móvel (§ 4).

2) Uma linha curva (fig. 5) significa que o movimento é variado; a «velocidade média do móvel num certo intervalo de tempo», relativo a dois pontos quaisquer da curva, é dada pelo declive da recta que une esses dois pontos (§ 8, fig. 6); a «velocidade num dado instante», relativa a um ponto qualquer da curva, é dada pelo declive da tangente à curva nesse ponto (§§ 9, 10 e 11, fig. 8).

B) Gráfico velocidade-tempo

1) Uma linha recta paralela ao eixo dos tempos (§ 12, fig. 9) representa um movimento uniforme. A superfície da área compreendida entre as ordenadas de quaisquer dois pontos dessa recta (fig. 10), representa o espaço andado pelo móvel no respectivo intervalo de tempo (§ 13).

2) Uma linha recta, inclinada sobre o eixo dos tempos (§§ 14 e 19, figs. 11 e 14), representa um movimento uniformemente variado; o declive dessa recta sobre esse eixo indica a aceleração constante do móvel (§§ 15 e 19); a superfície da área compreendida entre as ordenadas de quaisquer dois pontos dessa recta, representa o espaço andado pelo móvel no respectivo intervalo de tempo (§ 17 e 19).

3) Uma linha curva significa que o movimento é variado mas não uniformemente variado; a «aceleração média do móvel num certo intervalo de tempo», relativo a dois pontos quaisquer da curva, é dada pelo declive da recta que une esses dois pontos; a «aceleração num dado instante», relativa a um ponto qualquer da curva, é dada pelo declive da tangente à curva nesse ponto (§ 21).

RÓMULO DE CARVALHO

---

[1] A tangente à curva da fig. 5, no ponto A. iria interceptar o eixo dos tempos para a esquerda da origem das coordenadas, o que não importa pois a intenção seria determinar o declive dessa tangente.

[2] Se a recta fosse paralela ao eixo dos tempos significava que o corpo estava parado.