

VERIFICAÇÃO EXPERIMENTAL DE ALGUMAS LEIS FUNDAMENTAIS DE MECÂNICA

ELISA MARIA PRATA PINA *

Faz-se a descrição e interpretação duma experiência que pode ser realizada com dois pêndulos e um sistema simplificado de registo das suas trajectórias, e que permite verificar algumas leis fundamentais da Mecânica.

Os resultados experimentais baseiam-se no registo das trajectórias dos pêndulos, feito por pincéis embebidos em tinta e adaptados a cada esfera. Na análise destes resultados teve-se o cuidado de marcar segmentos que melhor se adaptassem ao traço, de certa espessura, registado directamente.

O erro, necessariamente introduzido por tal processo, poderá ser corrigido por um sistema mais complexo de registo. Pretende-se no entanto tornar a experiência acessível a alunos do Ensino Secundário de escolas com poucos recursos laboratoriais.

INTRODUÇÃO

Começemos por observar um pêndulo simples, pequena massa suspensa de um fio fino e inextensível, que está fixo na outra extremidade.

Todos sabemos que a posição de equilíbrio do pêndulo (0), é aquela em que o fio fica vertical. Sabemos também que se elevarmos a massa pendular para uma posição (P), diferente da de equilíbrio, e a abandonarmos,

* Professora do Ensino Secundário.

Este trabalho foi subsidiado pelo INIC, integrando-se nas actividades do Centro de Física Teórica da Universidade de Coimbra.

sem velocidade inicial, o pêndulo começa a oscilar numa trajectória circular, cujo centro é o ponto fixo F (Fig. 1).

Se o movimento se inicia no ponto P , com velocidade nula ($v_0(P) = 0$), são as forças que actuam sobre o pêndulo que o obrigam a mover-se em direcção a O . Ao longo de todo o percurso, o peso (\vec{P}) e a tensão do fio (\vec{T}), são as únicas forças que actuam sobre a massa pendular. O peso

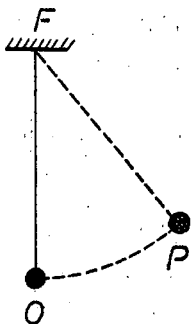


Fig. 1 — Pêndulo simples.

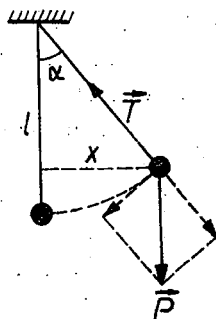


Fig. 2 — Forças que actuam sobre o pêndulo: \vec{P} — peso, \vec{T} — tensão do fio

é de fácil determinação. Quanto à tensão do fio, ela tem a direcção do fio e é em parte compensada pela componente normal do peso e, por outro lado, responsável pela componente centrípeta que mantém o movimento circular. Deste modo a componente tangencial da resultante das forças reduz-se à componente tangencial do peso, de módulo:

$$|\vec{F}| = P \text{ sen } \alpha \quad (1)$$

em que α é o ângulo que o fio faz com a vertical em cada instante.

É esta força a única, que, na posição de maior afastamento, origina o movimento. Assim, o corpo que tinha velocidade nula, na posição P , começa a movimentar-se na direcção que coincide com a da força aplicada.

Se designarmos por x , a abcissa correspondente ao afastamento e por l o comprimento do pêndulo vem:

$$x = l \text{ sen } \alpha \quad (2)$$

Tratando-se de um movimento de pequena amplitude (pequenas oscilações), o ângulo α é muito pequeno, pelo que podemos fazer a seguinte aproximação:

$$\text{sen } \alpha \simeq \alpha \text{ (com } \alpha \text{ expresso em radianos)} \quad (3)$$

e portanto

$$x = l \alpha \quad (4)$$

A expressão (4) toma então a forma:

$$|\vec{F}| = m \frac{g}{l} x \quad (5)$$

em que m é a massa pendular e g a aceleração da gravidade no lugar.

Concluimos assim que a componente tangencial da resultante das forças que actuam em cada instante, sobre a massa pendular, é directamente proporcional à abcissa x .

Na posição de equilíbrio ($x = 0$), a componente tangencial do peso é nula. Sabemos no entanto que o corpo se encontra animado de certa velocidade, pelo que continua o seu movimento. Ao afastar-se da posição de equilíbrio surge novamente a componente tangencial que agora se opõe ao movimento, pois tem sentido oposto ao da velocidade. Este facto leva a que a velocidade do pêndulo vá diminuindo até que se anula na outra posição extrema. Nesta posição é novamente a componente tangencial do peso a responsável pelo movimento. A partir daí, e até atingir de novo a posição de equilíbrio, o pêndulo adquire uma velocidade cuja direcção coincide com a da força. Mais uma vez na posição de equilíbrio, vai ser esta velocidade responsável pelo movimento. A partir de então o movimento repete-se e o pêndulo oscila. Este processo corresponde, na realidade, a uma transformação de energia potencial em cinética e vice-versa.

É possível manter o atrito num nível suficientemente baixo para que não haja dissipação apreciável de energia no processo. Nestas circunstâncias a soma da energia cinética (E_c) e energia potencial (E_p) mantém-se constante. (Princípio da conservação da energia).

Apliquemos então o princípio da conservação da energia entre a posição de equilíbrio (0) e a posição extrema (P) (Fig. 3):

$$E_c(0) + E_p(0) = E_c(P) + E_p(P) \quad (6)$$

Notando que a velocidade se anula na posição extrema e tomando para origem das energias potenciais a posição de equilíbrio, vem:

$$\begin{aligned} E_c(P) &= 0 \\ E_p(0) &= 0 \end{aligned} \quad (7)$$

que conduz às relações:

$$E_c(0) = E_p(P) \quad (8)$$

$$\frac{1}{2} m v^2(0) = m g h \quad (9)$$

$$v^2(0) = 2gh \quad (10)$$

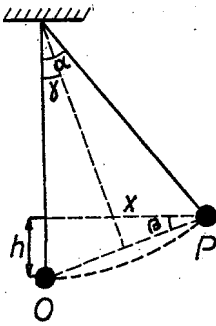


Fig. 3 — O — posição de equilíbrio do pêndulo
 P — posição de amplitude angular α .
 $\gamma = \frac{1}{2} \alpha$.

Tomando em consideração a geometria do problema, podemos exprimir a altura h em função da abscissa x (Fig. 3).

Tirando a bissetriz do ângulo α , verificamos que o ângulo $\gamma = \frac{\alpha}{2}$ tem os lados, respectivamente, perpendiculares aos do ângulo β e são da mesma espécie, pelo que:

$$\beta = \frac{\alpha}{2} \quad (11)$$

Podemos então tirar da figura 3 a relação:

$$\frac{h}{x} = \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \quad (12)$$

Tomando em consideração a aproximação das pequenas oscilações, $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} \simeq \frac{\alpha}{2}$, a relação (12) toma então a forma:

$$\frac{h}{x} = \frac{\alpha}{2} \quad (13)$$

Entrando com a relação (4) vem:

$$h = \frac{x^2}{2l} \quad (14)$$

Substituindo em (10) obtém-se:

$$v(0) = \sqrt{\frac{g}{l}} x \quad (15)$$

Atendendo ainda a que a abscissa x , do ponto extremo, P , considerado, corresponde à amplitude (A) do movimento (elongação máxima) vem:

$$v(0) = \sqrt{\frac{g}{l}} A \quad (16)$$

donde podemos concluir que a velocidade que o pêndulo atinge na posição de equilíbrio é proporcional à abscissa do ponto onde é abandonado, não dependendo da massa da esfera.

Assim, o pêndulo que cai da posição P atinge a posição de equilíbrio com velocidade dupla da que atinge no mesmo ponto, quando é abandonado da posição P' (Fig. 4). Do mesmo modo, se o pêndulo passa na posição de equilíbrio com velocidade dupla, atinge um ponto de abscissa dupla na subida.

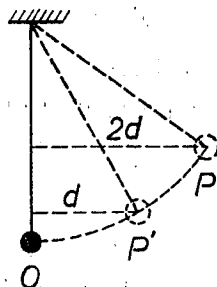


Fig. 4 — P — posição do pêndulo de elongação $2d$
 P' — posição de elongação d .

Torna-se assim fácil comparar as velocidades na posição de equilíbrio a partir da marcação num plano horizontal das correspondentes abscissas das posições extremas.

Um pêndulo simples que oscile livremente, sem atrito, afasta-se igualmente para cada um dos lados da posição de equilíbrio, pois a velocidade com que ele chega a esta posição (caindo de um ponto de abscissa d) é a mesma com que dela parte (que o leva a atingir um ponto com abscissa simétrica da do ponto de partida) (Fig. 5).

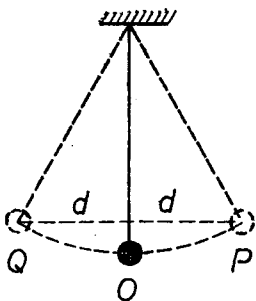


Fig. 5 — Posições extremas atingidas pelo pêndulo, no caso de não haver atrito.

Se o pêndulo, por qualquer razão, modificar a sua velocidade ao passar pela posição de equilíbrio, ele jamais atingirá uma posição extrema a igual distância.

A abcissa do ponto de onde o pêndulo cai e a do ponto que ele atinge servem-nos assim para determinar a velocidade que este tem na posição de equilíbrio, quando vem a descer e quando começa a subir.

Utilizando dois pêndulos que choquem na posição de equilíbrio, as velocidades dos mesmos são alteradas como consequência desse choque. As abcissas dos pontos de partida dos pêndulos e as dos pontos que estes atingem depois do choque dão-nos indicação sobre as velocidades dos mesmos antes e depois do choque, na posição de equilíbrio.

DESCRIÇÃO DO MÉTODO

Nas experiências que se seguem usamos dois pêndulos de comprimento bastante grande (cerca de 2 metros), com massas esféricas de aço m_1 e m_2 , suspensas de tal modo que as esferas fiquem em contacto e os fios paralelos na posição de equilíbrio. Cada esfera tem adaptado um pequeno pincel que se pode mergulhar em tinta, registrando sobre a mesa as trajectórias dos pêndulos, em pequenas oscilações.

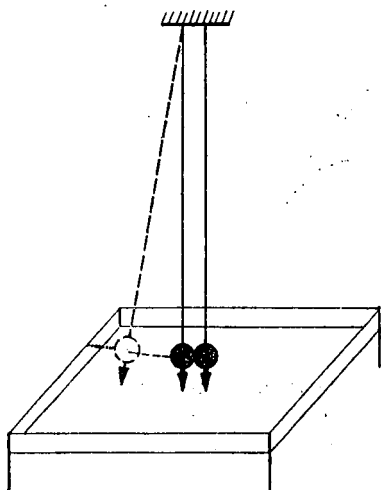


Fig. 6 — Dispositivo experimental: esferas de aço suspensas de fios de comprimento cerca de dois metros. As trajectórias das esferas são registradas sobre a mesa por meio de pincéis que lhes estão adaptados.

Para maior simplicidade, consideraremos um dos pêndulos com velocidades inicial nula (pêndulo imóvel na posição de equilíbrio). Afastemos o segundo pêndulo para uma posição próximo da de equilíbrio (pequenas oscilações) e imobilizemo-lo (prendendo-o a um aro fixo na mesa). Esperemos o tempo suficiente para que este fique em repouso (sem oscilar). Queimemos então o fio, deixando assim que o pêndulo caia sem qualquer impulso e vá chocar com o outro que se encontrava na posição de equilíbrio.

As velocidades que as massas pendulares possuem antes do choque vão ser alteradas por acção deste, conduzindo a trajectórias que ficam registadas sobre a mesa.

As grandezas dos vectores posicionais dos centros das esferas em relação às posições de equilíbrio dão-nos as abcissas x , de que são abandonados os pêndulos antes do choque e que são atingidas pelos mesmos depois do choque. Como referimos anteriormente, estas abcissas são proporcionais às velocidades das esferas pendulares, antes e depois do choque respectivo.

A figura 7 regista as trajectórias, marcadas sobre a mesa pelas duas esferas de massas iguais, durante o choque.

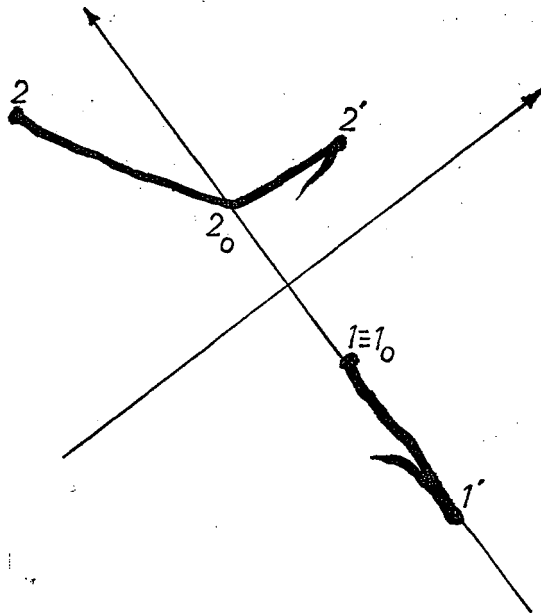


Fig. 7 — Registo das trajectórias das esferas.

- 1 e 2 — posições extremas das esferas antes do choque
- 1₀ e 2₀ — posições das esferas no instante do choque.
- 1' e 2' — posições extremas depois do choque.

Com base neste registo e em outros equivalentes fez-se a análise e interpretação dos resultados, esquematizando cada choque pelos segmentos que melhor se adaptam ao rasto deixado pelo pincel.

Os resultados podem ser melhorados aumentando o comprimento dos pêndulos.

ANÁLISE DOS RESULTADOS

A — Conservação da quantidade de movimento

A.1 — Choque de duas esferas de massas iguais: $m_1 = m_2$

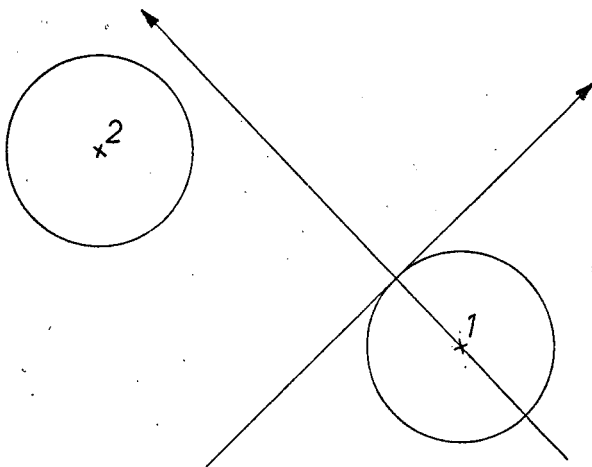


Fig. 8 — Posições extremas dos centros das esferas antes do choque (pontos 1 e 2), deduzidas do registo experimental.

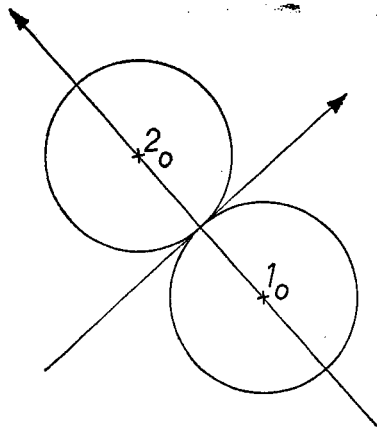


Fig. 9 — Posições dos centros das esferas no instante do choque (pontos 1₀ e 2₀).

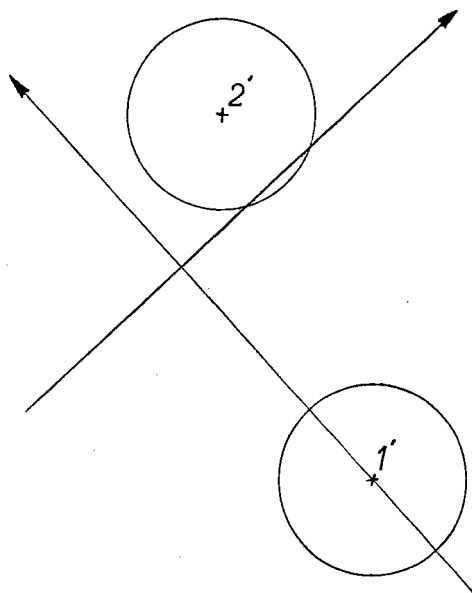


Fig. 10 — Posições extremas dos centros das esferas atingidas depois do choque (pontos 1' e 2').

Na figura 11 marcámos os vectores proporcionais às velocidades de cada esfera antes e depois do choque ($\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}'_1, \vec{v}'_2$), com origem nas posições ocupadas pelos centros das esferas antes e depois do choque.

Na figura 12 traçámos as variações de velocidade de cada uma das esferas (subtracção de vectores):

$$\Delta\vec{v}_1 = \vec{v}'_1 - \vec{0} = \vec{v}'_1 \quad (17)$$

$$\Delta\vec{v}_2 = \vec{v}'_2 - \vec{v}_2 \quad (18)$$

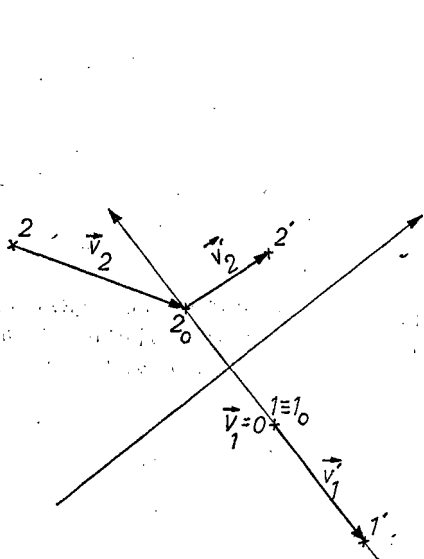


Fig. 11 — Vectores proporcionais às velocidades das esferas na posição de equilíbrio antes e depois do choque ($\vec{v}_1; \vec{v}_2$ e $\vec{v}'_1; \vec{v}'_2$), marcados a partir das posições extremas e de equilíbrio das esferas

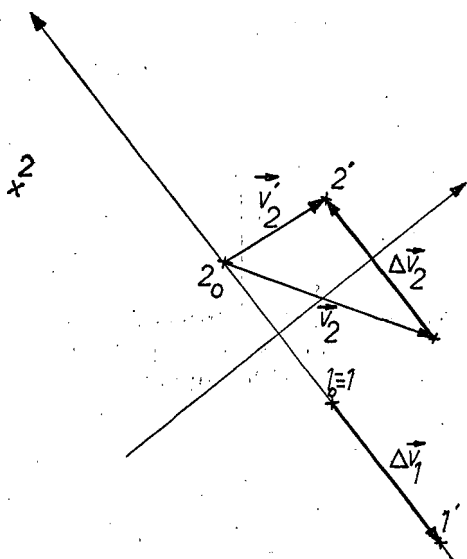


Fig. 12 — Vectores proporcionais às variações de velocidade das esferas durante o choque ($\Delta\vec{v}_1$ e $\Delta\vec{v}_2$), para $m_1 = m_2$.

Podemos notar imediatamente que as variações de velocidades da primeira e da segunda esfera têm a mesma direcção e sentidos opostos. Quanto à relação entre estes dois vectores ($\Delta\vec{v}_1$ e $\Delta\vec{v}_2$), podemos concluir do registo anterior:

$$\frac{\Delta\vec{v}_1}{\Delta\vec{v}_2} \simeq -1 \quad (19)$$

A.2 — *Experiência análoga com esferas de massas, uma dupla da outra:*
 $m_1 = 2m_2$

Na figura 13 registamos as posições iniciais e finais de cada esfera e as variações de velocidade de cada uma.

A observação destas variações $\vec{\Delta v}_1$ e $\vec{\Delta v}_2$ conduz à conclusão que também estes vectores têm a mesma direcção e sentidos opostos, sendo a relação entre eles:

$$\frac{\vec{\Delta v}_1}{\vec{\Delta v}_2} \simeq -\frac{1}{2} \quad (20)$$

A.3 — *Experiência análoga com esferas de massas uma tripla da outra:*
 $m_1 = 3m_2$.

O registo das variações de velocidade de cada uma das esferas, neste caso, conduz à relação:

$$\frac{\vec{\Delta v}_1}{\vec{\Delta v}_2} \simeq -\frac{1}{3} \quad (21)$$

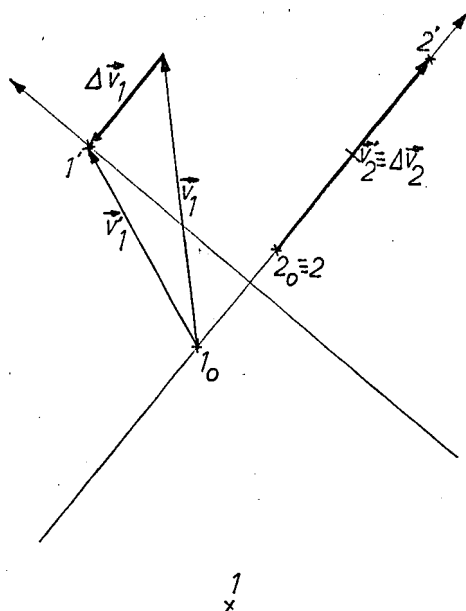


Fig. 13 — Variações das velocidades das esferas durante o choque ($\vec{\Delta v}_1$ e $\vec{\Delta v}_2$) para $m_1 = 2m_2$.

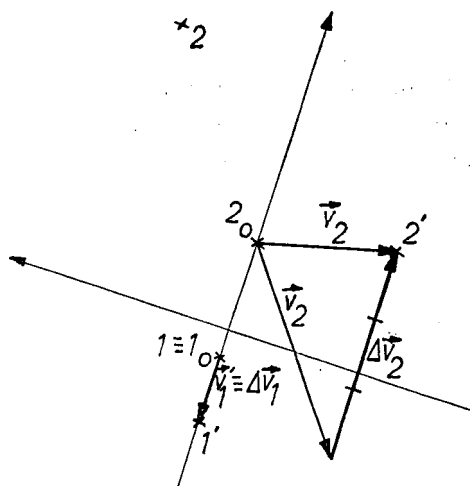


Fig. 14 — Variações das velocidades das esferas durante o choque ($\vec{\Delta v}_1$ e $\vec{\Delta v}_2$) para $m_1 = 3m_2$.

Comparando agora as relações obtidas com a razão das massas, em cada experiência, podemos concluir que:

$$\frac{\vec{\Delta v}_1}{\vec{\Delta v}_2} = -\frac{m_2}{m_1} \quad (22)$$

a que podemos dar a forma:

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = m_1 \vec{v}'_1 + m_2 \vec{v}'_2 \quad (23)$$

Explicitando ainda a quantidade de movimento $p = mv$, podemos escrever:

$$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}'_1 + \vec{p}'_2 \quad (24)$$

que traduz a conservação da quantidade de movimento durante o choque, para as duas esferas em questão: *a quantidade de movimento das duas esferas antes do choque é igual à quantidade de movimento das mesmas depois do choque.*

B — Princípio de acção e reacção

Terá interesse pensarmos nesta altura que forças são estas que actuam no curto intervalo de tempo que dura o choque e que levam à conservação da quantidade de movimento.

Retomemos a relação encontrada em (22)

$$m_1 \vec{\Delta v}_1 = -m_2 \vec{\Delta v}_2 \quad (25)$$

Atendendo a que a variação de velocidade das duas esferas surge no mesmo intervalo de tempo (duração do choque), podemos dividir aquela igualdade por esse intervalo de tempo, Δt .

$$m_1 \frac{\vec{\Delta v}_1}{\Delta t} = -m_2 \frac{\vec{\Delta v}_2}{\Delta t} \quad (26)$$

Sabemos que o intervalo de tempo de duração do choque é extremamente curto; admitindo que a relação (26) permanece válida quando $\Delta t \rightarrow 0$, vem então:

$$m_1 \frac{d\vec{v}_1}{dt} = -m_2 \frac{d\vec{v}_2}{dt} \quad (27)$$

ou

$$m_1 \vec{a}_1 = -m_2 \vec{a}_2 \quad (28)$$

O primeiro membro representa a força que actua sobre a esfera 1 e o segundo a força que actua sobre a esfera 2, no instante do choque.

Vimos anteriormente que a esfera (2), afastada da posição de equilíbrio, começou a mover-se por acção da componente tangencial do peso a qual se anulou no instante do choque (posição de equilíbrio). Esta esfera atingiu a posição de equilíbrio com a velocidade \vec{v}_2 (velocidade antes do choque) e tinha na mesma posição, imediatamente depois do choque, uma velocidade \vec{v}_2' , diferente de \vec{v}_2 . Por outro lado a esfera 1 que estava em repouso antes do choque passou a mover-se. Todas estas modificações das velocidades deverão ser produzidas por forças que actuem durante o choque.

Quem poderá exercer essas forças?

Como não são exercidas exteriormente sobre o sistema, elas só poderão surgir da acção de uma esfera sobre a outra, durante o tempo (muito curto) em que estão em contacto. Somos levados a concluir que durante o choque actuam forças internas ao sistema — a esfera 1 exerce uma força $\vec{f}_1(2)$ sobre a esfera 2 e esta exerce uma força $\vec{f}_2(1)$ sobre a esfera 1. São estas forças internas as responsáveis pela conservação da quantidade de movimento.

A relação (28) pode então escrever-se

$$\vec{f}_2(1) = -\vec{f}_1(2) \quad (29)$$

se a esfera 2 exerce sobre a esfera 1 uma certa força, então a esfera 1 exerce sobre 2 uma força igual e directamente oposta — princípio de igualdade de acção e reacção.

C — Massa de inércia

Atendendo à expressão (22) por nós encontrada podemos escrever:

$$\frac{m_2}{m_1} = \frac{|\Delta\vec{v}_1|}{|\Delta\vec{v}_2|} \quad (30)$$

concluindo que a relação entre as massas pode ser medida pela razão das variações dos módulos da velocidade dos corpos em interacção. É em factos desta natureza que se baseia a noção de massa de inércia.

Retomando as experiências descritas em A_1 , A_2 , A_3 e designando por m_A , m_B e m_C as massas supostas sucessivamente para a esfera 1 e por m a massa da esfera 2 verificamos que as relações:

$$\begin{aligned} m_A &= m \\ m_B &= 2m \\ m_C &= 3m \end{aligned} \quad (31)$$

conduzem a:

$$\frac{|\vec{\Delta v}_A|}{|\vec{\Delta v}|} = 1; \quad \frac{|\vec{\Delta v}_B|}{|\vec{\Delta v}|} = \frac{1}{2}; \quad \frac{|\vec{\Delta v}_C|}{|\vec{\Delta v}|} = \frac{1}{3} \quad (32)$$

em que $\vec{\Delta v}_A$, $\vec{\Delta v}_B$, $\vec{\Delta v}_C$ e $\vec{\Delta v}$ designam as variações de velocidade das esferas de massas m_A , m_B , m_C e m , respectivamente.

Ou ainda:

$$\begin{aligned} |\vec{\Delta v}_A| &= |\vec{\Delta v}| \\ |\vec{\Delta v}_B| &= \frac{1}{2} |\vec{\Delta v}| \\ |\vec{\Delta v}_C| &= \frac{1}{3} |\vec{\Delta v}| \end{aligned} \quad (33)$$

Nas mesma condições (chocando sempre com a esfera m), quanto maior a massa, menor a variação de velocidade. *A massa de inércia aparece assim como uma medida da resistência oferecida por um corpo a qualquer alteração do seu movimento.*

D — Velocidades relativas

Até aqui, quando falámos em velocidades das esferas, fizemo-lo em relação a um sistema ligado ao laboratório, aquele em que está o observador. Podemos no entanto falar em velocidade em relação a outros sistemas. Em particular podemos determinar a velocidade de uma esfera em relação à outra. É como se um observador viajasse sobre uma esfera e daí observasse a outra.

É fácil ver que as velocidades relativas se podem determinar a partir das primeiras velocidades encontradas por uma subtração de vectores:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \quad \text{— velocidade da esfera 2 em relação à esfera 1, antes do choque.}$$

$$\vec{v}'_r = \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 \quad \text{— velocidade da esfera 2 em relação à esfera 1, depois do choque.}$$

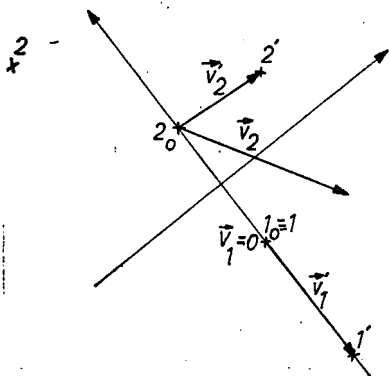


Fig. 15 — Velocidades das esferas antes e depois do choque para $m_1 = m_2$.

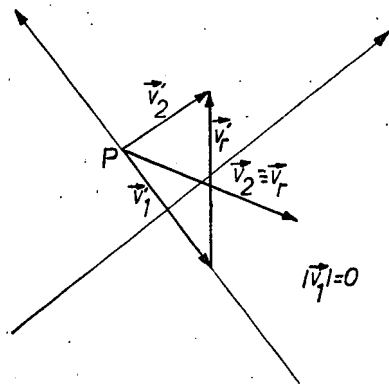


Fig. 16 — Velocidades da esfera 2 em relação a 1, antes e depois do choque:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \text{ e } \vec{v}'_r = \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 \quad (m_1 = m_2).$$

A figura 15 repete os registos das velocidades das esferas 1 e 2, antes e depois do choque da experiência A_1 . Na figura 16 marcamos no ponto P vectores equipolentes àqueles vectores velocidade, e traçamos geometricamente as diferenças de vectores que representam as velocidades relativas da esfera 2 em relação à esfera 1, antes e depois do choque:

$$\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{0} \equiv \vec{v}_2; \vec{v}'_r = \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1.$$

Procedemos de modo análogo para o choque experimentado em A_2 obtendo as figuras 17 e 18.

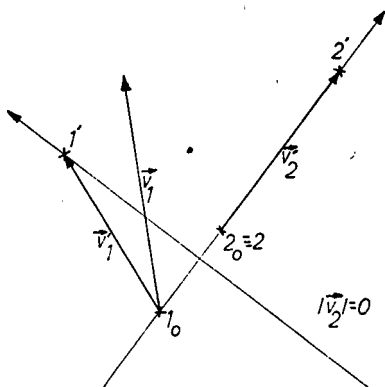


Fig. 17 — Velocidades das esferas antes e depois do choque para $m_1 = 2 m_2$

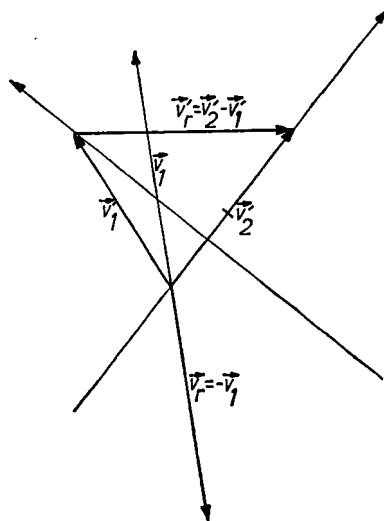


Fig. 18 — Velocidades da esfera 2 em relação a 1, antes e depois do choque

$$\vec{v}_r = \vec{v}_2 - \vec{v}_1 \text{ e } \vec{v}'_r = \vec{v}'_2 - \vec{v}'_1 \quad (m_1 = 2 m_2)$$

Nestes dois exemplos podemos notar que as velocidades relativas antes e depois do choque são vectores distintos (em direcção, sentido e em módulo).

Comparando ainda os módulos destes vectores, velocidade relativa, em cada caso, podemos concluir que o módulo da velocidade relativa depois do choque é ligeiramente inferior ao módulo da velocidade relativa antes do choque, nos casos considerados

$$|\vec{v}'_r| < |\vec{v}_r|$$

Este facto é interpretado como consequência duma pequena dissipação de energia no processo. Porém poderíamos ter realizado outras experiências (com material distinto) em que os módulos das velocidades relativas apresentassem relações diferentes. Se durante o choque ocorresse uma grande dissipação de energia, o módulo da velocidade relativa depois do choque viria muito menor que o módulo da mesma, antes do choque. Se, pelo contrário, não houvesse qualquer dissipação de energia no processo (choque perfeitamente elástico) o módulo da velocidade relativa não sofreria alteração. A natureza do choque depende da substância de que são feitas as esferas.