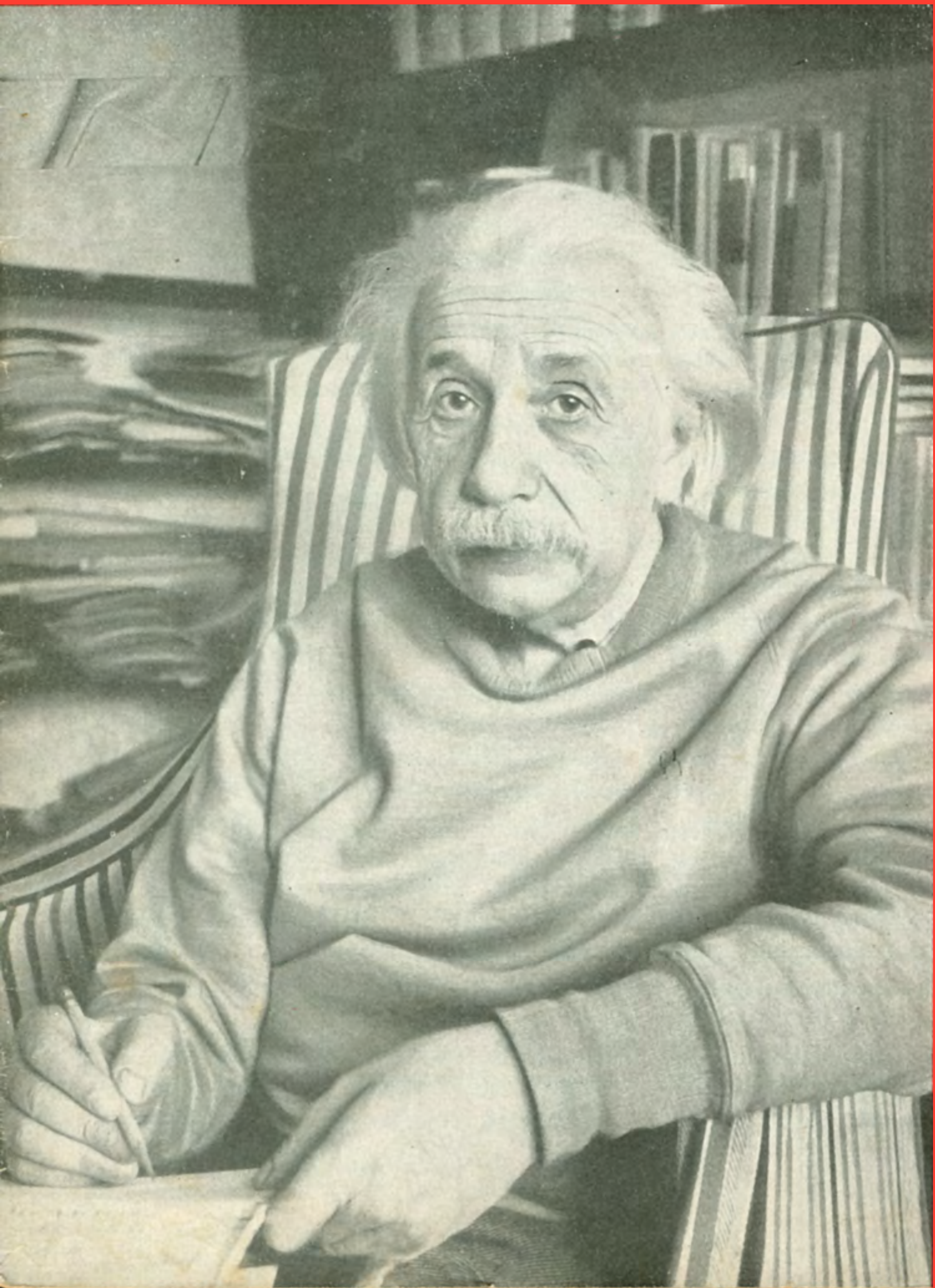
GAZETA DE FISICA

REVISTA DOS ESTUDANTES DE FÍSICA
E DOS FÍSICOS E TÉCNICO-FÍSICOS PORTUGUESES

VOL. III, FASC. 4
MARÇO, 1956



Albert Einstein
(1879-1955)

VOL. III

FASC. 4

MARÇO — 1956

GAZETA DE FÍSICA

PUBLICAÇÃO DESTINADA AOS ESTUDANTES DE FÍSICA E AOS FÍSICOS E TÉCNICO-FÍSICOS PORTUGUESES • VOLUMES PUBLICADOS:
VOL. I — 1946 a 1948 — IX FASCÍCULOS — 288 PÁGINAS
VOL. II — 1948 a 1953 — X FASCÍCULOS — 280 PÁGINAS

SUMÁRIO

Albert Einstein (1879-1955), por *Rómulo de Carvalho* 89

O que devemos a Einstein, por *A. Proca* 96

Cinemática dos Corpos Rígidos em Relatividade, por *Ruy Luís Gomes* 99

Dr. Rui Gustavo Couceiro da Costa, por *J. R. de Almeida Santos* 107

PONTOS DE EXAME: Exames Universitários (Física) 109

Noticiário 118

A matéria de cada artigo é tratada sob a inteira responsabilidade do autor

★

PROPRIEDADE E EDIÇÃO: GAZETA DE MATEMÁTICA, L.DA ⁕ CORRESPONDÊNCIA: GAZETA DE FÍSICA — LABORATÓRIO DE FÍSICA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA — RUA DA ESCOLA POLITÉCNICA — LISBOA ⁕ NÚMERO AVULSO: ESC. 12$50 ⁕ ASSINATURA: 4 NÚMEROS ESC. 40$00 ⁕ DEPOSITÁRIO: LIVRARIA ESCOLAR EDITORA — RUA DA ESCOLA POLITÉCNICA, 68 a 72 — TELEFONE 64040 — LISBOA

TIPOGRAFIA DA ATLÂNTIDA — RUA FERNANDES TOMÁS, 46 — COIMBRA

GAZETA DE FÍSICA

Fundador: ARMANDO GIBERT

Vol. III, Fasc. 4 Março de 1956

Albert Einstein

(1879-1955)

A morte de Albert Einstein ocorreu pelas seis horas e um quarto da manhã do dia 18 de Abril de 1955, no hospital de Princeton onde ingressara três dias antes. Por sua expressa determinação os principais órgãos do seu corpo foram reservados para estudo. O Dr. Thomas S. Harvey, patologista do Hospital de Princeton, retirou, por suas mãos, o cérebro de Einstein da caixa craneana e, de colaboração com o Dr. Harry Zimmermann, do Hospital Montefiore, de Nova Iorque, elaborou um plano de investigação destinado a conhecer minuciosamente a estrutura daquele cérebro previlegiado. O que então restou do corpo foi incinerado quinze horas após a morte e as suas cinzas lançadas ao vento.

Einstein, como as estrelas cadentes, atravessou o espaço, fulgiu, ardeu e dispersou-se no cosmos. Os estudantes de Princeton nunca mais sorrirão à passagem desse homem pequeno, mal vestido, que às vezes viam atravessar as ruas da cidade, em cabelo, despenteado, lambendo um sorvete saboroso.

*

* *

Albert Einstein nasceu em 14 de Março de 1879, em Ulm, cidade alemã do Wurtemburgo, na margem esquerda do Danúbio, perto de Munique, para onde sua família se transferiu um ano após o nascimento. Seu pai, Hermann Einstein, possuia uma pequena oficina de electroquímica que explorava de sociedade com um irmão. Deste tio paterno recebeu Einstein os primeiros contactos com a Matemática, e de sua mãe, Paulina Koch, o sentimento poético e a paixão musical, traços fundamentais da personalidade de Einstein. Do pai herdou o temperamento alacre, aberto e sincero, o prazer da gargalhada sem preconceitos e do gozo da vida livre, integrado na beleza das paisagens naturais.

A vida escolar de Einstein foi lenta e difícil. Magoava-se nas asperezas do ensino rígido, à maneira alemã da época, que lhe proporcionou este comentário: «Na escola primária os professores eram como sargentos; na secundária, como tenentes». Contudo, graças à orientação de seu tio e ao convívio de um jóvem e inteligente estudante de medicina, Max Talmey, que frequentava a casa paterna, Einstein, à margem do ensino oficial, lia e estudava com avidez. Aos quatorze anos conhecia a Álgebra, a Geometria Analítica, e os Cálculos Diferencial e Integral.

Em 1894 surgiu a primeira perturbação da sua vida que tão agitada viria a ser. A oficina de Hermann Einstein não prosperava; os negócios corriam pèssimamente. O pai de Einstein, juntando a premente necessidade de renovar a vida ao desejo insatisfeito de ver horizontes novos, resolveu sair de Munique e instalar-se num lugar mais belo, mais de acordo com o seu temperamento de amante da natureza. Escolheu a Itália e instalou em Milão uma nova oficina de electroquímica.

Albert Einstein pretendeu continuar a frequentar o Ginásio, onde era interno, mas foi-lhe difícil suportar a solidão em que ficara. Para convencer o director do colégio a deixá-lo desistir do internato, obteve um certificado médico declarando que se encontrava em estado de depressão nervosa e que necessitava de um descanso prolongado junto dos pais. A sua saída, que Einstein julgava difícil, foi inesperadamente fácil. O colégio declarava-se satisfeito com a saída do aluno cuja presença naquela casa — declarou o professor chamando-o, uma tarde, ao gabinete — arruinava o respeito dos estudantes pelos seus mestres e pelo ensino.

Einstein chegou a Milão de tal modo impressionado e contrafeito com o ambiente escolar onde vivera que determinou renunciar à sua nacionalidade alemã. Renunciou e ficou «cidadão sem pátria» porque não podia, imediatamente, adquirir outra nacionalidade.

Entretanto a vida económica dos Einstein peorava progressivamente até que um dia o pai de Albert lhe declarou a impossibilidade de continuar a sustentá-lo e o convenceu a procurar um modo de vida. Einstein, cujo desejo era o de prosseguir os estudos, resolveu concorrer ao exame de admissão à Escola Politécnica Federal suiça, em Zurique, para onde partiu. Ficou reprovado nesse exame por falta de conhecimentos de ciências naturais e de línguas. Porém, os seus conhecimentos de Matemática impressionaram de tal modo os examinadores que o director da Escola o aconselhou a preparar-se nos assuntos que ignorava e a repetir o mesmo exame.

Foi em Aarau que Einstein obteve a necessária preparação, num ambiente escolar que o encantou e que teve de abandonar com saudade ao fim de um ano para concorrer de novo à Escola Politécnica de Zurique, em que foi admitido.

A estadia em Aarau permitiu, a Einstein, uma observação pessoal que iria definir a sua vida futura: não era pelas Matemáticas puras que se interessava, como julgara até aí; era pela Física. Em Zurique, o ensino da Matemática estava a cargo de Minkowski que, como leccionador, estava muito aquém de corresponder ao seu valor como cientista. É curioso que tendo sido Minkowski um dos matemáticos cuja poderosa capacidade intelectual mais auxiliou o progresso das teorias einsteineanas, foi também quem afastou Einstein do interesse pelo estudo da Matemática. Só mais tarde viria a interessar-se de novo.

Ao iniciar-se o século XX terminava Einstein o curso da Politécnica de Zurique. Tinha então vinte e um anos. Lançado para a vida, começou, como é natural em casos semelhantes, a dar lições, ocupação que muito lhe desagradava e que lhe criou profundas incompatibilidades sociais. Vivia quase com miséria, mal alojado, mal agasalhado, mal alimentado. O aspecto que apresentava impressionou um seu ex-camarada de estudos, Marcel Grossman, cujo pai, bem relacionado, conseguiu um emprego para Einstein em condições excepcionalmente boas. O emprego era em Berne, na Repartição de Patentes de Invenção, e o trabalho consistia em apreciar e dar o seu parecer sobre os relatórios que lhe eram apresentados.

Foi por esta época que se fez cidadão suiço e que casou com uma rapariga húngara, Mileva Maritsch, que fora sua colega na Politécnica e de quem veio a ter dois filhos.

*

*   *

Agora, menos preocupado com os problemas mais instantes da existência quotidiana, poude Einstein entregar-se à meditação profunda das interrogações que o apaixonavam.

No princípio deste século a Física situara-se numa posição de compromisso que alarmava o espírito de muitos cientistas. Como é sabido, a teoria das ondas luminosas de Huyghens, prolongada mais tarde pelos trabalhos de Maxwell e de Hertz, exigia a concepção de um *éter* espacial, meio necessário à efectivação das vibrações que originam a propagação das ondas. Michelson, em 1881, procurou medir a velocidade da Terra através desse éter e, numa sucessão de famosas experiências, obteve, para essa velocidade relativa, um valor nulo. Dir-se-ia que a Terra, no seu movimento, arrasta consigo o hipotético éter; contudo o fenómeno conhecido por «aberração da luz das estrelas», prova que o éter não sofre qualquer influência devido ao movimento da Terra.

O resultado «negativo» das experiências de Michelson apresentava-se assim em profunda contradicção com os conhecimentos da Física clássica, e nisso consistia, exactamente, a sua negatividade.

A interpretação deste resultado «negativo» foi conseguida por Einstein depois de sujeitar as ideias fundamentais e seculares da Física a uma crítica de excepcional agudeza, crítica a que ninguém se tinha atrevido não só pelas dimensões intelectuais que exigia de quem a formulasse como também por ser inverosímil suspeitar-se que a evidência das próprias ideias fundamentais da Física pudesse esconder algum erro. Foi, como escreveu Broglie, um admirável esforço do pensamento.

Sempre se acreditou que a medida da distância entre dois pontos do espaço tivesse um valor concretamente definido, independente do estado de repouso ou de movimento do observador que a avaliasse e necessàriamente a mesma qualquer que fosse o observador. Analogamente o tempo decorrido no intervalo entre dois fenómenos seria necessàriamente o mesmo para qualquer observador, em repouso ou em movimento. Noutros termos: o espaço e o tempo tinham carácter absoluto.

Foi sobre estas «verdades intangíveis» que Einstein fez incidir a luz do seu pensamento crítico, afirmando que eram falsas; que o espaço e o tempo têm carácter relativo, isto é, que os valores das suas medidas dependem do movimento relativo dos observadores.

Broglie, que é, incontestàvelmente, um dos espíritos mais audazes e mais brilhantes da Física moderna, teve a nobre franqueza de escrever: «Os raciocínios de que Einstein se serviu para justificar a sua nova concepção do espaço e do tempo são, em geral, tão subtis, que é dificil desenvolvê-los correctamente».

Como todos os conhecimentos de Física assentam nas noções de espaço e de tempo, é evidente que a substituição dessas noções por outras, abalou todo o corpo da Física. Assim Einstein estabeleceu como novas «verdades», a invariância da velocidade da luz, o aumento da massa de um corpo quando a sua velocidade aumenta, a inércia da energia, a transformação recíproca massa-energia, a descontinuidade da luz, etc.

A exposição escrita destes primeiros trabalhos de Einstein foi publicada em 1905, na revista suiça *Annalen der Physik* com o título *Zur Elektrodynamik bewegter Körper* (Sobre a electrodinâmica dos corpos em movimento).

Aí se estabelecem as bases da teoria que ficou conhecida por «Teoria da Relatividade Restrita», por se referir apenas à relatividade dos movimentos uniformes e rectilíneos. O original entregue à redacção da revista constava apenas de trinta páginas manuscritas de papel de carta. Sobre o conteúdo dessas páginas, sobre o seu autor e a sua restante obra, já se escreveram, até hoje, cerca de quatro mil volumes.

*

* *

A emoção causada pela «memória» de Einstein no mundo científico passou por toda a gama de valores, desde a que faz ecoar a mais desdenhosa das gargalhadas até à que se traduz num autêntico deslumbramento. Há vinte e cinco anos que a Física se esforçava, baldadamente, por se desenvincilhar dos embaraços criados pelas experiências de Michelson. A tentativa de interpretação imaginada por Fitzgerald e Lorentz, admitindo a possibilidade de uma contracção dos corpos materiais provocada pelo seu movimento através do éter, era pouco convincente por artificiosa. Einstein, sem artifício, embora seguindo raciocínios de apreensão difícil, abria um caminho novo e intensamente iluminado para o progresso subsequente da Física. Poincaré, em França, Lorentz, na Holanda, Max Planck, na Alemanha, e outros na vanguarda do pensamento científico, reconheceram no jovem funcionário da Repartição de Patentes de Berne, uma revelação surpreendente.

Após a publicação da Teoria da Relatividade, o professor Kleiner convidou Einstein para reger um curso de Física na Universidade de Berne, na situação de *Privatdozent*, categoria particular de professor cujos honorários são pagos pelos estudantes que desejam assistir aos cursos. Daí ingressou, em 1909, no cargo de professor «extraordinário» da Universidade de Zurique, abandonando Berne e o seu lugar na Repartição das Patentes.

O tempo que, então, leccionou em Zurique foi bastante curto. Em 1910 dava-se uma vaga na cadeira de Física Teórica na Universidade alemã de Praga, para a qual Einstein foi convidado. Era a primeira vez que lhe surgia a oportunidade de ocupar um lugar de carácter definitivo como professor universitário, o que lhe permitia receber honorários de maior vulto.

A sua estadia em Praga não foi isenta de dificuldades, como aliás, normalmente, sempre sucedeu na sua vida. O temperamento de Einstein não lhe permitia encarar certos preconceitos sociais com aquela seriedade e gravidade que as conveniências exigem. Era um espírito crítico, de um criticismo folgazão e irreverente que escandalilizava os seus iguais. São inúmeras as anedotas contadas pelos seus íntimos em que essa personalidade comprometedora se acentua. Por outro lado, Einstein era de origem judaica, motivo forte para que a sua presença na Europa Central da época fosse mal vista por grande número de pessoas.

Durante a sua estadia em Praga, que abandonou em 1912, Einstein continuou a desenvolver os problemas criados pela sua Teoria da Relatividade. Foi por esta época que se relacionou com Georges Pick, matemático de elevada categoria, com quem dava longos passeios, quase diários, dedicados à discussão dos assuntos que o preocupavam. Pick auxiliou-o, orientando-o particularmente no desenvolvimento do Cálculo diferencial absoluto de Ricci e Levi-Civita.

É desta época (1911) o seu trabalho *Über den Einfluss der Schwerkraf auf die Ausbreitung des Lichtes* (Influência da gravitação na propagação da luz). No ano seguinte (1912) publicou *Über die thermodynamische Begründung des photochemischen Äquivalenzgesetzes* (Sobre os fundamentos termodinâmicos da lei da equivalência fotoquímica).

Data também do mesmo ano de 1911 a reunião, em Bruxelas, a convite e a expensas de Ernest Solvay, onde se encontraram os mais gloriosos investigadores do tempo: Poincaré e Langevin, pela França, Rutherford, pela Inglaterra, Planck e Nernst, pela Alemanha, Lorentz, pela Holanda e Madame Curie, pela Polónia. Einstein e Hasenöhrl representavam a Áustria. Aí, todos tiveram oportunidade de conhecer de perto o génio da Física a cuja obra votavam tão grande admiração.

*

* *

Em 1912, Einstein deixou Praga e ingressou, como professor de Física Teórica, na Escola Politécnica de Zurique, onde estudara. Aí encontrou o seu antigo condiscípulo Marcel Grossmann, então matemático distinto, com quem estreitou íntimas relações científicas e que o auxiliou no desenvolvimento da sua Teoria Geral da Gravitação. É desta época a sua viagem a Viena onde foi proferir uma conferência que ficou célebre e onde se relacionou com Ernest Mach, cujo pensamento filosófico influenciou profundamente Einstein na concepção da Teoria da Relatividade.

A sua demora na Politécnica de Zurique foi apenas de um ano. Planck e Nernst tinham-se deslocado propositadamente àquela cidade suíça para convidarem Einstein a aceitar o cargo de director de um Instituto de investigação científica que se projectava criar em Berlim. Seria nomeado professor da Universidade e membro da Academia de Ciências da Prússia. Einstein aceitou e partiu para Berlim onde iria viver durante vinte anos, de 1913 a 1933, uma vida cheia de surpresas em que sofreria os mais cruciantes golpes de toda a sua existência. Foi também nesta época que Einstein se divorciou da sua primeira mulher e se casou com Elsa Einstein, cujo apelido já lhe pertencia por ser sua parente.

Pouco depois de se estabelecer em Berlim, em Agosto de 1914, estalava a primeira grande guerra mundial. No tumulto das paixões que então se desencadearam, um grupo de noventa e dois intelectuais alemães, artistas e cientistas, publicaram e assinaram um manifesto em que afirmavam a sua concordância com as directrizes da política seguida pelo Governo. Einstein, que se declarava contrário à guerra, não quis assinar. A atitude, bastante arriscada naquelas circunstâncias, teve a justificá-la, em parte, a nacionalidade suíça de Einstein.

Foi durante a guerra, em 1916, que Einstein publicou a Teoria da Relatividade Generalizada *(Die Grundlagen der albgemeinen Relativitäts theorie)*, na qual apresenta uma nova e revolucionária teoria da gravitação. Segundo ela, a geometria euclidiana deixa de ser válida, como sempre se admitira, em qualquer espaço que contenha massas criadoras de forças gravíticas, pois o espaço, em virtude disso, manifesta uma curvatura, que é definida pela distribuição das massas que originam o campo gravítico.

Se a teoria de Einstein de 1905 já exigia uma capacidade de compreensão pouco frequente, mesmo entre os cientistas, esta, de 1916, excedia em muito essa exigência. J. J. Thomson, o eminente físico inglês, prémio Nobel da Física, que à data era presidente da Sociedade Real de Londres, teve a honestidade de declarar pùblicamente em sessão solene dessa mesma Sociedade, destinada a apreciar as consequências da nova Teoria de Einstein, pouco depois da sua publicação: «Devo confessar que ainda ninguém conseguiu exprimir com clareza o que significa, na realidade, a teoria de Einstein». E, ao mesmo tempo que considerava a Teoria da Relatividade como «um dos maiores monumentos da história do pensamento humano», insistia em afirmar que muitos cientistas se viam embaraçados para a entenderem.

Para melhor acentuar a insuficiência da concepção de Newton relativamente às noções de espaço e de tempo, Einstein recorreu a um fenómeno celeste que se passa em desacordo com a teoria de Newton. É o caso do planeta Mercúrio cujo movimento não se segue dentro das previsões clássicas. A órbita de Mercúrio desloca-se, em torno do Sol, de um arco de 43,5 segundos por século, facto este para o qual não se encontrava explicação. A consideração da curvatura do espaço permitiu, porém, a Einstein interpretá-lo devidamente.

A confirmação das novas ideias de Einstein tornou necessária a observação de um eclipse total do Sol que viria a dar-se em 29 de Março de 1919. A data foi esperada com a maior ansiedade pois, de certo modo, a ciência humana ia decidir o seu caminho futuro, entre a majestosa obra de Newton cujo pensamento iluminara o Universo durante três séculos, e a doutrina de Einstein, padrão erguido tão alto que a vista mal podia distingui-lo.

Os astrónomos ingleses, dirigidos por Eddington e distribuidos em duas expedições, instalaram-se em Sobral, ao norte do Brasil, e na nossa ilha do Príncipe, para a observação do eclipse solar. O êxito foi completo. Verificou-se o que Einstein afirmara: os raios luminosos eram, de facto, desviados pelo campo de gravitação solar e o valor do respectivo desvio concordava com o dos cálculos. O circunspecto *Times*, em Londres, encimava a respectiva notícia jornalística com o título: «Uma revolução na Ciência. As concepções de Newton derrotadas».

*

* *

Ao lado da extraordinária retumbância que as novas teorias físicas emprestavam ao nome do seu autor, começou a erguer-se, num ritmo crescente, após o armistício de 1918, uma violenta campanha doutrinária contra Einstein, em particular quando, em 1921, decidiu apoiar pùblicamente o movimento judaico que pretendia organizar uma pátria na Palestina. Por um lado os defensores das ideias racistas, por outro os físicos que se esforçavam por negar a razão de ser das novas doutrinas, por outro ainda os filósofos cujos sistemas se sentiam desamparados à luz das concepções da Relatividade, tudo se reunia para tornar insegura a presença de Einstein em Berlim. Escolheremos três frases, bastante eloquentes em si mesmas, para se avaliar o estado de confusão dos espiritos perante a obra científica e a pessoa de Einstein.

Uma, de Philipp Lenard, o físico alemão que se entregou ao estudo dos raios catódicos e foi laureado com o prémio Nobel: «O exemplo mais frisante da perigosa influência dos círculos judeus no estudo da Natureza é-nos dado pelo sr. Einstein com as suas teorias de grande espalhafato matemático, cozinhadas com alguns conceitos já velhos e umas tantas arbitrariedades». Outra, de Wilhelm Wien, físico alemão, também laureado com o prémio Nobel, em conversa com Rutherford: «Os senhores, os ingleses, nunca conseguirão entender a Teoria da Relatividade porque ela exige uma sensibilidade, autenticamente alemã, para a especulação abstracta». E, por último, de Bouasse, físico francês. «O espírito francês, com as suas exigências de lucidez especìficamente latina, não pode compreender a Teoria da Relatividade. Essa teoria é um produto das tendências teutónicas para a especulação mística».

Nos anos que se seguiram Einstein ausentou-se frequentemente da Alemanha acorrendo a vários países que o convidaram para a regência de cursos sobre a Teoria da Relatividade. O primeiro destes convites partiu da Universidade de Leide onde Einstein, atraído pela vida repousada da cidade, pensou em permanecer. O ministro da Educação da Alemanha receando que Einstein não regressasse à sua Escola escreveu-lhe, aconselhando-o a voltar para calar as bocas que especulavam com a sua ausência. Einstein regressou e, para mostrar a sinceridade da sua conduta, naturalizou-se alemão.

Entretanto, sucediam-se os convites para novas conferências e cursos. A sua palavra fez-se ouvir em Praga, em Viena de Áustria, em Nova Iorque, em Princeton, em Londres (onde depositou uma coroa no túmulo de Newton), no decurso de 1921; em Paris, em Xangai, em Kobe e na Palestina, em 1922 Em 1923 regressou à Europa visitando a Espanha onde conversou com Afonso XIII.

Foi no decurso de 1922 que Einstein recebeu o prémio Nobel da Física, data já tardia na sua vida de cientista mas justificada por certa dificuldade que houve em adaptar a natureza dos trabalhos de Einstein à orgânica da atribuição daquele prémio. Segundo as condições estabelecidas o prémio Nobel só deve ser referido a descobertas das quais a humanidade possa tirar proveito indiscutível. Ora como a Relatividade ainda era motivo de acirrados ataques, a Fundação Nobel rodeou a dificuldade atribuindo o prémio a Einstein em virtude da sua descoberta da lei da foto-electricidade e pela sua contribuição para a teoria dos quantos, evitando pronunciar se directamente sobre a Relatividade. Einstein, que nunca se entendeu com dinheiro, depressa se desfez das centenas de contos do prémio oferecendo metade à sua primeira mulher e o restante a uma obra de caridade.

Nos anos que se seguiram até 1930 a vida de Einstein foi quase toda passada em Berlim, entregue ao desenvolvimento das suas teorias particularmente no aspecto matemático em que muito o auxiliaram o húngaro Lanczos e o austríaco Walther Mayer. Foi durante esse período de tempo que Louis de Broglie apresentou (1924), como tese de doutoramento, em Paris, as suas admiráveis ideias sobre o que depois se chamou a *Mecânica Ondulatória*, que Davisson e Germer descobriram a difracção dos electrões (1927), que Heisenberg consolidou os alicerces da *Mecânica Quântica*, e que Bohr organizou a teoria do átomo.

Nos fins de 1930 Einstein partiu para a Califórnia, a convite do *Institute of Technology*, onde trabalhava Millikan. Nesse ano, e nos dois seguintes, Einstein passou aí os invernos, em Pasadena, regressando periòdicamente a Berlim, até 1933 em que o advento do hitlerismo o decidiu, no regresso, a instalar-se na Bélgica, país que conhecia muito bem e onde foi recebido, por várias vezes, como hóspede no palácio do rei Alberto, de quem era amigo.

Em Berlim, numa noite agitada (3 de Março de 1933) uma multidão de estudantes lançou numa fogueira, defronte do edifício da Ópera, ao som de canções patrióticas, as obras de Einstein. Apesar de se encontrar afastado do centro daquelas manifestações, o rei da Bélgica, receoso pela sorte do amigo, ordenou que se mantivesse permanentemente protegido por dois guardas da sua confiança.

Preocupados com o destino de Einstein, foram vários os organismos científicos de todo o mundo, entre eles a Universidade de Madrid, que se apressaram a convidá-lo oferecendo-lhe as suas pátrias como novo lar e as suas cátedras que consideravam imensamente dignificadas com a presença de homem tão notável. De todos os convites Einstein preferiu o de Abraham Flexner, pessoa de avultada fortuna que dispusera grande soma de dinheiro ao serviço da instrução e da investigação científica nos Estados Unidos e viera propositadamente à Europa contratar professores para a organização de um novo instituto *(Institute for Advanced Study)* perto de Princeton.

Foi aí, num ambiente de trabalho sereno, que Einstein passou a última fase da sua existência, desde o inverno de 1933 até ao ano da sua morte, período de vinte e dois anos onde couberam alguns dos acontecimentos de maior vulto na história contemporânea: a segunda grande guerra mundial e o desenvolvimento dos estudos sobre energia atómica. Nesse entretanto, em 1941, naturalizou-se cidadão americano.

Em Princeton, com o auxilio do matemático Walther Mayer, que viera de Berlim, e, principalmente, com a colaboração de Leopold Infeld, físico polaco, Einstein poude reatar, serenamente, o desenvolvimento das suas ideias. É desta época a sua Teoria unitária do campo de forças e da matéria, segundo a qual a massa de uma partícula é a própria concentração do campo em dadas regiões e, o movimento da massa, uma sucessão de modificações sofridas pelo campo. Relativamente à Física Nuclear os seus trabalhos teóricos incidiram sobre a unificação das leis que regem os fenómenos gravíticos, electromagnéticos e os relativos às partículas subatómicas.

Esta é, em traços largos, a biografia daquele pequeno homem de atitudes irreverentes, a quem Haldane se referia quando o apresentou ao público selecto do *King's College:* «Meus senhores. Encontra-se na vossa presença o Newton do século xx, o homem que operou, na história do pensamento humano, uma revolução mais profunda do que a de Copérnico, a de Galileu e a do próprio Newton».

RÓMULO DE CARVALHO
Professor no Liceu D. João III

Bibliografia das «Memórias» fundamentais respeitantes à relatividade

(por ordem cronológica da sua publicação)

1 — MICHELSON — *American Journal of Science*, 22, 1881, 120; MICHELSON e MORLEY — Idem, 31, 1886, 377.
2 — LORENTZ — *Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern* (Ensaio sobre a teoria dos fenómenos eléctricos e ópticos nos corpos em movimento) — Leide, 1895, §§ 89-92.
3 — LORENTZ — *Electromagnetic phenomena in a system moving with any velocity less than of light — Proceedings of the Academy of Sciences of Amsterdam*, 6, 1904.
4 — EINSTEIN — *Zur Elektrodynamik, bewegter Körper* (Sobre a Electrodinâmica dos corpos em movimento) — *Annalen der Physik*, 17, 1905.
5 — EINSTEIN — *Ist die Trägheit eines Körpers von seinem Energiegehalt abhängig*? (Dependerá a inércia de um corpo da energia que possui?) — *Annalen der Physik*, 17, 1905.
6 — MINKOWSKI — Conferência efectuada em Colónia, em 21 de Setembro de 1908, na 80.ª reunião dos físicos e naturalistas alemães, sobre o espaço e o tempo.
7 — EINSTEIN — *Über den Einfluss der Schwerkraft auf die Ausbreitung des Lichtes* (Sobre a influência da gravitação na propagação da luz) — *Annalen der Physick*, 35, 1911
8 — EINSTEIN — *Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie* (O fundamento da Teoria Geral da Relatividade) — *Annalen der Physik*, 49, 1916.
9 — EINSTEIN — *Hamiltonsches Princip und allgemeine Retativitätstheorie* (O Princípio de Hamilton e a Teoria Geral da Relatividade) — *Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d. Wissenschaften*, 1916.
10 — EINSTEIN — *Kosmologische Betrachtungen zur allgemeinen Relativitätstheorie* (Considerações cosmológicas sobre a Teoria Geral da Relatividade) — *Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d. Wissenschaften* 1917.
11 — EINSTEIN — *Spielen Gravitationsfelder im Aufber der materiellen Elementarteilchen ein wesentliche Rolle?* (Representará o campo de gravitação um papel essencial na estrutura das partículas elementares da matéria?) — *Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d. Wissenschaften*, 1919.
12 — WEYL — *Gravitation und Elektricitat — Sitzungsberichte der Preussischen Akad. d. Wissenschaften*, 1918.

(Todas estas «memórias», à excepção da primeira, foram publicadas em 1923, pela editorial americana Dover, traduzidas em língua inglesa por W. Perrett e G. B. Jeffery, com o título *The Principle of Relativity).*

O que devemos a Einstein

Um dos fenómenos mais relevantes que nos aponta a história da Ciência dos últimos anos é a extraordinária influência que as ideias de Einstein exerceram não só sobre as teorias científicas contemporâneas como também sobre as suas aplicações.

A beleza e a grandeza dessas ideias são tais que tornam supérfluas, e até despropositadas, quaisquer palavras laudatórias. Preferimos substituí-las, neste lugar, pela tentativa de tornarmos acessíveis algumas dessas ideias aos profanos ou àqueles que não são especializados nestes assuntos. Tentaremos, o melhor que pudermos, seguir o pensamento de Einstein nalguns dos seus trabalhos, assinalar o momento próprio em que se afastou dos caminhos já trilhados e apontar as regiões desconhecidas para que se dirigiu. Esta será talvez a melhor homenagem que é possível prestar, neste momento, à memória daquele cuja obra vai ser glorificada em Berne, no próximo mês de Julho, por ocasião do cinquentenário da publicação da sua primeira memória sobre a Relatividade.

Foi a Teoria da Relatividade que celebrizou Einstein. Toda a gente julga entender o significado corrente da palavra relatividade quando se trata de factos elementares como, por exemplo, a localização de um ponto no espaço. Para definir a posição de um corpo é necessário considerá-la relativamente a uma dada referência. O corpo em si mesmo, e as propriedades que o caracterizam, são independentes da referência escolhida. Tudo isto é evidente e não traz consigo novidade nenhuma.

Em que consistiu a modificação introduzida por Einstein? Em um simples aditamento de consequências incalculáveis. Para Einstein a «relatividade» não diz respeito apenas ao espaço mas também ao tempo, isto é, é necessário aplicá-la ao conjunto do espaço e do tempo, ao que hoje se chama o «espaço tempo».

Não será dificil conceber as consequências que podem resultar desta hipótese e a autêntica revolução a que ela se presta. Logo de início nos obriga a sujeitar a noção de tempo a uma nova análise, não no aspecto vago de conceito filosófico mas ligado concretamente às exigências matemáticas, bem definidas, da relatividade. O tempo perde aí o seu carácter universal e absoluto. A cada ponto corresponde um tempo que lhe é próprio. Finalmente, a hipótese de Einstein permite-nos estabelecer as condições a que devem subordinar-se as leis naturais para satisfazerem a este «princípio da relatividade».

Não interessa, neste momento, rever todos os aspectos do assunto em questão. Referir-nos-emos apenas às consequências que resultam de qualquer corpo perder uma certa parte da sua massa sempre que emite energia. A transformação da massa em energia, prevista por Einstein em 1905, constitui o processo verificado na explosão de uma bomba atómica e noutros factos semelhantes.

A generalização da teoria precedente conduziria Einstein a interessar-se pelo problema da gravitação e a resolvê-lo.

A essência da noção de «relatividade» exige que as leis dos fenómenos naturais sejam completamente independentes do sistema referencial utilizado. Não é este o caso da «relatividade» a que nos referimos, motivo por que se lhe dá a designação de «relatividade restrita». A passagem desta para a «relatividade generalizada» foi também efectuada por Einstein que conseguiu assim resolver o enigma da gravitação, essa força omnipresente cuja origem constituira, até então, um mistério inexplicável.

Que vem a ser a gravitação? A resposta resume-se a poucas palavras: «A força da gravitação é uma manifestação da curvatura do espaço».

A frase, em si mesma, não é muito esclarecedora mas a ideia que contém é de tal modo arrojada e original que vale a pena tentar compreendê-la, pelo menos através de uma analogia.

Em primeiro lugar, que deve entender-se por espaço curvo? É claro que não se trata de um espaço, como este em que vivemos, com três dimensões, no qual se verificasse uma curvatura. Tentemos imaginar primeiramente um espaço com *duas* dimensões, semelhante, por exemplo, a uma folha de papel. Esta folha poderá assentar sobre uma mesa, mas uma das suas extremidades poderá estar dobrada, enrolada sobre si mesma, isto é, poderá ser *curva.* O espaço assim representado pode ser curvo nuns lugares e plano noutros.

Imaginemos agora que este espaço era povoado por seres de duas dimensões, formados por pequenas lâminas de aço. Enquanto estes seres se movessem nas regiões planas do seu espaço, nada de estranho lhes sucederia. Mas, ao penetrarem na região curva, como lhes era impossível sair do seu próprio espaço, curvar-se-iam, o que daria origem, em virtude da elasticidade das lâminas, ao aparecimento de uma tensão, de uma força elástica. *Esta força deveria a sua existência apenas ao facto de o espaço ser curvo* naquela região e deixaria de existir se a curvatura deixasse de existir.

É claro que este mecanismo não se ajusta perfeitamente ao da gravitação. É uma simples analogia apenas destinada a fazer compreender que, em certos casos, a curvatura do espaço pode manifestar-se como sendo uma força.

*

* *

De modo semelhante, o espaço pode apresentar uma curvatura. Entre as propriedades intrínsecas que o caracteriza, e cuja existência se demonstra, possui, por exemplo, uma «torsão». Nos seus trabalhos mais recentes, Einstein ocupou-se do estudo dessas propriedades com o fim de descobrir a origem das forças electromagnéticas e de conseguir interpretá-las como manifestações de certas características do espaço. Infelizmente, nenhum destes estudos alcançou a sua forma definitiva. A única solução satisfatória foi a que respeita à gravitação.

Em qualquer dos trabalhos a que nos referimos anteriormente, Einstein não teve necessidade de recorrer aos conceitos de descontinuidade ou dos quantos. Contudo, nestes próprios domínios, também se colocou na vanguarda do progresso. Em 1905 introduziu, na Óptica, a hipótese dos «quantos de luz», justificando-a e colocando-a de modo a evitar a sua possível oposição à hipótese ondulatória como antes sucedera. Foi assim, ao precisar esta nova hipótese, sem prejuízo da consideração das ondas, que Einstein preparou o caminho para a concepção da Mecânica Ondulatória na qual, como é sabido, se atribui um duplo carácter, corpuscular e ondulatório, não só ao fotão como às outras partículas materiais.

No domínio do descontínuo e das probabilidades também os trabalhos de Einstein, relativos aos movimentos brownianos, às flutuações e à Termodinâmica Estatística, marcaram uma época. Apesar de todos estes aspectos da sua obra Einstein foi sempre, no íntimo, «o homem do contínuo». Nunca perdeu a esperança de que tudo fosse deduzível das propriedades do verdadeiro contínuo, do espaço. Por este motivo, nunca se dispôs a aceitar, por completo, as conclusões a que conduz a interpretação estatística da Mecânica Ondulatória. Convencido de que todos os «campos» poderiam ser deduzidos a partir de uma teoria do tipo daquelas que desenvolveu, alimentava a «modesta esperança» de poder incluir também, na mesma ordem dedutiva, a própria teoria dos quantos.

Lamentemos que esta esperança não tivesse tido oportunidade de se efectivar e admiremos, sem reservas, tamanha obra gigantesca, um dos mais admiráveis monumentos do pensamento humano.

A. PROCA

Director das investigações no
C. N. R. S.

(trad. de «Le Figaro Litteraire»)

A «GAZETA DE FÍSICA» luta pelos interesses dos cientistas portugueses. A indústria nacional necessita de físicos e de químicos portugueses

Cinemática dos Corpos Rígidos em Relatividade (1)

Resumo

Expressão geral da distância elementar de dois pontos dum corpo. Aplicação: *A*) distância medida no espaço próprio do corpo; *B*) distância medida no espaço dum referencial; *C*) Contracção de Lorentz. Condição necessária suficiente de movimento rígido. Número de graus de liberdade de um corpo rígido.

1. Quando se pretende avaliar, no espaço de um referencial admissível da Relatividade Restricta, o comprimento de uma régua em repouso noutro referencial (admissível também), é-se conduzido afinal ao seguinte problema (já por nós tratado em [1]):

Dadas as linhas de universo de dois pontos materiais P *e* Q *(extremidades da régua) com a mesma velocidade em relação a um referencial (de coordenadas* x_i, t), *determinar a sua distância no espaço de um ponto material* R *animado de velocidade constante em relação àquele referencial.*

Do ponto de vista matemático somos conduzidos a procurar a distância de duas linhas de universo temporais do tipo particular

$$(1) \qquad \begin{aligned} x_i &= v_i t + a_i, \\ x_i &= v_i t + b_i \end{aligned}$$

que correspondem a *P* e *Q*, no espaço de uma terceira linha de universo temporal

$$(2) \qquad x_i = u_i t + d_i,$$

que corresponde a *R*.

Essa distância é dada pela fórmula ([1])

$$(3) \qquad I_u^v = \frac{v^2 - c^2}{u/v - c^2}(u/r)^2 - 2\frac{v/r\,u/r}{u/v - c^2} + r^2$$

Se passarmos agora da Relatividade Restricta para a Relatividade Geral, então, como deixam de existir os sistemas *admissíveis* ou sistemas de inércia (a não ser com carácter local), e além disso só tem sentido (de um modo geral) falar de distâncias elementares, o problema enunciado anteriormente perde, todo o interesse.

Assim, em Relatividade Geral, o que tem interesse é, por exemplo, a distância de duas linhas de universo temporais (de tipo qualquer) infinitamente próximas, como são as que correspondem às extremidades de uma régua elementar ou, de um modo geral, a dois pontos infinitamente próximos de um corpo. É este em concreto o caso quando se trata do problema do movimento de um corpo rígido.

Ora, como um corpo é representado analìticamente por uma congruência de linhas temporais, vamos calcular precisamente a distância de duas linhas infinitamente próximas de uma tal congruência

$$(4) \quad x^\alpha = x^\alpha(y^i, \theta), \ \alpha = 1, 2, 3, 4, \ i = 1, 2, 3,$$

na qual y^i são os parâmetros definidores das linhas (da congruência) e θ um parâmetro tempo como por exemplo o *tempo próprio.*

Designando por V^α as componentes contravariantes de um vector temporal arbitrário, a distância da linha y^i à linha

([1]) Este artigo completa, ampliando-o bastante, um outro que publicamos no n.º 58 da *Gazeta de Matemática.*

([1]) Ver [1], p. 37.

$y^i + dy^i$, distância calculada no ponto θ da primeira e no espaço do V^α, será dada por

$$(5) \qquad d\sigma^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta,$$

sendo

$$ds^2 = g_{\alpha\beta} dx^\alpha dx^\beta$$

a métrica do universo e supondo que as diferenciais dx^α estão obrigadas à *condição de ortogonalidade*

$$(6) \qquad g_{\alpha\beta} dx^\alpha V^\beta = 0$$

tomada no ponto $x^\alpha = x^\alpha(y^i, \theta)$.

Diferenciando (4) e substituindo as expressões em (5), vem

$$(7) \qquad d\sigma^2 = g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{dx^\beta}{dy^i} dy^i dy^i + 2 g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{dx^\beta}{dy^i} dy^i d\theta + g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{\partial\theta} \frac{dx^\beta}{\partial\theta} d\theta^2.$$

E fazendo o mesmo em (6), tem-se

$$(8) \qquad g_{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} V^\beta dy^i + g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{\partial\theta} V^\beta d\theta = 0.$$

Atendendo agora a que $\frac{\partial x^\alpha}{\partial\theta}$ e V^β são ambos vectores temporais, donde

$$(9) \qquad g^{\alpha\beta} \frac{\partial x^\alpha}{\partial\theta} V^\beta \neq 0,$$

é possível eliminar $d\theta$ de (7), resultando simplesmente

$$(10) \qquad d\sigma^2 = \left[g^{\alpha\beta} - 2 \frac{U^\alpha}{U_\mu} \frac{V^\beta}{V^\mu} + U_\mu U^\mu \frac{V^\alpha V^\beta}{\left(U_\mu V^\mu\right)^2} \right] \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} dy^i dy^j,$$

em que

$$(11) \qquad U^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial\theta}, \quad U^\alpha = g_{\alpha\beta} U^\beta, \quad V_\alpha = g_{\alpha\beta} V^\beta$$

Normalizando U^α e V^β por intermédio de

$$(12) \qquad u^\alpha = \frac{U^\alpha}{\sqrt{-U_\mu U^\mu}}, \quad v^\alpha = \frac{V^\alpha}{\sqrt{-V_\mu V^\mu}},$$

ainda podemos escrever

$$(13) \qquad d\sigma^2 = \left[g_{\alpha\beta} - 2 \frac{u_\alpha v_\beta}{u_\mu v^\mu} - \frac{v_\alpha v_\beta}{\left(u_\mu v^\mu\right)^2} \right] \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} dy^i dy^j,$$

o que nos dá a distância pedida em termos de uma forma quadrática nas diferenciais dos parâmetros definidores das linhas da congruência.

Casos particulares

A. *Distância no espaço das próprias linhas da congruência.*

Neste caso é $v^\alpha = u^\alpha$, donde [1]

$$(14) \qquad d\sigma^2 = \left(g_{\alpha\beta} + u_\alpha v_\beta\right) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j} dy^i dy^j,$$

visto que

$$(15) \qquad u_\alpha u^\alpha = -1$$

B. *A congruência coincide com a das próprias linhas coordenadas x^4 (que supomos temporais segundo a convenção habitual).*

Então as alterações imediatas

$$(16) \qquad y^i = x^i, \; \theta = x^4,$$

conduzem a

$$(17) \qquad d\sigma^2 = \left[g_{ik} - 2 \frac{u^i v^k}{u_\mu v^\mu} - \frac{v_i v_k}{\left(u_\mu v^\mu\right)^2} \right] dx^i dx^k.$$

---

[1] A expressão (14) está deduzida em [3] mas seguindo outro raciocínio.

Admitamos agora que é no espaço de cada linha x^4 que se calcula a distância. Haverá que fazer

(18) $$v^i = u^i,$$

e portanto vem

(19) $$d\sigma^2 = (g_{ik} + u_i u_k) dx^i dx^k.$$

Mas atendendo a que

(20) $$u^i = 0,$$

pois ao longo de uma linha x^4 as diferenciais das outras coordenadas são nulas, vem

(21) $$u_i = g_{i\alpha} u^\alpha = g_{i4} u^4$$
$$u_4 = g_{44} u^4,$$

o que, tendo em conta (15), conduz a

(22) $$u_4 = \frac{1}{\sqrt{-g_{44}}}, \quad u_i = \frac{g_{i4}}{\sqrt{-g_{44}}}.$$

Substituindo estas expressões em (19), chegamos à fórmula conhecida (ver [1], p. 62)

(23) $$d\sigma^2 = \left(g_{ik} - \frac{g_{i4} g_{k4}}{g_{44}} \right) dx^i dx^k =$$
$$= \gamma_{ik} dx^i dx^k.$$

É evidente que podemos aproveitar (23) para exprimir (14), mas com a condição de transformarmos primeiro as variáveis x^μ nas variáveis y^i, $y^4 = 0$ por intermédio de (4), dando a ds^2 a forma

(24) $$ds^2 = g'_{\mu\nu} dy^\mu dy^\nu,$$

donde

(25) $$d\sigma^2 = \gamma'_{ik} dy^i dy^k,$$

em que

(26) $$\gamma'_{ik} = g'_{ik} - \frac{g'_{i4} g'_{k4}}{g'_{44}}.$$

Verifica-se, pois, a identidade

(26') $$\gamma'_{ik} = \left(g_{\alpha\beta} + \mu_\alpha \mu_\beta \right) \frac{dx^\alpha}{dy^i} \frac{dx^\beta}{dy^k}$$

O elemento ds, relativo ao universo, e o elemento $d\sigma$, relativo ao espaço da congruência, estão relacionados entre si por

(26'') $$ds^2 = d\sigma^2 + \frac{\left(g'_{\mu 4} dy^\mu \right)^2}{g_{44}},$$

como se conclue imediatamente de (24), (25) e (26).

De (26'') decorre ([1]) que $d\sigma^2$ é uma forma definida-positiva, uma vez que ds^2, por hipótese, é pseudo-euclideana (localmente) e g_{44} negativo (pelo facto de serem temporais as linhas coordenadas x^4, isto é, as linhas de universo do ponto do corpo).

C. *A Contracção de Lorentz.*

Suponhamos que o sistema de referência é absoluto, portanto ds^2 redutível (sem mudança de sistema) à forma

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k + g_{44} dx^{4^2},$$

correspondente a $g_{4i} = 0$.

Se tomarmos para parâmetro temporal da congruência (4) precisamente a coordenada x^4, teremos em vez de (4)

(4') $$x^k = x^k \left(y^i, x^4 \right)$$
$$x^4 = x^4,$$

e portanto $d\sigma^2$ tomará a forma

(13') $$d\sigma^2 = \left[g_{pq} - 2 \frac{u_p v_q}{u_\mu v^\mu} - \frac{v_p v_q}{\left(u_\mu v^\mu \right)^2} \right]$$
$$\frac{\partial x^p}{\partial y^i} \frac{\partial x^q}{\partial y^j} dy^i dy^j,$$

em que p e q só podem assumir os valores 1, 2, 3.

([1]) Ver [6], pp. 8 e 9.

Ora, aplicando (13') à hipótese

$$v^i = 0,$$

que implica

$$v_i = g_{4i} v^4 = 0,$$

vem

$$d\sigma_0^2 = g_{pq} \frac{\partial x^p}{\partial y^i} \frac{\partial x^q}{\partial y^j} dy^i dy^j.$$

E aplicando-a à hipótese

$$v^\mu = u^\mu,$$

tem-se

$$d\sigma^2 = \left(g_{pq} + u_p u_q\right) \frac{\partial x^p}{\partial y^i} \frac{\partial x^q}{\partial y^j} dy^i dy^j$$

Logo,

$$d\sigma_0^2 = d\sigma^2 - \left(u_p \frac{\partial x^p}{\partial y^i} dy^i\right)^2,$$

quere dizer: *a distância elementar $d\sigma_0$ de dois pontos de um corpo medida num sistema absoluto de coordenadas é menor ou igual à distância $d\sigma$ medida no espaço do próprio corpo. E só terá lugar a igualdade quando a variação de x^i para x^4 constante, que é o vector da componente*

$$\delta x^p = \frac{\partial x^p}{\partial y^i} dy^i,$$

for ortognal ao vector u^p segundo a m*étrica do espaço das coordenadas x^μ.*

Tal é a expressão da contracção de Lorentz em Relatividade Geral.

Se aplicarmos este enunciado ao caso de x^μ ser um sistema admissível da Relatividade Restricta, que é um sistema absoluto, e na hipótese de a congruência (4') coincidir com outro sistema admissível, obtém-se o conhecido resultado ([1])

$$I_u^u = r^2 - \frac{(u/r)^2}{u^2 - c^2},$$

que estabelece a relação entre o comprimento calculado e o comprimento próprio de uma régua admissível.

2. *Movimento de um corpo rígido.*

Adaptando à Relatividade Geral a definição dada por M. Born e G. Herglotz ([1]) para a Relatividade Restrita, diremos *que um corpo se mantém rígido se a distância das linhas de universo de dois quaisquer dos seus pontos infinitamente próximos, avaliada no respectivo espaço, não variar no decorrer do movimento.*

Nestes termos, se o corpo em movimento é representado pela congruência (4), *a condição necessária e suficiente* de rigidês será dada por

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left[\left(g_{\alpha\beta} + \mu_\alpha \mu_\beta\right) \frac{\partial x^\alpha}{\partial y^i} \frac{\partial x^\beta}{\partial y^j}\right] = 0, \tag{27}$$

pois são estas as equações que exprimem que os coeficientes de $d\sigma^2$ [fórmula (14)] não dependem do parâmetro-tempo θ.

Substituindo a derivação em ordem a θ pela derivação em ordem ao arco *s*, visto ser

$$\frac{ds}{d\theta} = \sqrt{-U_\beta U^\beta} \neq 0,$$

e desenvolvendo (24), vem ([2])

$$\left[\left(g_{\alpha\mu} + \mu_\alpha \mu_\mu\right) \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\beta} + \left(g_{\beta\mu} + \mu_\beta \mu_\mu\right) \frac{\partial x^\mu}{\partial x^\alpha} + \right.$$
$$\left. + \left(\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\mu} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x^\mu} u_\beta + \frac{\partial u_\beta}{\partial x^\mu} u_\alpha\right) u^\mu\right] \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial u^\beta}{\partial x^j} = 0. \tag{28}$$

([1]) Ver [2] e atender à diferença de notações e a que esta fórmula se refere a distâncias finitas quaisquer e não a distâncias elementares.

([1]) Ver [4] e [5].

([2]) Ver [3], p. 1660.

E ainda é possível dar a esta equação a forma equivalente (1)

$$(29) \qquad u_{\mu;\nu} + u_{\nu;\mu} + u_{\mu;\lambda}u^{\lambda}u_{\nu} + u_{\nu;\lambda}u^{\lambda}u_{\mu} = 0,$$

na qual $u_{\mu;\nu}$ são as componentes da derivada covariante de u_{μ} (em ordem às variáveis x^{α}).

Pondo

$$(30) \qquad U_{\mu\nu} = u_{\mu;\nu} + u_{\mu;\lambda}u^{\lambda}u_{\nu}.$$

podemos exprimir (26) segundo o

Teorema. A condição necessária e suficiente para que um corpo (representado pela congruência (4)), seja rígido, é que o tensor $U_{\mu\nu}$ *seja hemi-simétrico.*

E como complemento vamos demonstrar o

Teorema. A condição necessária e suficiente para que um corpo seja rígido e, além disso, dotado de espaço (comum a todos os seus pontos), é que $U_{\mu\nu}$ *seja idênticamente nulo.*

Na verdade, introduzindo o vector contravariante (2)

$$(31) \qquad a^{\mu} = \frac{1}{2}\left(-g\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma} u_{\alpha} u_{\beta;\gamma},$$

que representa a velocidade angular local da matéria com relação ao sistema (local) da inércia (ver [1], p. 74 e [3], p. 1661), obtém-se fàcilmente

$$(32) \qquad 2\left(-g\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} a^{\mu} u^{\nu} = U_{\tau\sigma} - U_{\sigma\tau}.$$

Portanto, se o corpo é rígido, (29) transforma-se em

$$(33) \qquad U_{\tau\sigma} = 2\left(-g\right)^{\frac{1}{2}} \varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau} a^{\mu} u^{\nu}$$

que nos dá imediatamente $U_{\tau\sigma} = 0$ se o corpo possui um espaço (comum a todos os seus pontos), visto ser então $a^{\mu} = 0$ (ver [13], p. 74, 75).

Inversamente, como $U_{\tau\sigma} = 0$ é um caso particular de hemi-simetria, a fórmula (33), então aplicável, conduz-nos a

$$(34) \qquad a^{\mu}u^{\nu} - a^{\nu}u^{\mu} = 0,$$

pois $\varepsilon_{\mu\nu\sigma\tau}$ é hemi-simétrico em $\sigma\tau$.

Mas (34) implica a existência de dois factores p e q, não conjuntamente nulos, tais que

$$(35) \qquad pa^{\mu} - qu^{\mu} = 0.$$

E como as componentes u^{μ} não podem ser todas nulas visto que $u_{\alpha}u^{\alpha} = -1$, p tem de ser diferente de zero, de contrário arrastaria o anulamento de q, o que é impossível por hipótese.

Multiplicando agora (35) por u_{μ}, somando e atendendo a que a^{μ} e u^{μ} são sempre ortogonais (1) vem

$$q\mu^{\mu}u_{\mu} = -q = 0,$$

donde

$$(36) \qquad a^{\mu} = 0,$$

em virtude de (34) e de $p \neq 0$, como desejávamos demonstrar.

3. *O número de graus de liberdade de um corpo rígido.*

Em Cinemática Clássica um corpo rígido tem, como é sabido, seis graus de liberdade. Não basta, portanto, dar o movimento de um dos seus pontos para ficar univocamente determinado o movimento de um corpo rígido.

---

(1) Ver [3], p. 1660.

(2) É indiferente recorrer às derivadas covariantes ou às derivadas parciais de u_{α}, dadas as propriedades de anti-simetria do tensor $\varepsilon^{\mu\alpha\beta\gamma}$, igual a ± 1 conforme $\mu\alpha\beta\gamma$ é uma permutação par ou ímpar de 1,2,3,4.

(1) Ver [1], p. 74. Em [3], p. 1662, a ortogonalidade entre estes dois vectores aparece como uma equação (51), quando se trata apenas de uma consequência da expressão (81) de a^{τ}.

Ora, em Relatividade não é assim e, na Relatividade Restricta, sabe-se que [1] um *corpo rígido tem em geral três graus de liberdade e não seis.*

Para chegarmos a esse resultado vamos começar por reduzir $d\sigma^2$ que figura em (26”)

$$ds^2 = d\sigma^2 + \frac{(g_{4\mu} dy^\mu)^2}{g_{44}},$$

à forma simplificada [2]

$$d\sigma^2 = dy^2 + \varphi(dy^2, dy^3), \tag{37}$$

na qual φ só envolve as diferenciais dy^2 e dy^3 (embora os seus coeficientes dependam em geral, de y^1, y^2 e y^3).

Obtém-se a forma (37) adoptando para coordenada y^1 o comprimento do arco de geodésica a partir de um ponto fixo P do espaço tri-dimensional das coordenadas y^i e para coordenadas y^2 e y^3 quaisquer dois parâmetros que sirvam para fixar as geodésicas que passam [3] pelo ponto P.

Efectivamente as equações das geodésias do espaço tri-dimensional de métrica $d\sigma^2$

$$\frac{d^2 y^i}{d\sigma^2} + \left\{ \begin{matrix} j & k \\ & i \end{matrix} \right\} \frac{dy^j}{d\sigma} \frac{dy^k}{d\sigma} = 0, \tag{38}$$

só admitem as soluções

(39) $y^1 = \sigma$, $y^2 = \text{const.}^e$, $y^3 = \text{const.}^e$,

se

$$\left\{ \begin{matrix} 1 & 1 \\ & i \end{matrix} \right\} = 0. \tag{40}$$

Mas com

$$\left\{ \begin{matrix} j & k \\ & i \end{matrix} \right\} = \gamma_{ip} \left[\begin{matrix} j & k \\ & p \end{matrix} \right] \tag{41}$$

e, por outro lado, o descriminante de $d\sigma^2$ é diferente de zero, vem, em particular,

$$\left[\begin{matrix} 1 & 1 \\ & p \end{matrix} \right] = \frac{1}{2}\left(2\frac{\partial \gamma_{1p}}{\partial y^1} - \frac{\partial \gamma_{11}}{\partial y_p} \right) = 0. \tag{42}$$

Atendendo, porém, a que y^1 é precisamente o arco σ das geodésicas ao longo das quais y^2 e y^3 são constantes, tem de ser

$$\gamma_{11} = 1, \tag{43}$$

portanto

$$\frac{\partial \gamma_{12}}{\partial y^1} = \frac{\partial \gamma_{13}}{\partial y^1} = 0. \tag{44}$$

Mas no ponto P, caracterizado por $y^1 = 0$,

$$d\sigma^2 = dy_1^2, \tag{45}$$

quere dizer

$$\gamma_{12} = \gamma_{13} = 0 \tag{46}$$

para $y^1 = 0$. Combinando este resultado (45) com (44) concluimos que

$$\gamma_{12} = \gamma_{13} = 0 \tag{47}$$

em todo o espaço tridimensional, como queríamos demonstrar.

Em consequência, para um corpo rígido podemos escrever (37) e, portanto,

$$ds^2 = dy^{1^2} + \varphi(dy^2, dy^3) + \frac{(g_{\mu 4} dy^\mu)^2}{g_{44}}, \tag{48}$$

não figurando a variável y^4 senão na última parcela.

Distingamos agora os dois casos: $U_{\mu\nu} = 0$, $U_{\mu\nu} \neq 0$.

A: $U_{\mu\nu} = 0$.

Neste caso sendo $a^\mu = 0$, como já demonstrámos, as linhas de universo dos pontos do corpo rígido, isto é, as linhas coordenadas y^4 admitem uma família a um parâmetro

$$f(y^1, y^2, y^3, y^4) = \lambda \tag{49}$$

---

[1] Ver [3].

[2] Suprimimos as plicas que figuravam em (26”). Quanto ao desenvolvimento de cálculo seguimos fundamentalmente [5].

[3] São as coordenadas normais de Gauss.

de hipersuperfícies ortogonais, bastando substituir a coordenada y^4 por y'^4 tal que

$$(50) \qquad y'^4 = f(y^1, y^2, y^3, y^4)$$

para resultarem nulos (1) os coeficientes g_{i4} de (48).

Podemos portanto admitir que

$$(51) \qquad ds^2 = dy^{1^2} + \varphi(dy^2, dy^3) + g_{44} dy^{4^2}$$

Ora dada a forma (51) é imediato que as linhas coordenadas y^1 satisfazem às equações

$$(52) \qquad \frac{d^2 y^\mu}{ds^2} + \begin{Bmatrix} \alpha & \beta \\ & \mu \end{Bmatrix} \frac{dy^\alpha}{ds} \frac{dy^\beta}{ds} = 0,$$

quer dizer, são geodésicas do universo. Por outro lado, são geodésicas ortogonais às novas linhas coordenadas y^4, donde se conclui que as hipersuperfícies (49) (ou $y^4 = \lambda$) ficam perfeitamente determinadas por uma só das linhas de universo de congruência (4). Cada uma dessas hipersuperfícies é o lugar das geodésicas ortogonais a essa linha num mesmo ponto — naquele em que a hipersuperfície intersecta a linha de universo em questão.

Se o universo é pseudo-euclideano, como sucede na Relatividade Restricta, então, aquelas hipersuperfícies coincidem com os hiperplanos ortogonais a uma linha y^4 (e portanto a todas).

Consequentemente, se $U_{\mu\nu} = 0$, o movimento fica inteiramente determinado quando se dá a linha de universo de um ponto do corpo, pois as linhas de universo dos outros pontos coincidem com as trajectórias das hipersuperficiais geodésicas ortogonais à linha de universo daquele ponto

B: $\quad U_{\mu\nu} = - U_{\nu\mu} \neq 0.$

(1) Ver [1], p. 75.

Neste caso já não é válida a passagem de (48) para (51) por intermédio de (50), mas basta substituir y^4 por

$$(53) \qquad y'^4 = f(y^1, y^2, y^3, y^4)$$

tal que

$$(54) \qquad g_{11} + g_{44} \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0,$$

para (48) se reduzir a

$$(55) \qquad ds^2 = dy^{1^2} + \varphi(dy^2, dy^3) - (B dy^2 + C dy^3 + D dy^4)^2.$$

E atendendo a (55) e a (52) imediatamente se conclue que as linhas coordenadas y^1 são geodésicas de ds^2 e ortogonais às novas linhas coordenadas y^4, isto é, às linhas de universo dos diferentes pontos do corpo rígido.

Ora, se ds^2 é pseudo-euclideana pode demonstrar-se que os coeficientes B, C e D não dependem de y^4.

Se determinarmos f pela condição de coincidir com y^4 para $y^1 = 0$ e se atendermos a que ao longo das linhas coordenadas y^1 se tem precisamente $ds^2 = dy^{1^2}$, é evidente que as geodésicas em causa (linhas coordenadas y^1) têm as equações paramétricas

$$(56) \qquad x^\mu = x_0^\mu(y^4) + y^1 x_1^\mu(y^2, y^3, y^4),$$

designando por

$$(57) \qquad x^\mu = x_0^\mu(y^4)$$

as equações paramétricas da linha de universo C_0 (parâmetros primitivos correspondentes ao ponto P).

E as fórmulas (56) permitem-nos passar das coordenadas cartesianas x^μ para as coordenadas y^i, y^4 que garantem a forma (55) de ds^2.

Identificando então (55) com

$$(58) \qquad ds^2 = dx^{1^2} + dx^{2^2} + dx^{3^2} - dx^{4^2}$$

por intermédio de (56) e não esquecendo a ortogonalidade entre C_0 e as rectas (56), que nos dá

$$(59) \qquad x_1^\mu \frac{\partial x_0^\mu}{\partial y^4} = 0$$

donde, por derivação,

$$(60) \qquad \frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^2}\frac{\partial x_0^\mu}{\partial y^4} = \frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^3}\frac{\partial x_0^\mu}{\partial y^4}$$

obtém-se finalmente,

$$(61) \qquad \begin{aligned} &\varphi(dy^2, dy^3) + (Bdy^2 + Cdy^3)^2 = \\ &= y_1^2 \int \left(\frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^2} dy^2 + \frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^2} dy^3 \right)^2 = \\ &= y_1^2 \psi(\partial y_1^2 dy^3), \end{aligned}$$

$$(62) \qquad \begin{aligned} -BD &= y_1^2 \int \frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^2}\frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^4} = y_1^2 \beta \\ -CD &= y_1^2 \int \frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^3}\frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^4} = y_1^2 \gamma \\ -D^2 &= y_1^2 \int \left(\frac{\partial x_0^\mu}{\partial y^4} + y^1 \frac{\partial x_1^\mu}{\partial y^4} \right)^2, \end{aligned}$$

designando por $\int (b^\mu)^2$ a soma

$$(63) \qquad {b^1}^2 + {b^2}^2 + {b^3}^2 - {b^4}^2.$$

Nas fórmulas (61) e (62) tanto os coeficientes de ψ como β e γ não dependem de y^1.

Fazendo agora $y^1 = 0$ em (63) deduz-se

$$(64) \qquad (D)_0 = 1, \quad \left(\frac{B}{{y^1}^2}\right)_0 = \beta, \quad \left(\frac{C}{{y^1}^2}\right)_0 = \gamma$$

e depois

$$(65) \qquad \left(\frac{B}{y^1}\right)_0 = \left(\frac{C}{y^1}\right)_0 = 0,$$

donde, por (61),

$$(66) \qquad \left(\frac{\varphi}{{y^1}^2}\right)_0 = \psi.$$

Associando estes resultados a (61), vem

$$(67) \quad (Bdy^2 + Cdy^3)^2 = \varphi(dy^2 dy^3) - y_1^2 \left(\frac{\varphi}{y_1^2}\right)_0,$$

Ora como os coeficientes de φ não dependem de y^4 o mesmo sucede a B e C, por força de (67), e ainda a β e γ, por força de (64). E portanto a D, como consequência de (62).

Os três coeficientes B, C, D são independentes [1] de y^4.

Sendo assim o grupo (a um parâmetro) de transformações

$$(68) \quad z^1 = y^1, \; z^2 = y^2, \; z^3 = y^3, \; z^4 = y^4 + h,$$

deixa invariante a forma fundamental, quere dizer, é um grupo de movimentos do universo pseudo-euclideano.

E, por outro lado, conservando os parâmetros y^i transforma em si mesmas as linhas de universo dos diferentes pontos do corpo rígido.

Em resumo: na *Relatividade Restricta as linhas de universo de um corpo rígido ou são as trajectórias ortogonais de uma família de hiperplanos (normais a qualquer delas) ou as trajectórias de um grupo a um parâmetro de movimentos de um espaço pseudo-euclideano.*

Portanto, dado o movimento de um ponto, quere dizer, conhecida a linha de universo C_0 de um dos seus pontos, há sempre um movimento possível — aquele precisamente em que as linhas de universo dos outros pontos são as trajectórias ortogonais à família a um parâmetro das hipersuperfícies geodésicas ortogonais à linha C_0. E isto tanto em Relatividade Restricta como em Relatividade Geral.

---

(1) A não ser que B e C se anulem, mas então caímos na hipótese $U_{\mu\nu} = 0$.

Mas se considerarmos apenas a Relatividade Restricta poderá haver outras soluções — caso a linha dada C_0 admitir como grupos de invariância algum ou alguns grupos a um parâmetro de movimentos do espaço pseudo-euclideano.

Mas para isso a linha C_0 tem de satisfazer a certas condições geométricas [1].

As linhas de universo dos diferentes pontos do corpo coincidem com as trajectórias daqueles possíveis grupos de movimentos [2].

[1] Ver G. Herglotz, [3], p. 403.

[2] Como os grupos de movimento conservam ds^2 e, por outro lado, as suas trajectórias são transformadas em si mesmas, a distância $d\sigma$ de duas delas infinitamente próximas não depende de θ, quere dizer, é constante ao longo dessas linhas. Essas linhas satisfazem, pois, à condição de rigidez e portanto representam um movimento possível. E a condição necessária e suficiente para que um movimento rígido satisfaça a uma tal condição é que o vector-aceleração $u_\alpha = u_{\alpha;\beta}\, u^\beta$ seja um gradiente (ver [3], p. 1662).

Assim, em Relatividade Restricta, um corpo rígido tem em geral três graus de liberdade e não seis como em Cinemática Clássica.

E se $U_{\mu\nu} = 0$ *o número de graus de liberdade é exactamente três, quer na Relatividade Restricta quer na Relatividade Geral.*

RUY LUIS GOMES

BIBLIOGRAFIA

[1] — RUY LUIZ GOMES, *A Teoria da Relatividade,* Ed. Monsanto, Lisboa, 1954.

[2] — — *Gazeta de Matemática,* N.os 57 e 58, 1954.

[3] — G. SALZMAN and A. H. TAUB, *Born-Type Rigid Motion in Relativity,* Physical Review, vol. 95, N.er 6, Sept. 1954, p. 1659-1669.

[4] — MAX BORN, *Annalen der Physik,* **30**,1,1909.

[5] — G. HERGLOTZ, *Über den von Standpunkt des Relativitätsprinzips aus als «starr» zu bezeichnenden Körper,* Annalen der Physik, 31, 393--415,1909.

[6] — A. LICHNEROWICZ, *Théories Relativistes de la Gravitation et de l'Electromagnétisme,* Ed. Masson, Paris, 1955.

Dr. Rui Gustavo Couceiro da Costa

Nos últimos trinta ou quarenta anos, esteve a direcção do Laboratório Químico da Universidade de Coimbra a cargo duma série de professores notáveis pela sua dedicação ao ensino e pelo esforço que desenvolveram no sentido de melhorarem a preparação dos estudantes e de aperfeiçoarem a formação dos seus colaboradores. Na obra assim realizada, avulta a contribuição do Dr. Rui Gustavo Couceiro da Costa prematuramente falecido — tinha apenas 54 anos de idade — em Dezembro passado.

Nomeado assistente em 1920, quando era ainda aluno da Universidade, doutorou-se em 1928, e fez o concurso para professor catedrático em 1936. Em 1937, assumiu a direcção, do Laboratório Químico.

Foi a partir de então que revelou todo o dinamismo da sua forte personalidade, indiferente a convenções ou a normas cómodas de bom comportamento.

Uma destas normas, de origem obscura, estabelecia que os directores dos estabelecimentos que partilham a dotação da Faculdade de Ciências, não deveriam, nos seus projectos de orçamento, pedir muito mais que a dotação usual. Logo que, depois da guerra, a situação económica do País começou a estabilizar-se, o Dr. Couceiro da Costa, revelando um conhecimento perfeito da enorme distância que separava aquilo que, no seu Laboratório, era possível fazer-se, de tudo o que se deveria fazer, passou a apresentar, nos projectos que elaborava, corajosas afirmações da triste realidade. Mas não se limitou a essas afirmações: com a perseverança de que só ele era capaz, realizou todas as diligências ao seu alcance para que fossem concedidos os substanciais aumentos de dotação que propusera. Foi ouvido o seu apelo. E dentre os inúmeros benefícios resultantes da maneira inteligente como se aplicaram os subsídios assim obtidos, citarei apenas a magnífica transformação que se verificou na Biblioteca: de pobre que era, tornou-se um excelente instrumento de trabalho, a que se pode recorrer com a reconfortante certeza de que nela são raras as lacunas de elementos essenciais. Mas os laboratórios de ensino e, sobretudo, os de investigação revelam bem os cuidados que lhes consagrou um homem cuja actividade era inteiramente dominada pelos dois grandes amores que lhe conheci — o da família e o do seu Laboratório.

Não foi porém apenas o Laboratório Químico que progrediu devido ao salutar inconformismo do seu Director. Animados com o sucesso do Dr. Couceiro da Costa, outros directores de serviços seguiram idêntico caminho. Eu fui um deles, e, felizmente, tenho motivos para considerar inestimável e verdadeiramente preciosa a lição que, com a sua corajosa atitude, me deu o colega e amigo que havia sido, e continuava a ser, meu Mestre.

Sempre insatisfeito, nunca o Dr. Couceiro da Costa se resignou a aceitar as deficiências do seu Laboratório — nem mesmo quando muitas delas haviam já desaparecido por virtude do perseverante esforço realizado com este fim. Da sua insatisfação e da sua pertinácia em chamar a atenção dos governantes para essas deficiências, é exemplo bem significativo a resposta que deu a um questionário em que os directores de serviços deveriam indicar os progressos verificados durante determinado período da vida nacional. Nessa resposta, mais do que aquilo que havia já sido melhorado, mereceu-lhe referência o que se deveria ter feito e aquilo em que não se progredira.

Não seria de esperar que um professor tão zeloso em promover o aperfeiçoamento do seu Laboratório, permanecesse estático no ensino que ministrava. E, na verdade, o Dr. Couceiro da Costa, sempre atento à evolução da Ciência a que se dedicara, mantinha os seus cursos permanentemente actualizados. Com uma modéstia rara entre nós recorria, com frequência, aos esclarecimentos dos seus colegas ou de simples assistentes que o pudessem elucidar em matérias estranhas ao domínio da sua competência, e cujo conhecimento é indispensável ou pelo menos útil, a uma boa compreensão da Química teórica.

Recordo ainda e presto a homenagem da minha admiração ao interesse que lhe merecia a geração nova, e à boa camaradagem que mantinha, não apenas com os seus colaboradores, mas também com todos aqueles que, no seu estabelecimento ou em estabelecimentos afins, davam esperanças de se tornarem elementos úteis à Faculdade.

Foi o Dr. Couceiro da Costa um daqueles que com maior entusiasmo e interesse seguiram a iniciativa que o Instituto de Alta Cultura tomou de estimular e desenvolver entre nós os estudos relacionados com a energia nuclear. E, logo que se verificou a possibilidade de, como Secção anexa ao Laboratório Químico, funcionar um Laboratório de Radioquímica a construir com este objectivo, vimo-lo a estimular o planeamento deste Laboratório, e a bater ansiosamente a todas as portas para que a obra recebesse a sanção oficial. Qualquer demora, ainda que curta, levava-o a insistir nas suas diligências, ou a procurar outros meios de abreviar as formalidades burocráticas.

Quando finalmente se abriram os alicerces do pavilhão que deveria vir a ser o Laboratório de Radioquímica, já o Dr. Couceiro da Costa deixara Coimbra em busca da cura da sua doença. Esta prosseguiu implacável e fatal. Entretanto prosseguia a obra que está hoje concluída e em activo funcionamento. E embora tenha já desaparecido o professor ilustre sob cuja direcção ela nasceu, todos nós, que sabemos quanto ele contribuiu para a sua realização, a consideraremos sempre como um condigno remate dos dezoito anos de brilhante actividade desenvolvida, ao serviço da Universidade de Coimbra, por um dos mais distintos e dedicados directores do seu Laboratório Químico.

J. R. DE ALMEIDA SANTOS
Prof. cated. de Física da F. C C.

PONTOS DE EXAME

EXAMES UNIVERSITÁRIOS (FÍSICA)

Universidade de Lisboa — Faculdade de Ciências — Curso Geral de Física. 2.º Exame de frequência — 1955. — Ponto n.º 1.

I

361 — Medição do coeficiente médio de dilatação de um líquido.

362 — Prove a equivalência entre os enunciados de Kelvin e de Clausius, do 2.º princípio.

363 — Livre percurso médio das moléculas de um gás.

II

364 — Ondas planas: propagação da energia.

365 — Composição de vibrações circulares de sentidos opostos.

366 — Teoria das ondas estacionárias.

III

367 — Demonstre o teorema de Gauss.

368 — Teoria do electrómetro de pratos planos horizontais.

369 — Lei de Ohm da corrente alternada.

Ponto n.º 2

370 — Cálculo da energia mecânica recebida por um gás perfeito numa transformação adiabática.

371 — Estabeleça as igualdades de Clausius.

372 — Termodinâmica do escoamento dos fluidos.

II

373 — Representação de Fresnel e sua aplicação num caso particular.

374 — Estudo do movimento oscilatório amortecido.

375 — Tubo de Kundt e suas aplicações.

III

376 — Demonstre o teorema de Coulomb.

377 — Lei de Ohm da corrente contínua.

378 — Fundamento da medição de resistências pelo processo da perda de carga.

F. C. L. — Termodinâmica — Ex., de freq. 1954-55

379 — *a*) Segundo princípio da Termodinâmica. Expressão geral dos calores específicos.

380 — *b*) Calcular a diferença dos calores específicos com pressão constante e com volume constante, para o cobre a 20,0 ° C. Valores a empregar: do coeficiente de dilatação isobárica do cobre, $d = 48{,}9 \times 10^{-6} \times °C^{-1}$; do coeficiente de compressibilidade isotérmica do cobre, $\chi = 0{,}78 \times 10^{-6}\ atm^{-1}$; da densidade do cobre, $\rho = 8{,}95\ g/cm^3$.

R: *A diferença pedida de calores específicos calcula-se pela fórmula* $C_p - C_v = T\alpha^2/\rho\chi$, *em que as letras têm os significados que indica o enunciado. Substituindo valores, resulta imediatamente* $C_p - C_v = 293{,}2 \times (48{,}9 \times 10^{-6})^2 / 8{,}95 \times 0{,}78 \times 10^{-6} \times (1013 \times 10^3)^{-1} = 1{,}02 \times 10^5\ erg/g \times °C = 0{,}244 \times 10^{-2}\ cal/g \times °C$.

F. C. L. — Mecânica Física — Ex. final 1954-55

381 — *a*) Coeficiente de viscosidade. Estabelecimento da fórmula de Poiseuille, $Q = \pi P R^4/8\eta l$.

382 — De um suporte fixo, suspende-se por um fio um corpo de massa $m = 4{,}0$ kg. Características do fio; comprimento, $l = 10$ m; secção recta, $s = 0{,}10\ mm^2$; módulo de Young, $E = 20 \times 10^3\ kp/mm^2$. *b*) Determinar o alongamento Δl do fio. *c*) Demonstrar que a equação do movimento do corpo suspenso, quando abandonado a si próprio depois de um pequeno deslocamento longitudinal z_0, é $d^2z/dt^2 = -(sE/lm)z$. Calcular o período T das oscilações.

R: *b*) *Da expressão da lei de Hooke,* $\Delta l/l = f/Es$, *resulta imediatamente, supondo que a situação a que se refere o enunciado tem lugar no campo gravítico normal,* $\Delta l = 10 \times 4{,}0\ (20 \times 10^3 \times 0{,}10) = 0{,}020$ m. *c*) *Tome-se, como eixo* Oz, *a vertical descendente que passa pelo fio, com origem* O *na posição de equilíbrio do corpo suspenso — posição à distância* $(l + \Delta l)$ *do extremo fixo do fio, na qual o corpo é actuado pelas forças verticais* mg e $-(\Delta l/l)sE$, *inversamente iguais. Quando a posição instantânea do corpo é definida pela coordenada positiva* z, *a resultante (ascendente) das forças aplicadas vale* $mg - [(\Delta l + z)/l]sE = -(sE/l)z$; *logo, a equação newtoniana do movimento do corpo escreve-se* $m\ddot{z} = -(sE/l)z$ *ou* $dz^2/dt^2 = -(sE/lm)z$: *trata-se, como é bem conhecido e pode ser verificado por integração da equação diferencial estabelecida, de um movi-*

mento oscilatório simples de período $T = 2\pi\sqrt{lm/sE}$. *A introdução dos valores numéricos dados (*E *em* N/mm^2*) conduz a*

$$T = 2\times 3{,}14 \times \sqrt{10\times 4{,}0/(20\times 10^3 \times 9{,}8)\times 0{,}10} = 0{,}28\,s.$$

(Resoluções de Arnaldo Silvério)

Universidade do Porto — Faculdade de Ciências — Física Geral — 1.º Exame de frequência — Fevereiro de 1955.

383 — Uma massa de 8 g executa um movimento oscilatório ao longo do eixo dos *x*, sujeita a uma força retardadora de 0,1 *N/cm.* Supondo o movimento não amortecido, qual é a frequência de oscilação?

R: *A equação do movimento é*

$d^2x/dt^2 + Kx/m = 0$ *ou* $x = A\cos(\omega t + \alpha)$ *em que* $\omega = \sqrt{K/m}$; K = 0,1 N/cm e m = 8 g.

A frequência será:

$$f^2 = \frac{1}{4\pi^2} \times \frac{0{,}1}{8}\frac{N}{cm}\cdot\frac{1}{g} = \frac{1}{4\pi^2}\frac{0{,}1}{8}10^5\frac{dines}{cm\cdot g};$$

donde:
$$f = \frac{10^2}{2\pi}\sqrt{\frac{1}{8}}\ \text{Hertz}$$

384 — O descarregador de cheias duma barragem de forma rectangular tem 10 m de comprimento e 3 m de altura. Gira em torno do lado horizontal inferior e está seguro por dois tirantes de aço nas extremidades do lado horizontal superior. Qual deve ser a secção mínima desses tirantes para que o descarregador suporte as forças de pressão da água?

$$\tau_{máx} = 15\ kg/mm^2$$

R: *O momento das forças de pressão da água relativamente ao lado horizontal inferior é:* $C = \int_0^H df(H-h)$ *considerando as alturas contadas a partir da superfície livre do líquido, ou:* $C = \int_0^H L\rho g h(H-h)dh = L\rho g H^3 : 6$.

O momento das forças tensoras dos tirantes é $C_1 = 2HF$ *sendo* F *a força tensora num tirante.*

Como deverá ser $C = C_1$ *vem:* $L\rho g H^3{:}6 = 2HF$; *donde* $F = L\rho g H^2{:}12$.

Como $\rho = 10^3\ kg/m^3$ *e* $g = 9{,}8\ m/s^2$, *vem:* $F = 10\cdot 9\cdot 10^3\cdot 9{,}8\ N{:}12$. *A secção mínima deverá ser:* $S = F{:}\rho$, *o que, para* $\tau = 15\ kg/mm^2$ *dá:* $S = 5\ cm^2$.

385 — Mostrar que, se P_1 e P_2 são as amplitudes de pressão de duas ondas sonoras, a diferença entre os níveis de intensidade dos sons é

$$\beta_2 - \beta_1 = 20\log(P_2 : P_1)$$

R: *A intensidade dum som está relacionada com a pressão sonora pela expressão* $I = c(P_{ef}^2 : \varepsilon)$ *em que* c *é a velocidade do som no meio de módulo de elasticidade* ε. *Donde* $I = c(P^2 : 2\varepsilon)$, *em que* P *é a amplitude da onda de pressão; portanto* $I_2 : I_1 = P_2^2 : P_1^2$. *O de intensidade f define-se, relativamente à intensidade de referência* I_0 *por:* $\beta = 10\log(I : I_0)$ *e* $\beta_2 - \beta_1 = 10\log(P_2^2 : P_1^2) = 20\log(P_2 : P_1)$.

(Resoluções de Frederico de Carvalho, estudante da F. C. P.)

Universidade de Coimbra — Faculdade de Ciências — Física Geral — 1.º exame de frequência — Março de 1955.

I

386 — Um ponto material de peso *P* está apoiado, com atrito, no interior dum aro circular, vertical, numa posição *A* tal que o raio tirado por *A* forma com a vertical um ângulo de 30°. Consegue-se o equilíbrio com uma força horizontal, complanar com o aro e dirigida para fora, cuja intensidade mínima é P/2. Determinar o coeficiente de atrito.

387 — Um projectil é lançado, para cima, com velocidade inicial, v_0, que faz com o plano horizontal 30°. Provar que a sua velocidade, acima do nível do ponto de lançamento, varia entre v_0 e $\frac{\sqrt{3}}{2}v_0$

388 — Dois espelhos esféricos, um côncavo e outro convexo, ambos com raios de curvatura de 20 cm, são colocados, frente a frente, à distância de 25 cm, centrados no mesmo eixo Para um objecto a 15 cm do espelho côncavo, determinar a posição, natureza e amplificação linear da imagem formada por duas reflexões, a primeira no espelho côncavo e a outra no convexo.

II

389 — Um ponto material de peso *P*, sob a acção de duas forças $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$, , constantes. tem aceleração igual a g/3, vertical e dirigida para cima. Suprimindo $\vec{F_1}$ o ponto passa a ter aceleração horizontal igual a $\frac{g}{\sqrt{3}}$. Dado *P*, determinar $\vec{F_1}$ e $\vec{F_2}$.

390 — Mostrar que, se o índice de refracção duma esfera for inferior a 2, não se pode formar no infinito a imagem, por refracção, de qualquer bolha no interior.

Se uma bolha estiver a 8/2 do centro, determinar a distância das imagens obtidas, por refracção, para $n = \frac{4}{3}$.

III

391 — Sobre um ponto material actuam constantemente duas forças, uma horizontal e outra vertical, que têm a mesma intensidade, *F*. Provar que, quando a velocidade for horizontal, o seu valor é a diferença dos valores algébricos das projecções da velocidade inicial segundo as direcções duma e doutra força. Deduzir a expressão da velocidade em qualquer ponto *P* da trajectória, em função de *F*, da massa *m* do móvel, do valor v_0 da sua velocidade inicial, e das coordenadas *x*, *y*, de *P*, em relação a eixos com a direcção das forças e com origem no ponto de partida.

Universidade de Coimbra — Faculdade de Ciências — Física Geral — 1.º exame de frequência — Chamada justificada — Março de 1955.

I

392 — Determinar a resultante de dois vectores $\vec{v_1}$ e $\vec{v_2}$, sabendo que a sua projecção da resultante sobre uma delas vale 4 e que $\vec{v_1} \cdot \vec{v_2} = 0$, e $|\vec{v_1} \wedge \vec{v_2}| = 12$.

393 — Sobre um ponto móvel de peso *P*, actua uma força horizontal ele intensidade igual a *P*. Sabendo que o móvel parte com velocidade inicial v_0, com direcção da resultante, determinar a posição e o tempo ao fim do qual o móvel muda de sentido.

394 — Espalhou-se sobre uma lamela de vidro horizontal certa solução que numas regiões forma uma camada de faces paralelas, noutras gotas esféricas, tudo com uma espessura de 3 mm. Um observador olhando na direcção da vertical vê as impurezas da superfície do vidro colocadas no eixo vertical das gotas a 0,5 mm acima da superfície do vidro, ao passo que na camada vê esses impurezas a 1 mm acima dessa superfície. Determinar o índice de refracção da solução e o raio de curvatura das gotas.

II

395 — Um pêndulo simples de comprimento 1 m e massa 1000 g é afastado para a posição que faz 60° com a vertical e abandonado sem velocidade inicial. Verifica-se que o fio parte assim que ultrapassa a posição que faz 30° com a vertical. Determinar a tensão máxima que o fio pode suportar.

396 — Uma lente ideal convergente de distância focal 40 cm encontra-se sobre o mesmo eixo e à distância de 40 cm da face esférica duma lente plano-convexa de espessura 3 cm, de raio de curvatura 5 cm e cuja face plana é espelhada. No interior desta lente encontra-se uma bolha de ar a 0,5 cm da face plana. Determinar a distância entre as duas imagens que podem ser vistas por um observador colocado em frente da lente convergente.

III

397 — Lança-se um ponto material de peso *P* da base dum plano de inclinação α tal que $\operatorname{sen}\alpha = \frac{3}{5}$, com velocidade inicial 19,6 m/s, dirigida para cima segundo a linha de maior declive. A força de atrito é P/5.

No mesmo instante lança-se do mesmo ponto um projectil com velocidade inicial v_0' que faz 30° com v_0. Determinar v_0' de tal modo que o projectil intercepte o ponto material quando este atinge a altura máxima no plano inclinado.

Universidade de Coimbra — Faculdade de Ciências — 1.º Exame de frequência. Março de 1955 — Electricidade.

398 — Determinar o factor de redução da bússola, considerando-a como bússola das tangentes, ou como

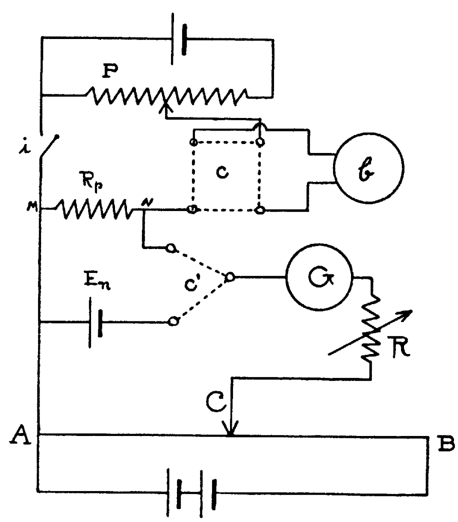


Fig. 1 — Esquema das ligações

P — *potenciómetro*
i — *interruptor*
c, c' — *comutadores*
b — *bússola*
E_n — *elemento normal*
G — *galvanómetro*
R_p — *resistência padrão*
R — *resistência de protecção a* G
C — *cursor*
AB — *reocórdio*

bússola dos senos, e medindo a intensidade da corrente por compensação. Fazer a determinação para valores da intensidade da corrente que correspondam a desvios intervalados de 10°, aproximadamente, e, para cada valor fazer a inversão da corrente na bússola.

Apresentar os resultados sob forma gráfica e basear as conclusões neste gráfico. No relatório, prestar particular atenção à teoria da bússola, discutindo a influência da forma da bobine e as dimensões do magnete; do processo de compensação empregado para a determinação da intensidade da corrente fazer apenas o esquema.

Discutir a possibilidade de utilizar a bússola para a determinação da componente horizontal do campo magnético terrestre.

R: *Consideremos a bússola das tangentes. O fiel é levado inicialmente ao zero da escala dos ângulos sem que a bússola seja atravessada por alguma corrente. Sobre o iman actua apenas o campo magnético terrestre, cuja componente horizontal* $\vec{H}$ *terá a direcção do iman em equilíbrio, portanto a direcção normal ao fiel. Quando a bússola fôr atravessada por uma corrente* I *a bobine cria um campo magnético* $\vec{B}(P)$, *função do ponto do espaço e proporcional a* I, *cuja expressão é dada pela lei de Biot e Savart.*

$$\vec{B} = \mu_0 I \oint \vec{t} \wedge \frac{\vec{r}}{r^3} dl$$

$\vec{B}$ *será perpendicular ao plano de simetria da bobine (Fig. 2) nos pontos desse plano.*

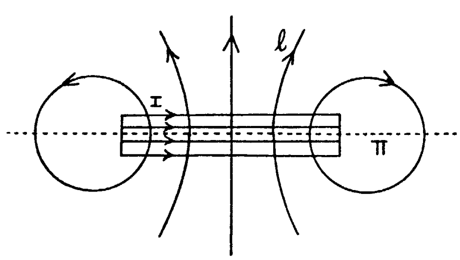


Fig. 2

I — *linhas de força do vector* $\vec{B}$
π — *plano longitudinal de simetria da bobine*

Quando a bobine está a ser atravessada pela corrente I *a agulha roda até tomar a direcção da resultante de* $\vec{B}$ *com* π_t, *sendo o ângulo de rotação a indicado pelo fiel na escala dos ângulos O campo magnético* B *que actua na agulha poderá supor-se simplesmente proporcional a* I *se a agulha for suficientemente pequena para que se possa supor que quando roda os seus polos não mudam sensìvelmente de posição:*

$$B = KI \quad (1).$$

Baseados nestas considerações poderemos desenhar a Fig. 3. H_t *é norma, a* B, *porque sendo este normal a π é normal à direcção inicial da agulha, por o fiel apontar para o zero.*

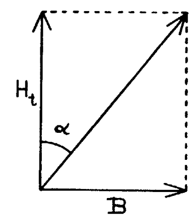


Fig. 3

Da Fig. 3:

$$B = H_t \operatorname{tg} \alpha \quad (2)$$

e devido a (1)

$$I = k \operatorname{tg} \alpha \quad (3)$$

em que

$$k = \frac{H_t}{K}$$

Resoluções de João da Providência e Costa
Assistente de Electricidade

Universidade de Coimbra — Faculdade de Ciências — Física Geral — Exame final — 2.ª chamada — 9 de Outubro de 1954.

1.° Tratar das questões apresentadas em três das seguintes alíneas:

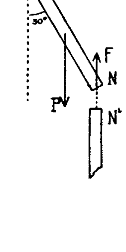
399 — Enunciar a condição de equilíbrio duma partícula assente com atrito numa superfície, entrando em consideração com o coeficiente, o ângulo e o cone de atrito.

400 — Um íman de comprimento 20 cm e de massa 10 g (homogéneo no que respeita à massa) é móvel em torno do polo sul. Determinar o seu momento magnético sabendo que o íman, em equilíbrio, faz um ângulo de 30° com a vertical quando sujeito à acção dum polo norte de 1000 unidades electromagnéticas *C. G. S.* situado na vertical do seu polo norte e a 2 cm deste.

$$\text{R: } F = \frac{p \times p'}{d^2} = \frac{p \times 1000}{4} =$$

$$250\,p = 250 \times \frac{M}{20} = \frac{25}{2} M \text{ dines}$$

$$M = p \times l = 20p$$



O íman fica sujeito às forças $\vec{P}$ *e* $\vec{F}$ *e para que esteja em equilíbrio é necessário que o momento resultante em relação ao ponto* S *seja nulo.*

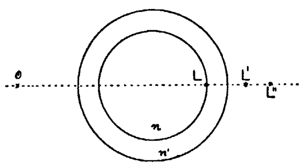
$$F \times 1 \times \mathrm{sen}\,30° = P \times \frac{1}{2} \times \mathrm{sen}\,30°$$

$$\frac{25}{2} M \times 20 = 9800 \times 10$$

donde

M = 392 *unidades electromagneticas* C. G. S.

401 — Uma esfera oca de vidro tem uma marca *L* na superfície interior e está cheia de água. Determinar a posição da imagem de *L* vista por um observador colocado sobre o diâmetro que passa por *L*, em *O*. índice de refracção da água: 4/3. Índice de refracção do vidro: 3/2. Espessura do vidro: 1 cm, e raio exterior: 6 cm.



R: *Imagem* L” *de* L *dada pelo dioptro água-vidro:*

$$\frac{n}{p_1} + \frac{n'}{p_1'} = \frac{n'-n}{r_1}$$

$$\frac{\frac{4}{3}}{10} + \frac{\frac{3}{2}}{p_1'} = \frac{\frac{3}{2}-\frac{4}{3}}{-5} \quad \textit{donde} \quad p_1' = -9$$

Imagem de L” *dada pelo dioptro vidro-ar:*

$$\frac{n'}{p_2} + \frac{1}{p_2'} = \frac{1-n'}{r_2} \quad \textit{em que } p_2 = 10$$

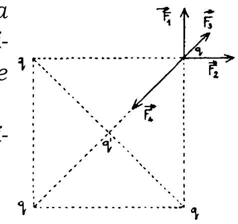
$$\frac{\frac{3}{2}}{10} + \frac{1}{p_2'} = \frac{1-\frac{3}{2}}{-6} \quad \textit{donde } p_2' = -15$$

O observador vê uma imagem virtual, L’, *a 15 cm da face da esfera voltada para ele.*

402 — Definir amplificação da observação e amplificação instrumental dum óculo e mostrar que esta é igual à relação das distâncias focais da objectiva e da ocular.

2.º — Tratar das questões apresentadas em duas das seguintes alíneas:

403 — Sobre os vértices dum quadrado estão colocadas quatro cargas pontuais iguais, uma em cada vértice, com o valor *q* unidades. Determinar o valor *q’* da carga pontual que, colocada no centro do quadrado, equilibra as quatro cargas.



R: *A carga* q *fica sujeita às forças* $\vec{F_1}$, $\vec{F_2}$ e $\vec{F_3}$ *exercidas pelas outras cargas* q, *e* $\vec{F_4}$ *exercida pela carga* q’.

Para que esteja em equilíbrio é necessário que

$$\vec{F_1} + \vec{F_2} + \vec{F_3} + \vec{F_4} = 0$$

$$F_1 = F_2 = \frac{1}{k}\frac{q^2}{a^2}$$

designando por a *o lado do quadrado;*

$$F_3 = \frac{1}{k}\frac{q^2}{2a^2}$$

A resultante de $\vec{F_1}$, *com* $\vec{F_2}$ *é um vector com a direcção e sentido de* $\vec{F_3}$ *e de móduto:*

$$\left|\vec{F_1} + \vec{F_2}\right| = F_1\sqrt{2} = \frac{1}{k}\frac{q^2}{a^2}\sqrt{2}$$

Somando esta resultante com $\vec{F_3}$, *vem:*

$$\left|\vec{F_1} + \vec{F_2} + +\vec{F_3}\right| = \frac{1}{k}\frac{q^2}{a^2}\sqrt{2} + \frac{1}{k}\frac{q^2}{2a^2} = $$

$$= \frac{1}{k}\frac{q^2}{a^2}\left(\sqrt{2} + \frac{1}{2}\right)$$

$\vec{F_4}$ *terá de ser, em valor absoluto, igual à resultante das três forças anteriores:*

$$F_4 = \frac{1}{k}\frac{|q'|q}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{1}{k}\frac{4q|q'|}{2a^2}$$

$$\frac{1}{k}\frac{4q|q'|}{2a^2} = \frac{1}{k}\frac{q^2}{a^2}\left(\sqrt{2}+1\right)$$

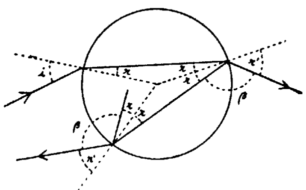
donde $\quad q' = -q\dfrac{2\sqrt{2}+1}{4}$

404 — Considerado um magnete como uma distribuição espacial de momento magnético, provar que o sistema de forças a que fica sujeito por acção dum campo magnético uniforme é equivalente ao que este campo exerce sobre um dipolo.

405 — Considerando um raio que incide na superfície duma esfera transparente, provar que o raio refracto não pode sofrer reflexão total e que considerando o ângulo que formam entre si o raio reflectido e o emergente correspondentes ao raio no interior da esfera, este ângulo se mantém sempre com o mesmo valor depois dum número qualquer de reflexões.

R: *Considerando o raio que incide segundo o ângulo* i, *refracta-se segundo o ângulo* r, *menor, dado por:*

$$\text{sen } i = n \text{ sen } r$$



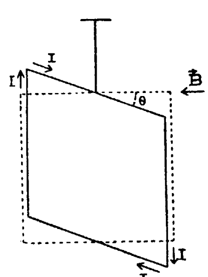
o ângulo de incidência do raio refracto na outra face da esfera vê-se, pela figura, que é igual a r *e, portanto, é sempre inferior ao ângulo limite; logo, o raio refracto não pode sofrer reflexão total ao chegar à segunda face.*

Vem para a segunda refracção: $\text{sen}\, r = \frac{1}{n} \text{sen}\, r'$ *donde* $r' = i$ *e o ângulo formado pelo raio emergente com o raio reflectido e:* $\beta = 180 - i - r$ *que é independente do número de reflexões do raio interior porque este continua sempre a incidir segundo o ângulo* r, *a refractar-se segundo o ângulo* i *e a reflectir-se segundo o ângulo* r.

406 — 3.º — Um circuito quadrado de lado *a*, que está suspenso por um fio fixado a meio dum lado, fica sujeito a um campo magnético $\vec{B}$ uniforme, de intensidade $\vec{B} = k_1 I$ em que I é a intensidade da corrente que atravessa o próprio circuito. A direcção de $\vec{B}$ é a da horizontal paralela ao plano do circuito antes de passar corrente. Sob a acção do campo $\vec{B}$ e das forças de torção, o quadrado vem a ficar, em equilíbrio, com o desvio θ. Dados os valores θ_1 e θ_2, de θ, correspondentes a correntes I_1 e I_2, determinar a relação $I_1 : I_2$.

R: *A força que o campo magnético* $\vec{B}$ *exerce sobre o elemento* ds *do circuito é dada pela lei de Laplace:*

$$d\vec{F} = I\vec{t} \wedge \vec{B}\, ds$$



em que $\vec{t}$ *é um vector unitário tangente ao elemento* ds *e com o sentido da corrente. Desta fórmula se conclui imediatamente que a resultante das forças que se exercem sobre cada um dos lados horizontais do quadrado é vertical e, portanto, não interessa para o movimento por ser paralela ao eixo de rotação.*

Para os lados verticais, a resultante das forças que se exerce em cada um dos lados é horizontal, paralela e de sentido contrário à que se exerce no outro lado. O circuito fica, portanto, sujeito a um binário.

Cálculo da intensidade da força que se exerce em cada lado:

$$d\vec{F} = I\vec{t} \wedge \vec{B}\, ds$$

Todas as forças elementares $d\vec{F}$ *têm a mesma direcção e sentido, e como* $\vec{t}$ *é perpendicular a* $\vec{B}$ *vem:*

$$dF = IB\,ds \qquad F = \int_0^a IB\,ds = IBa$$

Cálculo do momento do binário:

$$M_b = F \cos\theta \times a$$

visto que $\vec{F}$ *faz um ângulo* θ *com a perpendicular ao lado do quadrado.*

$$M_b = a^2 IB \cos\theta$$

Há equilíbrio quando o momento deste binário for igual, em valor absoluto, ao momento do binário das forças de torção:

$$c\theta = a^2 IB \cos\theta$$

O momento do binário de torção é proporcional ao ângulo de torção, donde:

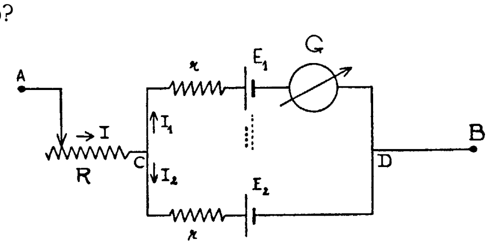
$$\frac{c\theta_1}{c\theta_2} = \frac{a^2 I_1 \times k_1 I_1 \times \cos\theta_1}{a^2 I_2 \times k_1 I_2 \times \cos\theta_2}$$

$$\frac{I_1}{I_2} = \sqrt{\frac{\theta_1}{\theta_2} \times \frac{\cos\theta_2}{\cos\theta_1}}$$

407 — 4.º — Entre os pontos *A* e *B* do circuito representado na figura aplica-se uma diferença de potencial constante igual a 100v. *R* é uma resistência variável; as resistências dos ramos CE_1D e CE_2D têm ambas o valor $r = 2$ *ohms*, e $e_1 = 10$v e $e_2 = 4$v são as *f e. m* dos respectivos geradores.

a) Determinar o valor da resistência *R* para o qual não passa corrente no galvanómetro.

b) Determinar o valor da resistência *R* para o qual a diferença de potencial entre os pontos *C* e *D* passa a ser nula devido à inversão dos polos do gerador E_1. Qual o valor da intensidade da corrente que, nestas circunstâncias, atravessa o galvanómetro?



a) $V_A - V_B = 100 = RI + e_1$

$$RI = 90 \therefore I = \frac{90}{R}$$

$$V_A - V_B = RI + rI + e_2 = 100$$

$$RI + 2I + 4 = 100$$

$$90 + 2 \times \frac{90}{R} 96$$

donde $R = 30\ \Omega$

b) $RI = 100 \therefore I = \dfrac{100}{R}$

$$I = I_1 + I_2$$

$$rI_1 - e_1 = 0 \text{ ou } 2I_1 - 10 = 0 \text{ ou } I_1 = 5$$

$$rI_2 + e_2 = 0 \text{ ou } 2I_2 + 4 = 0 \text{ ou } I_2 = -2$$

$$\frac{100}{R} = 5 - 2$$

Portanto

$$R = \frac{100}{3}\ \Omega$$

Resoluções de M. Amália Freitas Tavares
Assistente de Física

Certificado de Electrónica e Radioactividade Instituto de Rádio — Sorbonne — Paris — Junho de 1953.

2.ª Prova escrita — duração 3 horas

I — *Radioactividade:*

408 — Questão de desenvolvimento: Niveis nucleares. Estudos físicos conduzindo à sua determinação.

R: *Consultar qualquer livro-texto recente sobre Física Nuclear. Por exemplo: «Introductory Nuclear Physics» de David Halliday ou para maior desenvolvimento, «Excited States of Nuclei» de S. Devons e «Theoretical Nuclear Physics» de Blatt e Weisskopf.*

II — *Problema:*

409 — Calcular a massa, expressa em gramas, do polonio existente em uma tonelada de minério contendo 50% de urânio.

R: *O polónio encontra-se no minério de urânio no estado de equilíbrio radioactivo com o urânio devido ao facto de que o período do urânio é muito superior ao de qualquer dos seus descendentes. Uma vez que a quantidade de* AcU *e de* UII *presente no minério é muito pequena pode admitir-se que todo o urânio se encontra sob a forma de* ^{238}U. *Nesta hipótese, ter-se-á:*

$$\lambda_U N_U = \lambda_{Po} N_{Po} \quad \rightarrow \quad \frac{N_{Po}}{N_U} = \frac{\lambda_U}{\lambda_{Po}} = \frac{T_{Po}}{T_U}$$

Por outro lado virá

$$\frac{m_{Po}}{m_U} = \frac{A_{Po}}{A_U} \times \frac{N_{Po}}{N_U} = \frac{A_{Po} T_{Po}}{A_U T_U} \therefore m_{Po} = \frac{A_{Po}}{A_U} \times \frac{T_{Po}}{T_U} m_U$$

$$m_{Po} = \frac{210}{238} \times \frac{140}{4{,}5 \times 10^9 \times 365{,}25} \times 5 \times 10^5 =$$

$$= \frac{1{,}47 \times 10^{10}}{3{,}91 \times 10^{14}} = 0{,}376 \times 10^{-4} \text{ g } \textit{de} \text{ Po.}$$

visto que $T_{Po} = 140$ *dias*; $T_{^{238}U} = 4{,}5 \times 10^5$ *anos*;

$$A_{Po} = 210\ ;\ A_U = 238 \ \textit{e}\ m_U = \frac{10^6}{2} = 5 \times 10^5 \text{ g.}$$

410 — Calcular a quantidade de calor dissipada em uma hora por um miligrama de polónio.

R: tem-se $\dfrac{m_{Po}}{m_{Ra}} = \dfrac{210}{226} \times \dfrac{T_{Po}}{T_{Ra}} \quad \therefore$

$$m_{Ra} = \frac{226}{210} \times \frac{1610 \times 365{,}25}{140} \times 10^{-3} = \frac{1{,}33 \times 10^8}{2{,}94 \times 10^7} =$$

$$= 4{,}5 \text{ g } \textit{de} \text{ Ra.}$$

Donde 1 mg, *de* Po *vale* 4,5 curies *e por consequência emite* $4{,}5 \times 3{,}72 \times 10^{10}$ *raios* α *por segundo. Como* 1 hora ≪ 140 dias = T_{Po}, *o número de partículas* α *emitidas durante este tempo é proporcional ao tempo, isto* é:

$$4{,}5 \times 3{,}72 \times 10^{10} \times 3600 = 6{,}05 \times 10^{14}$$

partículas α *emitidas em 1 hora.*

Isto corresponde a uma energia libertada de

$$Q = 6{,}05 \times 10^{14} \times 5{,}3 \times 10^6 \times 1{,}6 \times 10^{-19} \times 0{,}24$$
$$= 123 \text{ p. } \textit{calorias por hora.}$$

411 — Possui-se *Ra D* puro proveniente da destruição completa de 200 milicuries de *Rn*. Ao fim de um mês, extrai-se uma certa quantidade de *Po* que, colocado em uma câmara de ionização de radiação total onde são absorvidos inteiramente os raios α, dá uma corrente de saturação de 16 *U. E. S.* Calcular a proporção de *Po* extraído.

R: *No final da destruição dos átomos de* Rn *tem-se* $(N_{RaD})^t = (N_{Rn})^{t=0}$ *o que significa que o número inicial de átomos de* Rn *se converteu em um número igual de átomos de* RaD *presentes no final da destruição do* Rn *(devido ao facto de se poder desprezar a destruição dos átomos de* RaD *formados nesse intervalo uma vez que* $T^{RaD} \gg T_{Rn}$).

Por outro lado

$$(\lambda Rn\, NRn)^0 = 0{,}2 \times 3{,}72 \times 10^{10} \rightarrow (NRn)^{t=0} = \frac{0{,}2 \times 3{,}72 \times 10^{10}}{\lambda Rn}$$

Logo

$$(\lambda RaD\ NRaD)^t = \lambda RaD\ (NRn)^{t=0} = \frac{\lambda RaD}{\lambda Rn} \times$$

$\times\ 0.74 \times 10^{10} = 3{,}52 \times 10^6$ *raios* α *emitidos por segundo pelo* RaD *no final da destruição do* Rn. *Vamos agora exprimir a formação do* Po *a partir do* RaD: *Como* TRaD ≫ TPo. TRaE *tem-se (desprezando a formação intermedia do* RaE) *que*

$$\lambda Po\ NPo = \lambda RaD\ NRaD\left(1 - e^{-\lambda Pot}\right) \approx \lambda RaD\ NRaD\ \lambda_{Po} t$$

visto que um mês é bastante inferior ao período do Po. *Logo, substituindo* λRaD NRaD *pelo seu valor calculado precedentemente, tem-se*

$$\lambda_{Po} N_{Po} \approx \frac{\lambda RaD\, \lambda_{Po}}{\lambda Rn} 0{,}74 \times 10^{10} \times 30$$

Actividade do Po *no fim de um mês:*

$$\lambda Po\, NPo \approx 2{,}22 \times 0{,}693 \frac{TRn}{TRaD\, TPo} 10^{11} = 1{,}53 \times \frac{3{,}82 \times 10^{11}}{22 \times 365{,}25 \times 140} = \frac{5{,}85 \times 10^{11}}{1{,}12 \times 10^6}$$

λPo NPo ≈ $5{,}22 \times 10^5$ *raios* α *emitidos por segundo pela quantidade de* Po *existente ao fim de um mês.*

Uma parte deste Po *foi medida em uma câmara de ionização onde ela produziu* $\frac{16}{4{,}8 \times 10^{-10}}$ *pares de iões por segundo o que corresponde à emissão de*

$$\frac{16}{4{,}8 \times 10^{-10} \times 1{,}53 \times 10^5}$$

raios α *por segundo sob um ângulo sólido de* π *esterradianos que são absorvidos no gás da câmara. Logo o número de raios* α *emitidos durante o mesmo tempo pela fonte foi o dobro deste. Isto é:* $2 \times 2{,}19 \times 10^5 = 1{,}38 \times 10^5$ *raios* α *emitidos por segundo pela porção extraída de* Po. *Como a proporção das massas presentes nas duas quantidades é igual à razão do número de raios emitidos nos dois casos teremos:*

$$\frac{m'}{m} = \frac{4{,}38 \times 10^5}{5{,}22 \times 10^5} = 0{,}84$$

Logo a proporção de Po *extraída foi de* 84%.

412 — Quanto tempo será necessário esperar para que se possa extrair de novo uma quantidade *Po* dando, nas mesmas condições, uma corrente de saturação de 100 *U. E. S.*? Calcular a quantidade máxima de *Po*, expressa em curies, que se poderia extrair deste *RaD*.

Desprezar-se-á a formação intermédia do *RaE*.

Dados: Período do *Po* = 140 dias
» » *Ra* = 1610 anos
» » ^{238}U = $4{,}5 \times 10^9$ anos
» » *Rn* = 3,82 dias
» » *RaD* = 22 anos

Número de pares de iões produzidos por um raio α do *Po* = $1{,}53 \times 10^5$. Energia dos raios α do *Po* = 5,30 *MeV*.

1 *p caloria* 4,18 *Joules*; *e* = $4{,}8 \times 10^{-10}$ *U. E. S.*; Número de *Avogadro* = $6{,}02 \times 10^{23}$ átomos por átomo-grama.

R: *A* 100 U. E. S. *corresponde uma actividade do* Po:

$$(\lambda_{Po} N_{Po})' = \frac{2 \times 100}{4{,}8 \times 10^{-10} \times 1{,}53 \times 10^5} = 2{,}78 \times 10^6$$

raios α *emitidos por segundo pelos átomos de* Po. *Esta actividade do* Po *é aquela que corresponde à quantidade de* Po *formada a partir do* RaD *puro ao fim de um tempo* t_2. *Com a mesma hipótese simplificadora atrás adoptada (desprezar a formação intermédia do* RaE) *vamos calcular este tempo mediante a equação de formação do* Po *a partir do* RaD *inicialmente puro. Como esta actividade do* Po *já é uma fracção importante da actividade do equilíbrio de regime entre o* Po *e o* RaD *a aproximação feita atrás de se limitar ao primeiro termo o desenvolvimento em série da exponencial* $e^{-\lambda_{Po} t}$ *deixa de ser válida e tem que se calcular* t_2 *a partir da fórmula exponencial:*

$$e^{-\lambda_{Po} t} = 1 - \frac{\lambda_{Po} N_{Po}}{\lambda RaD\, NRaD} \quad \therefore$$

$$t = \frac{1}{\lambda_{Po}} \ln \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda_{Po} N_{Po}}{\lambda RaD\, NRaD}} =$$

$$= \frac{1}{\lambda_{Po}} \ln \frac{\lambda RaD\, NRaD}{\lambda RaD\, NRaD - \lambda_{Po} N_{Po}}$$

Com os valores correspondentes a t_2 *tem-se:*

$$t_2 = \frac{T_{Po}}{0{,}693} \ln \frac{3{,}52 \times 10^6}{(3{,}52 - 2{,}78) 10^6} =$$

$$= 202 \ln 4{,}75 = 202 \times 2{,}30 \times 0{,}672 = 314 \text{ dias.}$$

Ao fim de 30 dias, depois de extrairmos 84% *da quantidade presente de* Po *nesse instante, a parte restante ficou com uma actividade igual à diferença das actividades total e extraída, isto é,* $(5{,}22 - 4{,}38)\, 10^5 = 0{,}84 \times 10^5$ *raios* α *por segundo emitidos pelo* Po *restante. Esta actividade é igual áquela que se reformaria a partir do* RaD *inicialmente puro ao fim de um intervalo de tempo* t_1 *que se pode calcular de maneira análoga a* t_2:

$$t_1 = \frac{140}{0{,}693} \ln \frac{3{,}52 \times 10^6}{(35{,}2 - 0{,}84) 10^5} =$$

$$= 202 \times 2{,}30 \times \log 1{,}02$$

$$t_1 = 465 \times 0{,}0086 = 4 \text{ dias.}$$

Portanto o tempo ao fim do qual se pode extrair da parte restante uma quantidade de Po *dando* 100 U. E. S. *é igual à diferença* $t_2 - t_1 = 314 - 4 = 310$ *dias. A quantidade máxima de* Po, *expressa em curies, que se poderia extrair deste* RaD é a *mesma que a quantidade de* RaD *presente, expressa também em curies.*

Vale portanto

$$\frac{3{,}52 \times 10^6}{3{,}72 \times 10^{10}} = 0{,}95 \times 10^{-4} \textit{ curies de } \text{Po.}$$

(Resoluções de Sant'Ana Dionísio, Bolseiro em Paris)

ERRATA

No último número da «Gazeta de Física» incluímos, por lapso, a 1.ª prova escrita para o Certificado de Electrónica e Radioactividade, na rubrica EXAMES DO ENSINO MÉDIO, do que pedimos desculpa aos nossos leitores.

Noticiário

Doutoramentos

Doutorou-se nos dias 18 e 19 de Abril de 1955, em Ciências Físico-Químicas, na Faculdade de Ciências de Lisboa, o Assistente de Física desta Faculdade, José Francisco Vitorino Gomes Ferreira. O Dr. Gomes Ferreira apresentou, como tese de doutoramento, um trabalho intitulado: *Contribuição para o estudo da intensidade das bandas satélites das riscas* $L\alpha$ *de elementos de número atómico compreendido entre 73 e 92.* A parte experimental deste trabalho foi realizada pelo autor, como bolseiro do Instituto de Alta Cultura, no Centro de Estudos de Física, anexo ao Laboratório de Física da Faculdade de Ciências de Lisboa.

Também se doutorou, em Paris, no dia 21 de Outubro de 1955, a licenciada em Ciências Físico-Químicas pela Faculdade de Ciências de Lisboa, Maria do Carmo Anta de Sousa. A Dr.ª Maria do Carmo Anta de Sousa apresentou, como teses de doutoramento, dois trabalhos intitulados: *Contribuition à l'étude des actions des rayons* α *du polonium sur l'eau et les solutions aqueuses* e *Propriétés nucléaires et chimiques de l'astate.* A autora trabalhou no Laboratório Curie, em Paris, onde permaneceu durante três anos, subsidiada pelo Governo Francês.

Concurso para Professor Catedrático

Em Dezembro de 1955 realizaram-se, na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa, provas públicas para preenchimento de uma vaga de Professor Catedrático de Química, da referida Faculdade.

Concorreram os Profs. Doutora D. Branca Edmée Marques e Doutor Kurt Jacobsohn. Os candidatos foram ambos aprovados em mérito absoluto, tendo sido classificado em 1.º lugar o Prof. Kurt Jacobsohn.

Criação de uma licenciatura em Física

Em Janeiro findo, o Prof. Sr. Dr. José Sarmento, da Faculdade de Ciências da Universidade do Porto, referiu-se novamente, na Assembleia Nacional, à necessidade de se modificar o plano de estudos de Física nas nossas Faculdades de Ciências. Recordou ter já apontado alguns factos que provam encontrar-se esse estudo não só totalmente desactualizado mas também em condições extraordinàriamente deficientes em relação ao pessoal docente, auxiliares de laboratórios, material, dotações, etc. Apontou a necessidade de que na futura reforma do plano de estudos das Faculdades de Ciências, que não deve fazer-se esperar, se dê à formação dos cientistas puros a importância merecida.

Às Faculdades de Ciências — acrescentou — deverá competir a formação dos cientistas indispensáveis para o nosso futuro desenvolvimento económico. Impõe-se, por isso, a necessidade de criar uma licenciatura em Física. A sua duração não deveria ser inferior a cinco anos. Na elaboração do seu plano de estudos deveria atender-se ao prodigioso e recente desenvolvimento deste ramo das ciências e à necessidade de uma sólida preparação matemática.

Profundas modificações se deverão fazer nas nossas Faculdades de Ciências para que o futuro físico adquira uma formação que lhe permita abordar, sem dificuldades de maior, o estudo de qualquer dos seus domínios de especialização.

A *Gazeta de Física* congratula-se com as palavras do Prof. Sr. Dr. José Sarmento pois uma das atitudes que tem mantido firmes desde o seu primeiro número é exactamente a da defesa da criação de uma licenciatura em Física. Desejamos, calorosamente, que tudo se encaminhe para essa efectivação.

Conferência sobre energia atómica

Sumário da Conferência de Sir JOHN COCKCROFT, F. R. S., Director do Estabelecimento de Investigação de Energia Atómica de Harwell pronunciada no Anfiteatro de Física da Universidade de Coimbra a 11 de Julho de 1955.

Na Conferência descrevem-se os edifícios e salas para investigação do Estabelecimento de Harwell. Esta descrição será ilustrada por uma película a exibir no fim. Refere-se o trabalho realizado com os dois reactores moderados a grafite que inicialmente se construiram. O mais potente, que se designa por B. E. P. O., é a fonte principal de isótopos radioactivos. É além disso um instrumento para o desenvolvimento da técnica nuclear. Os Físicos também o empregam para medir propriedades, importantes para os seus trabalhos, de núcleos atómicos. A propósito descreve-se a utilização de feixes de neutrões para estudar a interacção com isótopos de plutónio e outros elementos. Estão em construção dois potentes reactores nucleares para investigação, com os quais se obtém uma intensidade de radiação muito mais elevada. A sua descrição é acompanhada da indicação das funções que eles virão a desempenhar no nosso programa futuro. Descreve-se também o trabalho realizado com os reactores de energia zero os quais são instrumentos importantes para o Físico que se ocupa de reactores. O Zephyr, reactor rápido de energia zero tem a sua utilidade no estudo do comportamento nuclear de reactores de neutrões velozes e das possibilidades futuras destes reactores como reactores reconstituintes («breeder reactors»). Estes permitiriam o consumo económico de urânio, desejável numa instalação de força motriz nuclear. No estudo da Física Nuclear das energias elevadas recorre-se a feixes de protões e neutrões extraordinàriamente velozes, com energias que vão até 180 milhões de volts. A natureza das forças que ligam entre si núcleos atómicos é estudada através de colisões de nucleões muito velozes. Os resultados obtidos mostram que nestas colisões as direcções do spin dos núcleos ficam fortemente alinhadas. Refere-se o trabalho, ainda em progresso, que tem em vista a produção de partículas nucleares de energia muito elevada. Um grupo de investigadores estuda os limites de energia nos raios cósmicos. Estes chegam a atingir energias 1000 milhões de vezes maiores do que as que é legítimo esperar dos nossos laboratórios. O mecanismo que leva à origem destas partículas é um prometedor campo de especulação para os cosmologistas.

Projecto inglês sobre as centrais atómicas

A Direcção da Energia Nuclear da Grã-Bretanha acaba de publicar um Livro Branco no qual entre outras coisas se afirma:

A energia nuclear é a energia do futuro. O futuro da Inglaterra como país industrial depende da capacidade dos seus cientistas e da rapidez com que eles porão em funcionamento as novas técnicas.

A dificuldade crescente em extrair quantidades suficientes de carvão, e a necessidade, também crescente, de força motriz, nomeadamente na forma de energia eléctrica, justificam, só por si, o esforço necessário ao estabelecimento de uma rede de energia nuclear.

Está em construção a primeira central experimental, em Calder Hall (Cumberland) para produzir electricidade em grande escala a partir daquela forma de energia.

O preço de custo da electricidade é ainda incerto. O custo daquela central é de 1,2 a 1,6 milhões de contos, e o da carga inicial de urânio de 400 mil contos. Será preciso renovar a carga periòdicamente, com um período que pode ir de 2 a 5 anos. A relação energética (energia calorífica) em peso será aproximadamente 1 tonelada de combustível nuclear para 10.000 toneladas de carvão. Calcula-se que o preço da energia, eléctrica embora incerto, será aproximadamente de 0,6 penny (20 centavos) o quilowatt-hora.

A construção de centrais comerciais só poderá começar em 1957 e está previsto que em 1960-61 estarão duas em funcionamento, arrefecidas a gás, e outras duas em 1963. As quatro produzirão entre 400.000 e 800.000 kW.

Se tudo correr bem construir-se-ão outras pilhas das quais algumas com plutónio, então formado em quantidades importantes. Em 1965 instalar-se-ão outras quatro e a potência total das oito, estas e as quatro indicadas acima, iria de 1,5 a 2 milhões de kW. Em 1975 produzir-se-iam 10 a 15 milhões de kW, ou seja o correspondente a 40 milhões de toneladas de carvão por ano.

(De *Atomes*, n.º 109)

Microscópio fónico

O poder de resolução de um microscópio (distância mínima de dois pontos susceptíveis de serem separados) é de 6 *Å* (6.10^{-8} cm) para o microscópio electrónico com lente magnética, e de 20 a 25 *Å* para o mesmo microscópio com lente electrostática. Mostra o cálculo que a substituição dos electrões por iões permitiria alcançar um poder separador de 0,5 *Å*, pois o comprimento de onda associado é cerca de 100 vezes menor do que para os electrões. O sr. Gauzit, na Sorbonne, obteve resultados satisfatórios com tal substituição. Transformou-se para isso um microscópio industrial clássico (C. S. F.) substituindo a fonte de electrões por uma fonte térmica de iões alcalinos. Trata-se de um filamento de tungsténio coberto por um alumino-silicato de lítio, à temperatura de 1.200°C. A tensão aceleradora é de 50.000 V.

(De *Atomes*, n.º 109)

A descoberta do elemento 101

A descoberta do elemento 101 foi obra da admirável equipa dirigida por SEABORG e de que faz parte STANLEY THOMPSON descobridor de um processo para isolar o plutónio. A existência do elemento, bem como a do 102, ainda desconhecido, foi prevista pelo cálculo das energias de ligação das partículas elementares, dos núcleos, dos gráficos: período do radioelemento, energia das partículas alfa emitidas, e por raciocínios analógicos muito complicados. A equipa obteve 3 dos 11 isótopos previstos:

$$^{253}99 + \alpha \rightarrow n + {}^{256}101$$
$$^{253}99 + \alpha \rightarrow 2n + {}^{255}101$$
$$^{253}99 + \alpha \rightarrow 3n + {}^{254}101$$

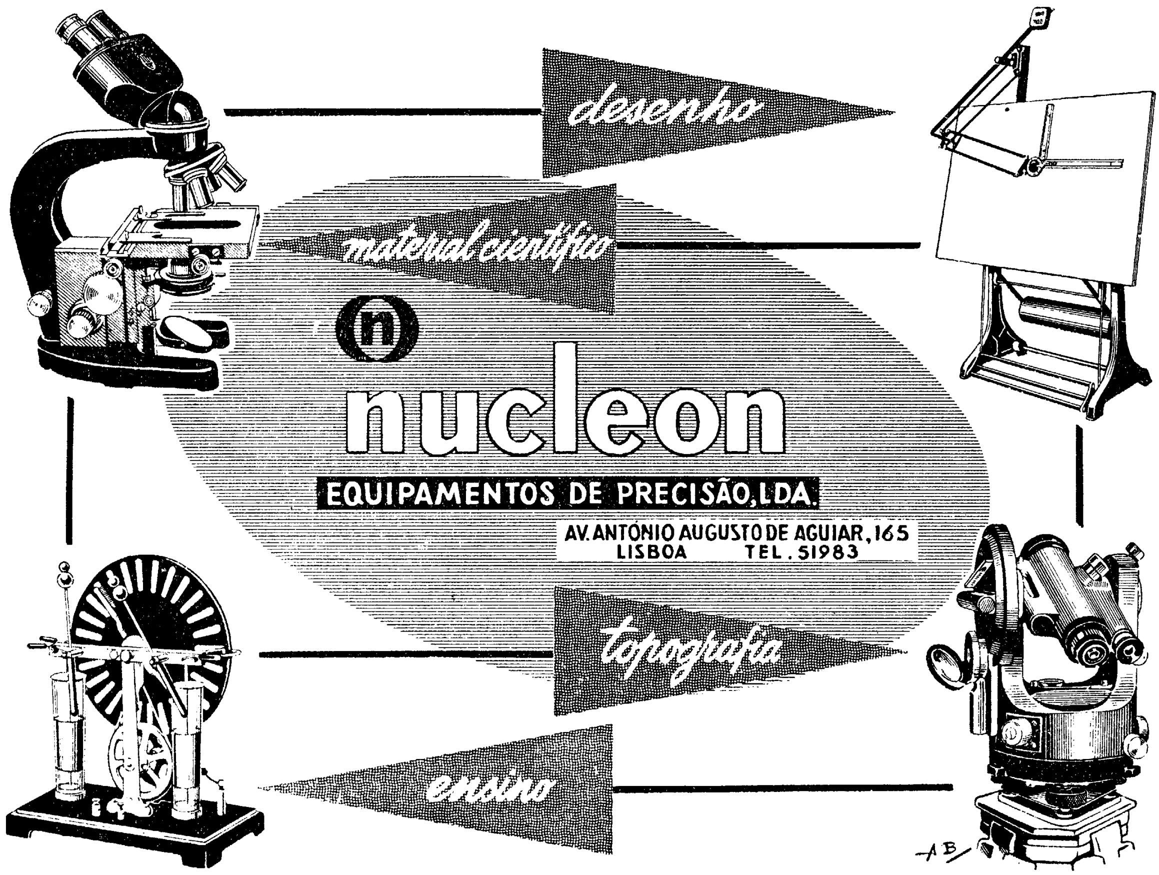
Os períodos vão de meia hora a uma hora. Nas separações que permitiram isolar aqueles átomos foram empregadas resinas a elevada temperatura, e moléculas orgânicas (lactatos e butiratos) que separam bem os transurânianos. A quantidade de 101 produzida foi de uma vintena de átomos pesando cerca de 10^{-20} g., o que já é muito notável.

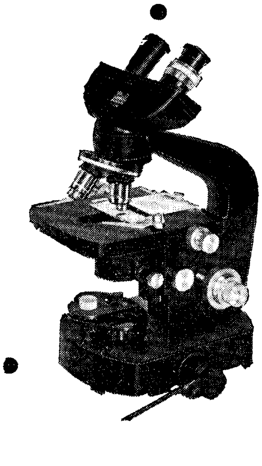
(De *Atomes*, n.º 111)

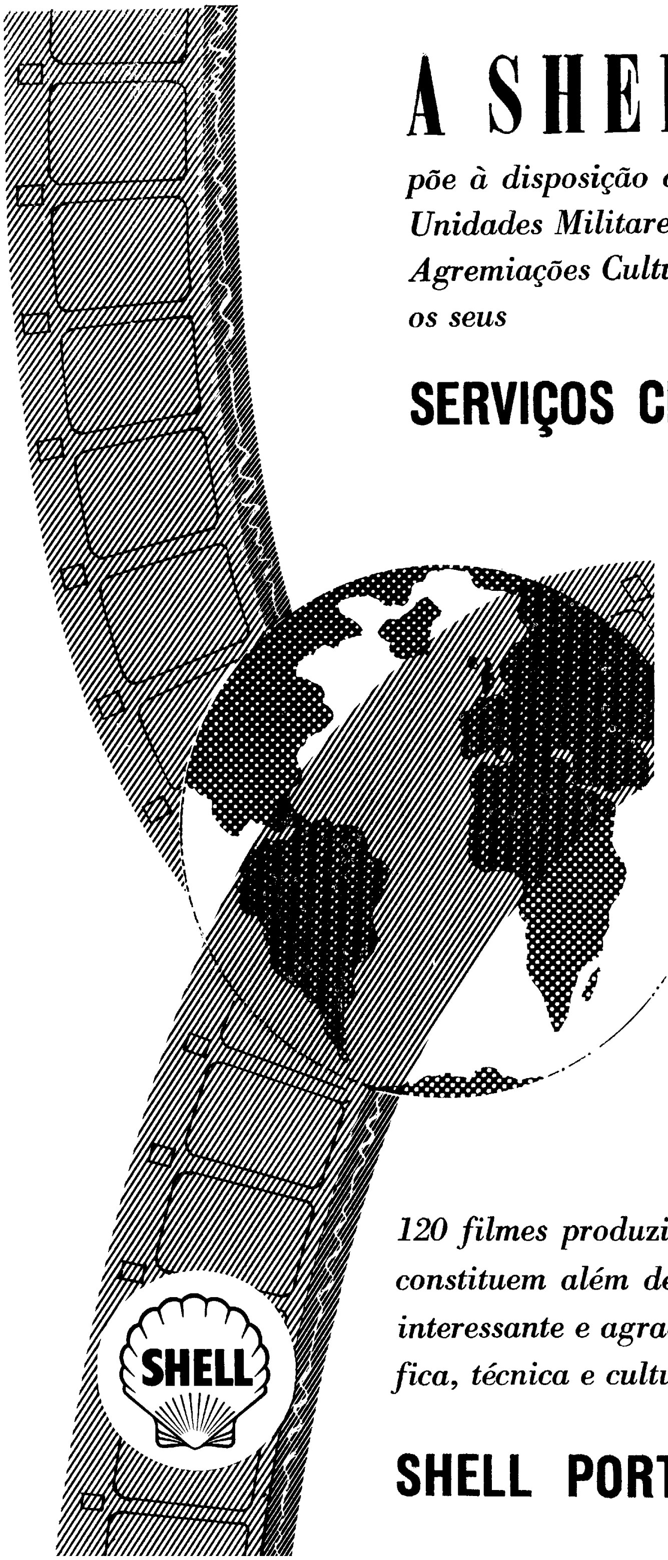
Prémios Nóbel

O prémio Nóbel foi atribuído, em 1955, aos professores W. E. Lamb e P. Kusch, ao primeiro, pelos seus trabalhos respeitantes à estrutura fina do espectro do hidrogénio, e ao segundo, pelos seus estudos relativos ao momento magnético dos electrões. O Dr. Lamb, é americano, natural de Los Angeles; o prof. Kusch nasceu na Alemanha mas naturalizou-se americano. Kusch, além de professor de Física, é engenheiro de Westinghouse, onde trabalha no Gabinete de Investigações de Guerra da Universidade de Colúmbia e pertence à Companhia dos Telefones Bell.

O prémio Nóbel da Química foi atribuído ao professor Vincent du Vigneaud, da Universidade Cornell, nos Estados Unidos, pelos seus trabalhos em Bioquímica. Deve-se-lhe a primeira síntese de uma hormona poliptética.


desenho
material científico
nucleon
EQUIPAMENTOS DE PRECISÃO, LDA.
AV. ANTÓNIO AUGUSTO DE AGUIAR, 165
LISBOA TEL. 51983
topografia
ensino





A SHELL

põe à disposição dos Estabelecimentos de Ensino, Unidades Militares, Organismos Corporativos, Agremiações Culturais ou Regionais, etc., os seus

SERVIÇOS CINEMATOGRÁFICOS

filmes sobre:

- ★ **AGRICULTURA**
- ★ **AVIAÇÃO**
- ★ **MOTORES**
- ★ **PETRÓLEO**
- ★ **e de interesse geral**

120 filmes produzidos pela Shell Film Unit e que constituem além de precioso auxiliar didático um interessante e agradável meio de divulgação científica, técnica e cultural.

SHELL PORTUGUESA, S. A. R. L.