Criação e aniquilação de comboios e anti-comboios

Jorge Dias de Deus e *Teresa Peña* *

Temos para contar uma história que mostra que há sempre coisas novas a descobrir, inesperadamente, mesmo nos assuntos aparentemente mais simples. O nosso exemplo mostra como um assunto básico (muito básico) de Física Clássica pode abrir uma porta para se voar na direcção das coisas "difíceis", as da Física Quântica, que se deixam na gaveta para reserva dos cursos "avançados".

Este é um problema elementar – elementaríssimo – e nunca nos passou pela cabeça que pudesse ser interessante. Num teste de Mecânica, para alunos do 1º ano de Engenharia Física Tecnológica do IST um de nós (Jorge Dias de Deus) colocou o seguinte problema (repescado sabe-se lá de onde!):

– Um comboio tem de ir da estação *A* até à estação *D*. A distância entre elas é de *U* unidades de distância. O tempo levado a percorrer essa distância tem de ser, pelo horário, *T* unidades de tempo. A aceleração máxima do comboio é *a* e a desaceleração máxima é *d*. Pergunta-se: Qual é a **velocidade mínima** *v* de cruzeiro que o comboio deve ter para cumprir o horário?

Graficamente a resolução do problema é fácil de perceber (ver Fig. 1). Num gráfico de *v* em função do tempo *t* temos um trapézio. O coeficiente angular *a* do segmento da recta inicial controla a aceleração, o coeficiente angular – *d* do segmento da recta final controla a desaceleração, a distância na base dá o tempo total *T*, a área do trapézio (integral de *v* ao longo de *t*) dá a distância *U* e naturalmente só há *uma solução v*: a altura do trapézio.

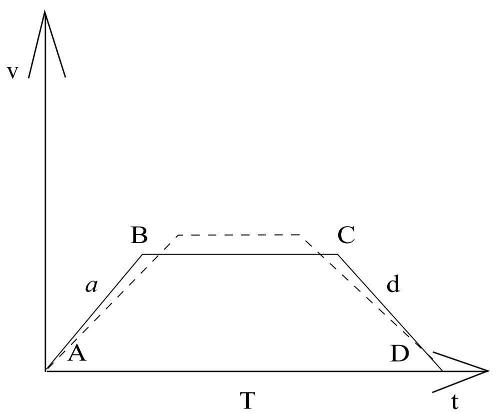

Fig. 1

Note-se que é possível atingir uma velocidade maior usando, por exemplo, uma aceleração menor durante mais tempo, desde que no fim se obtenha a mesma área (a mesma distância *U*). Ver o percurso a tracejado na Fig.1. A velocidade de cruzeiro mínima é, portanto, a que corresponde a usar o máximo de aceleração *a* (e o máximo de desaceleração *d*).

Para resolver matematicamente o problema temos as equações:

$$\begin{aligned} &t_1 = v/a \\ &t_3 = v/d \\ &t_1 + t_2 + t_3 = T \\ &\frac{1}{2}at_1^2 + vt_2 + vt_3 - \frac{1}{2}dt_3^2 = U \end{aligned} \qquad (1)$$

São quatro equações a quatro incógnitas, t_1, t_2, t_3 e *v*, com $t_1 = t_{AB}$, $t_2 = t_{BC}$, $t_3 = t_{CD}$, pelo que podemos escrever t_2 em função de t_1 e t_3 para obter das três primeiras equações de cima

$$t_2 = T - \left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d}\right)v \qquad (2)$$

e, finalmente, a partir da quarta equação do sistema

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d}\right)v^2 - Tv + U = 0, \qquad (3)$$

determinar

$$v = \frac{T \pm \sqrt{T^2 - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d}\right)U}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d}\right)}. \qquad (4)$$

(Note-se a simetria entre os papéis de *a* e *d*). Há, portanto, duas soluções (a equação em *v* é quadrática!) que são ambas positivas. (Ver o apêndice para verificar que ambas as soluções de (4) são positivas.)

Os (bons) alunos – e o professor – resolveram o problema escolhendo a solução com o menor valor de *v* (escolheram o sinal menos na fórmula resolvente) com o argumento de que se pedia a velocidade mínima... No entanto, claro que a questão da velocidade mínima tinha, como vimos, só a ver com outra coisa: com o uso da aceleração máxima e a desaceleração máxima, na Eq. (4).

Um único aluno (mais que bom!) fez todas as contas certas até ao fim e depois concluiu: devo estar errado pois encontro duas soluções positivas para *v* e isso não faz sentido!

Em Física estamos habituados a deitar fora soluções imaginárias, complexas ou negativas quando se busca algo que se sabe ser real e positivo. Mas, aqui, as duas soluções são positivas! Por outro lado, olhando para o trapézio da Fig.1, desde que se use a aceleração máxima *a* e a desaceleração máxima *d*, "parece evidente" que só há **uma solução** (só há um trapézio com base *T*, coeficientes angulares *a* e *d* e área *U*).

Portanto, a questão do (mais que bom) aluno era mais do que pertinente. E obrigou o professor, que tem por obrigação suspeitar das primeiras "evidências", a interromper a pachorrenta correcção dos testes e a buscar com paciência o sentido para a segunda solução da equação.

A partir das Eqs. (2) e (4) podemos escrever

$$t_2 = \pm\sqrt{T^2 - 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d}\right)U} \qquad (5)$$

Das duas soluções *v* e *v'* (ambas positivas) da Eq. (4) a maior (*v'*) corresponde à solução t'_2 negativa de (5).

Isto é, para a segunda solução $v' > v$ da velocidade

$$t_2' = -t_2 \qquad (6)$$

e

$$t_1' + t_3' = T + t_2 \qquad (7)$$

Portanto, a terceira equação do sistema (1) está satisfeita. Para perceber melhor a equação da área (quarta equação em (1)) que dá o espaço percorrido no caso da solução t'_2 negativa (ou v', com $v' > v$), o mais simples é desenhar o gráfico (Fig. 2).

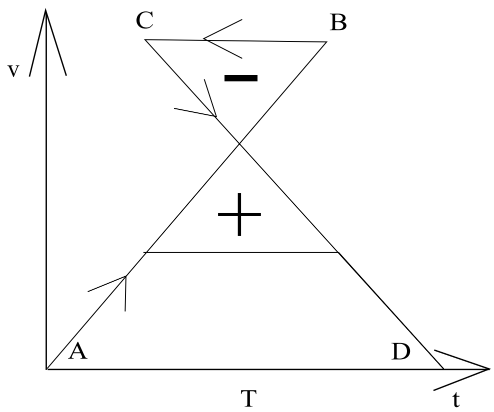

Fig. 2

A figura (com t'_2 negativo mas v' positivo!) corresponde ao mesmo deslocamento U do percurso original, pois os dois triângulos indicados têm áreas iguais e são percorridos em sentidos opostos. (Para calcular o integral correspondente ao avanço do comboio tem de se escolher um sentido para a circulação sobre a linha $v(t)$). A solução com t'_2 negativo é, do ponto de vista matemático, inteiramente legítima.
Na Física Clássica, no entanto, esta solução não tem sentido! Um comboio não pode andar para trás no tempo! A Física (Clássica) parece ter razões que a Matemática desconhece... Mas isso não é verdade na Física Quântica Relativista.

Curiosamente, este problema (tão simples, tão simples...) de haver duas soluções numa equação do segundo grau é o mesmo problema que levou Dirac à introdução das anti-partículas e Feynman à sua interpretação como partículas a mover-se para trás no tempo. As Figs. 1 e 2 são, de facto, diagramas de Feynman para... comboios e anti-comboios, como se estes fossem objectos quânticos!
Mas então é apenas no contexto da Mecânica Quântica Relativista que as anti-partículas podem existir?
Ao passo que no trajecto da Fig. 1 tudo é normal, o comboio move-se para diante no tempo, com interações provocadas pelo condutor (acelerar, travar, etc.), no trajecto da Fig. 2 tudo é estranho (impossível?...). Neste caso a história conta-se da seguinte maneira: Em A um comboio inicia a viagem; em C, a partir do vácuo, há criação de um par comboio - anti-comboio; o anti-comboio encontra-se em *B* com o comboio que partiu de A e aniquilam-se (dando vácuo); e, entretanto, o comboio que vem de *C* chega a *D*. Como na Mecânica Quântica todos os objectos (comboios) são iguais, o comboio que chega a *D* é *igual* ao comboio que saiu de *A*.
Quando vamos esperar alguém ao comboio será que a pessoa que chegou veio pela trajectória da Fig. 1 ou, pelo contrário, pela trajectória da Fig. 2? Ninguém pode responder, porque o resultado final é o mesmo! Só que, no caso da Fig. 1, é a mesma pessoa que partiu, no caso da Fig. 2, é uma cópia exacta ("clone") dela própria. Qual é a diferença? Nenhuma?...
Aqui já estamos a tocar nos mistérios da Relatividade e da Mecânica Quântica, com a materialização de energia em matéria e anti-matéria (e vice-versa) e a indiscernibilidade dos objectos quânticos. As questões que se põem são as seguintes:
1– Por que é fácil produzir partículas e anti-partículas e não é fácil produzir comboios e anti-comboios?
2 – Por que são todos os electrões idênticos enquanto todos os comboios são diferentes?
Em relação à primeira questão, de facto os positrões existem (são tão reais que, com eles, se fazem "scannings"

do nosso cérebro!), mas nunca ninguém viu um anti-comboio. A justificação mais simples consiste em observar que uma flutuação (com violação da conservação) de energia do vácuo ΔE é tanto mais estável quanto menor for ΔE, devido à relação de incerteza, $\Delta E\ \Delta t$ = constante. Ora, para gerar o par comboio (de massa M) e anti-comboio (de massa $\bar{M}=M$), é preciso um ΔE enormíssimo, $\Delta E \geq Mc^2 + \bar{M}c^2 = 2Mc^2$, o que torna a operação impossível. Além do mais, as interacções são entre partículas elementares e não directamente comboios. São estas as razões que a Física conhece e a Matemática desconhece. Em relação à segunda questão, e no seguimento da questão anterior, as partículas poderão ser todas idênticas, mas as combinações macroscópicas de electrões e quarks para produzir comboios e anti-comboios, envolvendo números da ordem de grandeza superior ao número de Avogadro, 10^{23}, conduzirão sempre, na prática, a comboios diferentes. Todas as bolas brancas podem ser idênticas, todas as bolas pretas podem ser idênticas, mas todas as sequências de bolas brancas e bolas pretas, tiradas de um saco sem fundo (os 10^{24}!), acabarão por ser diferentes. A razão da quebra de indiscernibilidade é uma consequência estatística observada em sistemas macroscópicos. O tamanho faz toda a diferença!
Nesta divagação quântico-relativista poderíamos ainda discutir a interferência entre os diagramas das Figs. 1 e 2 e por aí fora... Para já fiquemo-nos com a dúvida sobre a pessoa que fomos esperar ao comboio: será ela própria ou o seu “clone”? E daí?

Apêndice

(As duas soluções da Eq. (4) são reais positivas)

Se o comboio transitar na viagem de A a D de um período t_1 de aceleração para um período t_3 de desaceleração, sem passar por um período de velocidade constante (ver Fig. 3), tem-se o sistema de equações

$$\begin{aligned} t_1 + t_3 &= T \\ a t_1 &= d t_3 \end{aligned} \tag{8}$$

O caminho percorrido é então dado por

$$\frac{1}{2} a t_1^2 + \frac{1}{2} d t_3^2 \geq U \tag{9}$$

O sistema de equações anterior implica que

$$\frac{1}{2} a \frac{d^2}{(a+d)^2} T^2 + \frac{1}{2} d \frac{a^2}{(a+d)^2} T^2 \geq U \tag{10}$$

o que se reescreve como

$$T^2 \geq 2\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{d}\right) U \tag{11}$$

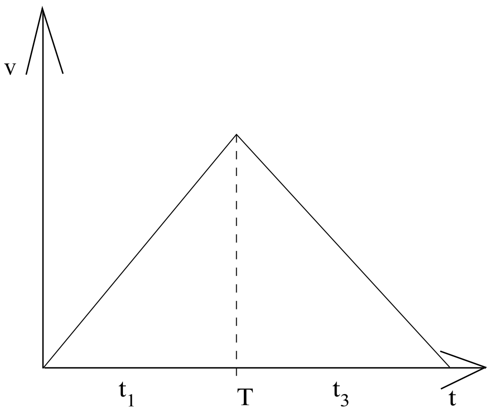

Fig. 3

*Departamento de Física,
Instituto Superior Técnico, Lisboa
jdd@einstein.fisica.ist.utl.pt e
teresa@gtae3.ist.utl.pt.