

MÉCANIQUE ALÉATOIRE

par G. DEDEBANT et PH. WEHRLÉ (à Paris)

1^{ÈRE} PARTIE — LE CALCUL ALÉATOIRE

(Octobre, 1944)

I — LES FONCTIONS ALÉATOIRES

1. L'idée statistique en physique. C'est à la fin du siècle dernier et au début de ce siècle que *l'idée statistique*, s'introduit avec succès dans la physique mathématique, avec la théorie cinétique des Gaz (*Maxwell, Boltzmann*), la mécanique statistique de *W. Gibbs*; la théorie du mouvement brownien (*Einstein, Smoluchowski*). Elle a continué à y faire son chemin — bien que sous forme déguisée et indirecte — avec les nouvelles mécaniques (*L. de Broglie, Heisenberg, Schrödinger, Dirac*). En mécanique ondulatoire et en mécanique quantique, l'idée statistique ne se retrouve en fait que dans l'interprétation des résultats : elle n'est pas introduite à la base et l'on dirait que c'est presque à regret que la majorité des auteurs se trouvent contraints d'en tenir compte (conflit avec le déterminisme).

En Mécanique des Fluides, bien que la complexité des mouvements fluides constatés de visu dans l'expérience quotidienne de tout observateur de la Nature (écoulement des rivières, caprices du vent, évolution incessante des nuages, diffusion des fumées dans l'atmosphère, etc.) la suggère impérieusement, l'idée statistique ne se fait place que très lentement à l'occasion du problème de la «Turbulence».

Les applications du calcul des probabilités à la physique ont donné lieu à des critiques sévères, en particulier de la part de *Duhem*, le champion de l'énergétique axiomatique. *Duhem* n'avait pas entièrement tort; la théorie cinétique manque assurément de rigueur et contient de nombreuses pétitions de principe (ainsi la démonstration du célèbre théorème H de Boltzmann doit être considérée comme inexistante).

Mais, tandis que le «*Calcul des Probabilités*» n'a guère été au début que l'étude raisonnée des jeux de hasard, la «statistique mathématique» d'aujourd'hui est un corps de doctrine autonome tenant une large place

au sein de la science mathématique. On pourrait la développer comme un important chapitre de la *Théorie des Ensembles*, sans que les mots «hasard» ou «probabilité» soient jamais prononcés. Pourtant il est utile de conserver ces expressions et de parler «en langage de probabilité» parce que le dessein profond de la statistique est bien de vouloir représenter les phénomènes du «hasard» dont nous avons par ailleurs la notion expérimentale.

2. L'Algèbre des Probabilités et l'Analyse Statistique. La statistique mathématique repose sur deux propositions que l'on appelle «*les deux théorèmes fondamentaux du calcul des probabilités*» et qui sont bien plus réellement des axiomes. L'un donne la règle d'addition; l'autre, la règle de multiplication des probabilités. Ils permettent de construire la statistique mathématique par voie entièrement déductive, au même titre que la géométrie d'Euclide est déduite de ses axiomes ou postulats de base.

Lorsqu'on veut appliquer ensuite la statistique à des phénomènes concrets, il se pose comme dans toute science appliquée, la question de savoir si les objets naturels dont on s'occupe sont représentables et dans quelle mesure, par les concepts idéaux. En statistique, cette question prend la forme précise de l'assimilation des *fréquences* aux *probabilités*, qui constitue la préoccupation centrale de la statistique appliquée. Il faut bien se garder de croire qu'il s'agisse là d'une infirmité particulière à la statistique: elle est commune à toutes les applications. L'analyse n'apporte pas au physicien le moyen de discerner quel est l'élément qu'il peut traiter comme infiniment petit ni la mécanique rationnelle à l'ingénieur la critique qui lui permette de décider si un corps de petites dimensions peut s'appeler un «point matériel».

C'est en fin de compte la réussite a posteriori du schéma employé et son pouvoir d'explication, qui justifieront le bien fondé de l'assimilation de l'objet réel à l'objet mathématique.

Les deux axiomes fondamentaux du calcul des probabilités permettent d'édifier une «Algèbre des probabilités». Il convient d'attirer tout de suite l'attention sur le fait que la règle de multiplication de cette Algèbre (*axiome des probabilités composées*) est énormément plus générale que celle de l'algèbre ordinaire. En effet, la probabilité (a, b) pour que deux événements a et b de probabilités individuelles (a) et (b) se réalisent n'est pas égale à $(a)(b)$. Les probabilités ne se multiplient pas comme les nombres algébriques. Il intervient dans la combinaison de deux probabilités une circonstance qu'il ne faudra jamais perdre de vue et qui contient en puissance toute la *théorie de la corrélation*: c'est

que (a, b) ne peut pas se déduire de (a) et de (b) . En fait, la probabilité (a, b) égale au produit de (a) par la probabilité (b/a) qui est celle de b , quand a s'est produit. Cette probabilité (b/a) est un élément entièrement nouveau, nullement inclus dans (a) et (b) .

Ce n'est que dans le cas où les événements a et b sont indépendants que l'on a :

$$(b/a) = (b)$$

et par suite :

$$(a, b) = (a)(b).$$

L'algèbre des probabilités rejoint alors l'algèbre ordinaire.

Il y a lieu de reprocher à presque toutes les applications qui ont été faites du calcul des probabilités — particulièrement en théorie cinétique — de s'être presque toujours systématiquement cantonnées dans ce cas pour des raisons évidentes de facilité. Outre que la nature physique du problème ne permettait souvent pas d'introduire l'hypothèse d'indépendance, on repoussait ainsi la notion fondamentale de corrélation, se privant du pouvoir d'explication élargi que comporte la nouvelle règle de multiplication. Ne nous y trompons pas, une des raisons de la réussite des nouvelles mécaniques est, en représentant les grandeurs physiques par des matrices ou des opérateurs, d'avoir généralisé l'algèbre en se libérant de la commutativité de la multiplication.

En possession d'une «algèbre», on en déduit une «analyse» par l'opération de *passage à la limite*. C'est précisément la voie qu'ont suivie les travaux modernes de statistique mathématique (Fréchet, Paul Lévy, Cramer, Kolmogoroff, Khintchine, Slutsky, etc.).

La notion de limite en statistique est plus complexe qu'en analyse classique.

En gros, on peut dire qu'il y a deux espèces de convergence :

L'une, qui méconnaît ou ne fait pas intervenir la corrélation, concerne la convergence de la loi de probabilité individuelle d'une variable aléatoire ¹ vers une loi limite ;

Les autres ² faisant intervenir la corrélation, sous telle ou telle forme, concernent la convergence d'une variable aléatoire vers un nombre ¹ aléatoire limite, en se préoccupant que «l'écart statistique» entre la variable et sa limite tende vers zéro.

¹ Un nombre aléatoire est, à notre sens, un nombre indéterminé, susceptible de prendre une série de valeurs (qu'on peut toujours supposer être l'ensemble des nombres réels) avec des probabilités données. Lorsque ce nombre aléatoire dépend d'un indice ou d'un paramètre, il devient une variable aléatoire.

² Convergence en probabilité, convergences en moyenne.

Ces deux sortes de convergence et les nuances que présentent la seconde offrent un choix d'orientations à donner à l'analyse statistique.

3. Les fonctions aléatoires. Une fonction aléatoire s'obtient en faisant correspondre à chaque valeur d'un paramètre t , un nombre aléatoire X/t .

Ce n'est pas seulement—comme une conception hâtive pourrait le faire croire—une variable aléatoire dont la loi de probabilité individuelle varie avec t . Une telle conception ne créerait pas une fonction, car elle laisserait dans l'ombre la *connexion* entre les valeurs successives prises par la variable aléatoire X/t . En quelque sorte, la fonction aléatoire équivalent à la loi de probabilité conjuguée: ¹

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n; t_1, t_2 \dots t_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n$$

pour que les variables aléatoires $X/t_1, X/t_2, \dots, X/t_n$, prennent les valeurs courantes x_1, x_2, \dots, x_n et ceci pour toute valeur de n . C'est donc une fonction d'un infinité de variables, cette infinité pouvant avoir d'ailleurs la puissance du continu.

Il est facile de former analytiquement des fonctions aléatoires.

Soit:

$$f(a, b, c, \dots t)$$

une fonction « certaine » ² d'un nombre fini de variables a, b, c , et d'un paramètre t . Remplaçons a, b, c , par des *nombre aléatoires* A, B, C . Alors f devient une *fonction aléatoire* de t . Cette fonction est de nature un peu particulière: elle crée une sorte de séparation entre le caractère fonctionnel et le caractère aléatoire.

Ainsi, le cosinus aléatoire (oscillateur):

$$X = A \cos(\Omega t + \Phi)$$

où A, Ω, Φ sont des nombres aléatoires, dérive immédiatement de la fonction circulaire classique:

$$x = a \cos(\omega t + \varphi).$$

Mais il est bien visible que ce genre de fonctions ne représente pas la fonction aléatoire la plus générale.

¹ Pour plus de généralité nous devrions parler de la fonction des *probabilités totales* (ou de répartition) $F(x_1, x_2 \dots x_n; t_1, t_2 \dots t_n)$ qui est la probabilité des inégalités $X_1 \leq x_1, X_2 \leq x_2, \dots, X_n \leq x_n$. Mais pour ne pas troubler un lecteur qui serait peu familier avec cette notion, nous emploierons la fonction de *distribution* (ou *loi de probabilité*) F chaque fois qu'il ne sera pas indispensable de faire autrement.

² L'adjectif « certaine » est ici opposé à « aléatoire ». Le sens de ce terme sera éclairci un peu plus loin. Disons pour le moment que f est une fonction continue des variables qu'elle renferme.

Au lieu d'employer la loi de probabilité conjuguée F , on peut aussi définir une fonction aléatoire par son *moment linéaire* :

$$\Gamma_n = \overline{X/t_1 X/t_2 \dots X/t_n}$$

qui est, en quelque sorte, pour une fonction aléatoire, l'équivalent de la fonction caractéristique pour un nombre aléatoire, puisqu'elle permet comme elle de trouver tous les *moments statistiques* qui peuvent nous intéresser ; on fait apparaître telle puissance qu'on désire en contractant convenablement les indices, par exemple :

$$\overline{X_1^2 X_2} = \Gamma_3(t_1, t_1, t_2)$$

Dans la pratique, une fonction aléatoire sera la plupart du temps suffisamment définie par les moments suivants :

$$\begin{aligned} \text{Valeur probable : } & \overline{X} \\ \text{écart type : } & \sqrt{\overline{X'^2}} \end{aligned}$$

$$X' = X - \overline{X}, \text{ étant la partie } \textit{purement aléatoire} \text{ de } X,$$

$$\text{moment rectangle : } \overline{X'_1 X'_2}$$

qu'on remplace souvent par le coefficient de corrélation correspondant :

$$r = \frac{\overline{X'_1 X'_2}}{\sqrt{\overline{X'^2_1}} \sqrt{\overline{X'^2_2}}}$$

Ces moments seront considérés généralement comme *continus* et *dérivables*. Ce sont eux seulement ou des fonctions *macroscopiques* analogues qui doivent figurer dans les équations aux dérivés partielles de la physique mathématique.

Cette conception de la fonction aléatoire est *purement statistique* et se refuse à analyser sa structure intime, envisagée du point de vue de la théorie générale des Fonctions. Nous allons, au contraire, examiner à présent cet autre aspect de la fonction aléatoire.

4. La genèse expérimentale du concept de fonction aléatoire. C'est l'étude expérimentale de la *structure fine* des éléments météorologiques qui nous a amené à l'idée que les fonctions ordinaires de l'analyse — continues et dérivables — étaient absolument impropres à représenter les phénomènes naturels. Ce n'est pas parce qu'un instrument enregistreur de sensibilité insuffisante tracera une *courbe* représentant — disons la vitesse du vent — qu'il doit s'ensuivre que cet élément est dans sa nature intime une fonction continue et dérivable du temps. On peut au contraire en douter fortement lorsque, étudiant le même phénomène avec des instruments de plus en plus sensibles, on voit l'aspect du

diagramme changer du tout au tout avec l'échelle d'observation et, si nous nous servons d'un instrument procédant par *pointés*, nous obtenons un *nuage de points* qui ne suggère en aucune façon l'idée d'une courbe. Il y a tout lieu de penser, au contraire, qu'à échelle très fine, les grandeurs physiques sont des fonctions totalement discontinues du temps, par exemple des fonctions de Baire de classe deux.

Si l'on veut calculer la valeur moyenne d'une grandeur dont la variation est représentée sur un diagramme par un nuage de points, il ne viendra à personne de sensé l'idée de réunir les points successifs par des traits continus et de planimétrer la courbe extrêmement hâchée ainsi réalisée, avec un intégraphe. L'opération serait fort longue et peu précise et de plus on peut se demander si les valeurs de l'élément entre deux pointés successifs ont quelque chance de s'interpoler sur le trait continu par quoi nous les avons arbitrairement joints. En langage mathématique cela veut dire que nous sommes en présence d'une fonction qui n'est pas intégrable au sens de *Riemann*. Le symbole :

$$\frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(s) ds$$

n'a en pareil cas aucun sens.

Une personne raisonnable procédera autrement : elle tracera une série de bandes horizontales correspondant à des valeurs de l'ordonnée f comprises entre f_i et $f_i + df$. Dans chacune de ces bandes, elle comptera le nombre n_i de points qu'elle contient et calculera la moyenne par la formule :

$$\bar{f} = \frac{\sum n_i f_i}{\sum n_i}$$

Elle fera ainsi une intégration au sens de *Lebesgue*, procédé plus puissant que celui de *Riemann* et qui — mathématiquement parlant — s'applique à toutes les fonctions de *Baire*.

Ces suggestions de l'expérience nous conduisent tout naturellement à une nouvelle conception des fonctions aléatoires.

Soit $X/t = f(t)$, une fonction *totalement discontinue* et intégrable au sens de *Lebesgue* : c'est donc une fonction de *Baire*, de classe supérieure ou égale à 2.

Plaçons nous à un instant t_0 et soit dt_0 un intervalle à cheval sur t_0 . Dans cet intervalle dt_0 qui a la *puissance du continu*, la fonction $f(t)$ prend une infinité de valeurs numériques, pouvant d'ailleurs couvrir tout le champ des nombres réels. On dispose donc d'une série d'épreuves suffisante pour pouvoir « estimer » le nombre aléatoire X_0 .

Désignons par $d_i t$ la mesure de l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles X_0 est compris entre X_i et $X_i + dx_i$ et considérons la quotient :

$$\frac{d_i t}{dt_0}$$

C'est un rapport positif et au plus égal à l'unité.

Lorsque $dt_0 \rightarrow 0$, il en est de même de $d_i t$ et le rapport prend la forme indéterminée $\frac{0}{0}$.

Si ce rapport tend vers une limite lorsque $dt_0 \rightarrow 0$ cette limite est nécessairement comprise entre 0 et 1. Nous disons qu'elle est la *probabilité* p_i de l'inégalité :

$$x_i \leq X_0 \leq x_i + dx_i$$

Ainsi avons nous défini avec rigueur la loi de probabilité en un point, de la fonction aléatoire X/t .

De la même manière, on peut définir la loi en deux points t_0 et t_1 . On considère pour cela la mesure $d_{ii} t$ de l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles les inégalités :

$$\begin{aligned} x_i &\leq X_0 \leq x_i + dx_i \\ x_j &\leq X_1 \leq x_j + dx_j \end{aligned}$$

sont simultanément satisfaites.

La probabilité conjuguée de ces deux inégalités est le limite du rapport :

$$\frac{d_{ii} t}{dt_0 dt_1}$$

lorsque dt_0 et dt_1 tendent vers zéro.

Cette limite, si elle existe, est un nombre positif inférieur ou égal à 1.

La définition s'étendant évidemment à un nombre quelconque de points, nous constituons ainsi une fonction aléatoire conformément à notre première conception.

On aperçoit le gros intérêt du nouveau point de vue. Il n'est pas besoin, pour parler de la loi de probabilité à un *instant donné* d'imaginer une série de systèmes identiques (conception de Gibbs). L'évolution d'un seul système, pourvu qu'elle soit très discontinue, suffit à créer cette notion.

Dans la conception de Gibbs, l'un des systèmes individuels serait par exemple l'oscillateur :

$$x = a \cos(\omega t + \varphi)$$

où a, ω, φ sont des nombres déterminés.

Pour créer la notion statistique, il faut que nous envisagions tout une collection d'oscillateurs pour lesquels a, ω, φ ont toutes les valeurs possibles, de façon que ces paramètres deviennent des *nombres aléatoires*, A, Ω, Φ définis par la loi de probabilité :

$$F(a, \omega, \varphi; t)$$

Dans la conception qui vient d'être exposée, l'observation ne permettrait pas de suivre un individu déterminé, de sorte que pendant un temps Δt les mesures faites seraient relatives à tous les oscillateurs de la collection et chacun aurait été rencontré avec une fréquence égale à sa probabilité. Ainsi, imaginons dans un gaz de molécules, un instrument très fin qui mesure la vitesse des molécules qui passent en un point fixe: les observations de cet instrument seront relatives à toute une série de molécules différents.

Examinons le cas particulier d'une fonction continue du temps (classe 0 de Baire).

La mesure de l'ensemble des valeurs de t pour lesquelles

$$x_i \leq X \leq x_i + dx_i$$

est :

$$\text{égale à } dt_0 \text{ si } x_i = f(t_0)$$

$$\text{nulle pour toutes autres valeurs de } x_i.$$

Lorsque $dt_0 \rightarrow 0$, $dx \rightarrow 0$ (continuité); par conséquent la probabilité pour que X_0 ait la valeur $f(t_0)$ est égale à l'unité et celle que X_0 ait une valeur différente de celle-là, est nulle.

C'est pourquoi les fonctions de la classe 0 de Baire méritent le nom de *fonctions certaines*.

Rien n'est changé pour une fonction de classe 1, continue sauf sur un ensemble de mesure nulle. Seules comptent les valeurs de la fonction pour les points où elle est continue et celles-là ont une probabilité égale à l'unité. Ces fonctions sont donc aussi des *fonctions certaines*.

Dans une mesure expérimentale, avec un appareil très sensible procédant par pointés, on détermine la probabilité p_i , par une «*estimation statistique*». On choisit, à cheval sur l'instant t_0 , un intervalle de temps Δt_0 , relativement petit, mais assez grand cependant pour contenir un très grand nombre n de points.

Si n_i est le nombre, parmi ces points, de ceux qui ont fourni une valeur de X_0 , comprise entre les limites x_i et $x_i + dx_i$, on «*estimera*» le rapport $\frac{\Delta_i t}{\Delta t_0}$ par la fraction $\frac{n_i}{n}$ et l'on adoptera la valeur de cette fraction comme étant la probabilité que X_0 ait la valeur x_i . Avec les «*instruments statistiques*» du genre de ceux que nous avons fait réaliser

à l'Observatoire Aérologique de Trappes, la détermination de $\frac{n_i}{n}$ se faisait en analysant au microphotomètre le noircissement d'une plaque impressionnée par un spot lumineux commandé par l'organe sensible.

Il y a lieu de remarquer que l'interprétation de la mesure expérimentale donne lieu à deux sortes d'approximations.

La première, qui est de *nature mathématique*, consiste à remplacer une limite par une valeur approchée de cette limite, comme l'on fait par exemple en substituant au coefficient angulaire de la tangente, la pente d'une sécante réunissant deux points très rapprochés. Ce genre d'approximation est le seul qui existe en physique mathématique classique où les dérivées sont pratiquement évaluées par le rapport de deux accroissements finis.

La seconde approximation est de *nature statistique*: elle tient dans la substitution d'une fréquence à une probabilité, tout comme pour se rendre compte de la proportion de boules blanches dans une urne de contenu ignoré, on compte le nombre de boules blanches extraites dans une série suffisamment prolongée de tirages.

Prenons l'exemple d'une molécule de la théorie cinétique. Elle accomplit des trajets rectilignes successifs brisés par les chocs avec les autres molécules. Ces chocs sont extrêmement nombreux et dans un intervalle macroscopiquement petit, mettons de l'ordre du $1/1000^{\circ}$ de seconde, il s'en produit un nombre prodigieusement grand. Pendant cet intervalle de temps, la molécule prend un grand nombre de fois toutes les vitesses possibles et les fréquences avec lesquelles ces vitesses sont observées permettent d'estimer la loi de distribution des vitesses à un instant macroscopique défini à $1/1000^{\circ}$ de seconde près. Quand une molécule est en choc, sa vitesse n'est pas définie, mais cela n'a aucune importance car la durée totale des chocs forme un ensemble discret, donc de mesure nulle.

5. Nécessité des moyennes stochastiques. Ce n'est pas par un simple caprice de l'esprit que l'on doit substituer aux moyennes temporelles (intégrales de Riemann):

$$\bar{f}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} f(s) ds$$

des moyennes stochastiques (intégrales de Lebesgue-Stieljes):¹

$$\bar{X} = \int x d\mathfrak{F}(x).$$

¹ \mathfrak{F} est ici la fonction de répartition. Avec la fonction de distribution notre intégrale s'écrirait: $X = \int x F(x) dx$.

En effet, une des propriétés essentielles de la moyenne, qui est une grandeur macroscopique, est de demeurer inaltérée si l'on répète sur elle l'opération de moyenne, c'est à dire qu'elle jouit de la propriété :

$$\overline{\overline{f}} = \overline{f}$$

Or, en dérivant l'intégrale de Riemann, on obtient :

$$\frac{d\overline{f}}{dt} = \frac{f(t+T) - f(t-T)}{2T} = \frac{d\overline{f}}{dt} = \frac{\overline{f}(t+T) - \overline{f}(t-T)}{2T}$$

done en posant :

$$g(t) = f(t) - \overline{f}(t)$$

on obtient :

$$g(t+T) = g(t-T)$$

ce qui prouve que g est une fonction *périodique* de période $2T$ et, comme elle est intégrable au sens de Riemann, elle possède au plus une infinité dénombrable de discontinuités : C'est donc une série trigonométrique de période fondamentale $2T$, dont le terme constant est nul car $\overline{g} = 0$.

Ainsi, la conception des moyennes par une intégrale de Riemann réduit-elle singulièrement la classe des fonctions par lesquelles on entend représenter les phénomènes naturels. En fait, ces fonctions sont celles que nous avons appelées «*certaines*».

Mais, il y a plus : les moyennes temporelles prises dans un intervalle égal à la période sont nécessairement des *constantes*. Il n'y aura donc aucune possibilité de représenter des phénomènes *macroscopiquement évolutifs*.

Allons encore plus loin : soit X la coordonnée d'une particule fluide. La dispersion :

$$\overline{X^2}(t) = \frac{1}{2T} \int_{t-T}^{t+T} (X/s - \overline{X})^2 ds$$

est une *constante*.

Si l'on considère la particule fluide située à un instant initial donné ($t=0$) en un point donné, on a :

$$\overline{X^2}(t) = \overline{X^2}(0) = 0$$

ce qui veut dire qu'il *n'existe pas de diffusion* à l'intérieur du fluide.

Ainsi a-t-on supprimé au fluide le caractère «*turbulent*» dont il s'agissait précisément de faire l'étude.

Il va de soi qu'avec les moyennes stochastiques toute difficulté de ce genre disparaît car la propriété $\overline{\overline{f}} = \overline{f}$ est pour elles une pure identité qui n'apporte aucune espèce de restriction à la nature de la fonction f .

II — LA DÉRIVÉE ALÉATOIRE

6. Les fonctions aléatoires dérivables. Les premiers travaux qui ont porté sur les fonctions aléatoires (sans en prononcer d'ailleurs le nom) — processus à éléments aléatoires indépendants, probabilités en chaîne — ont considéré les cas où la loi de probabilité F_n se décomposait en un produit de fonctions contenant chacune un nombre moindre de variables.

Ainsi, dans le schéma de la *chaîne simple* (Markoff):

$$F_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = F_1(x_1) F_2(x_2, x_1) F_3(x_3, x_2) \dots F_n(x_n, x_{n-1}).$$

Malgré ces simplifications, l'étude des fonctions aléatoires donne lieu à des problèmes compliqués en dépit d'une forte perte de généralité.

A notre avis, il faut chercher les simplifications dans une autre voie et surtout sans *attenter à la corrélation*.

De même que l'analyse classique, en présence des possibilités indéfinies auxquelles laissait place l'idée la plus générale de fonction, s'est attaquée intuitivement d'abord à celles qui lui paraissaient jouir des propriétés les plus simples: les *fonctions dérivables*, de même la voie féconde de l'analyse statistique sera de reconnaître et de définir celles parmi les fonctions aléatoires auxquelles on peut étendre l'*opération de dérivation*, de manière à pouvoir utiliser les outils puissants et traditionnels de l'analyse mathématique.

Ainsi, Cauchy abordant l'étude des fonctions d'une variable complexe, a-t-il sagement choisi celles qui admettent une dérivée: les fonctions monogènes.

7. La différentielle aléatoire. On considère la fonction aléatoire X/t du paramètre t et l'on prête généralement aux moments simples et conjugués relatifs à cette fonction, des propriétés de continuité et de dérivabilité assez larges. On se propose d'étudier la nouvelle fonction aléatoire qu'est l'accroissement:

$$Z/t, h = X/t + h - X/t,$$

d'examiner les conditions pour qu'elle soit infiniment petite avec h (*différentielle aléatoire*) et d'étudier son ordre d'infinitude en h .

Sa valeur probable:

$$\bar{Z}/t, h = \bar{X}/t + h - \bar{X}/t = h \frac{d\bar{X}}{dt} + \dots$$

est, en tous cas, un infiniment petit de l'ordre de h , lorsque la valeur probable de X est une fonction (certaine) dérivable.

Passons à l'écart type; on ne diminue pas la généralité du problème

en supposant X de valeur probable nulle (variable *purement aléatoire*). Alors :

$$\overline{Z^2/t, h} = \sigma^2(t+h) + \sigma^2(t) - 2r(t, t+h)\sigma(t)\sigma(t+h)$$

$\sigma(t)$, désignant l'écart type de X et $r(t, t+h)$, le coefficient de corrélation entre X/t et $X/t+h$.

$\sigma(t)$ sera supposé être dérivable tant que le besoin s'en fera sentir, et si nécessaire, analytique.

$\sigma(t+h)$ admet alors un développement de Taylor :

$$\sigma(t+h) = \sigma + h\sigma' + \frac{h^2}{2}\sigma'' + \dots$$

Pour que $\overline{Z^2}$ soit infiniment petit avec h , on voit qu'il est nécessaire et suffisant que $r(t, t+h)$ soit uniformément continue pour $h=0$, ce que nous écrivons :

$$r(-0) = r(+0) = r(0) = 1$$

Soit donc α l'ordre d'infinitude de $(1-r)$; on peut représenter r par le développement suivant :

$$r(t, t+h) = 1 - \lambda(t)|h|^\alpha - |h|^\alpha \varphi(t, h)$$

$\varphi(t, h)$, étant une fonction qui tend uniformément vers zéro avec h .

8. Symétrie du coefficient de corrélation. r est une fonction *symétrique* par rapport aux variables t et $t+h$. Il en résulte entre φ et λ la relation :

$$\lambda(t+h) - \lambda(t) = \varphi(t, h) - \varphi(t+h, -h).$$

Cette relation montre que la fonction φ jouira généralement des propriétés de continuité et de dérivabilité que l'on prêtera à la fonction λ . Supposons celle-ci analytique (ce qui est conforme à notre idée que les fonctions macroscopiques doivent être considérées comme telles) et soit :

$$\lambda(t+h) = \lambda(t) + h\lambda'(t) + \frac{h^2}{2}\lambda''(t) + \dots$$

son développement de Taylor.

Soit d'autre part :

$$\begin{aligned} \varphi(t, h) &= \lambda_1(t)h + \lambda_2(t)h^2 + \lambda_3(t)h^3 + \dots \\ \varphi(t+h, -h) &= -h\lambda_1(t+h) + h^2\lambda_2(t+h) - h^3\lambda_3(t+h) + \dots \\ &= -\lambda_1 h + (\lambda_2 - \lambda_1)h^2 + \left(-\frac{\lambda_1''}{2} + \lambda_2' - \lambda_3\right)h^3 + \dots \end{aligned}$$

En portant ces développements dans la condition de symétrie, on obtient par identification les relations suivantes :

$$\lambda' = 2\lambda'_1$$

$$\frac{\lambda''}{2} = \lambda'_1$$

$$\frac{\lambda'''}{6} = 2\lambda_3 - \lambda'_2 + \frac{\lambda''_1}{2} \quad \text{ou} \quad 2\lambda_3 - \lambda'_2 = -\frac{2\lambda'''}{3} \dots$$

Les coefficients de φ gardent encore, malgré ces relations, un grand caractère d'arbitraire, car les λ d'indice pair disparaissent dans la différence des deux fonctions φ . Ainsi les deux premières relations (dont la seconde est une conséquence de la première) déterminent λ_1 , puis λ_2 peut être choisi arbitrairement et la 3^{ème} relation détermine λ_3 etc. D'ailleurs dans le cas où r ne dépend que de h (*stationnarité*), toute fonction paire de h satisfait aux conditions de symétrie.

On obtient donc, d'une manière générale, le développement suivant pour r :

$$r(t, t+h) = 1 - |h|^\alpha \lambda(t) - |h|^\alpha \left[\frac{\lambda'(t)}{2} h + \lambda_2 h^2 + \dots \right]$$

les coefficients λ et leurs dérivées étant liés entre eux par certaines relations.

Dans le cas de stationnarité, on a la forme :

$$r(t, t+h) = 1 - \lambda |h|^\alpha - |h|^\alpha [\lambda_2 h^2 + \lambda_4 h^4 + \dots]$$

les λ étant des constantes qui ne sont soumises jusqu'à nouvel ordre qu'à la condition d'assurer la convergence du développement.

Si l'on assujettit r à la condition d'être analytique, la seule forme possible de son développement est ($\alpha=2$) (car $|h|^\alpha$ n'est pas analytique) :

$$r(t, t+h) = 1 - \lambda(t) h^2 - \frac{\lambda'(t)}{2} h^3 - \lambda_2(t) h^4 + \dots$$

On pourra appeler *analytiques* les fonctions aléatoires admettant un coefficient de corrélation de cette forme.

Aux fonctions analytiques stationnaires (en abrégé ana-stat) correspond le coefficient de corrélation :

$$r(h) = 1 - \lambda h^2 - \lambda_2 h^4 + \dots$$

9. Les conditions de cohérence. Il est bien connu que les coefficients de corrélation de n nombres aléatoires pris 2 à 2 ne peuvent être choisis arbitrairement. Les conditions qu'ils doivent remplir et qu'avec Yule nous désignerons par «*conditions de cohérence*» ont une origine qui n'est nullement mystérieuse : elles expriment simplement le

fait qu'une probabilité ne saurait être négative. On peut s'en rendre compte en partant de l'inégalité de Bienaymé-Tchebicheff :

$$\mathfrak{P}r(X < \xi) < \frac{\overline{X^2}}{\xi^2}$$

qui entraîne $\overline{X^2} \geq 0$.

Choisissons :

$$X = \sum \lambda_i X_i \quad \overline{X_i^2} = 1.$$

La forme quadratique :

$$\overline{X^2} = \sum \sum r_{ij} \lambda_i \lambda_j$$

ne peut être négative ; donc tous les déterminants $\Delta_n = |r_{ij}|$ sont ≥ 0 .

On satisfait aux conditions de cohérence en prenant pour les r_{ij} les cosinus des angles formés par n vecteurs unitaires l_i :

$$r_{ij} = \cos(l_i, l_j).$$

Le déterminant Δ_n est le carré du volume du n -vecteur construit sur les vecteurs unitaires l_i .

On déduit de cette représentation :

1°) que $\Delta_{n-1} \geq \Delta_n$

2°) donc que $\Delta_n \leq 1$ car $\Delta_1 = 1$

3°) que si $\Delta_{n-1} = 0$, $\Delta_p = 0$ pour $p \geq n$.

La limite de Δ_n quand n augmente indéfiniment est zéro, sauf le cas singulier où, à partir d'un rang fini, les nombres aléatoires ne sont plus corrélés.

Δ n'est égal à 1 que si :

$$r_{ij} = \delta_{ij} \quad (\text{symbole de Kronecker})$$

Il suit de l'existence de ces conditions de cohérence qu'une fonction paire $r(t_2 - t_1) = r(h)$, de module inférieur à l'unité, ne peut représenter le coefficient de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire X/t que si — pour tout n — n valeurs quelconques de $r(h)$ satisfont aux conditions de cohérence. S'il en est ainsi, nous dirons que la fonction est « un r ».

La première condition de cohérence est $r^2(t, t+h) \leq 1$.

La seconde est :

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & r(t, t+h) & r(t, t+h+k) \\ r(t, t+h) & 1 & r(t+h, t+k) \\ r(t, t+h+k) & r(t+h, t+k) & 1 \end{vmatrix} \geq 0$$

soit en développant :

$$1 - r^2(t, t+h) - r^2(t+h, t+k) - r^2(t, t+h+k) + 2r(t, t+h)r(t+h, t+k)r(t, t+h+k) \geq 0.$$

Pour alléger les calculs, étudions d'abord le cas de stationnarité :

$$\Delta_3 = 1 - r^2(h) - r^2(k) - r^2(h+k) + 2r(h)r(k)r(h+k).$$

Si $h=k$, cette condition se simplifie; le premier membre devenant divisible par $1-r(2h)$ se réduit à :

$$1 - 2r^2(h) + r(2h) \geq 0.$$

Portons dans l'inégalité simplifiée le développement de r ; on obtient :

$$(4-2^\alpha)\lambda|h|^{\alpha} + [4\varphi(h) - 2^\alpha\varphi(2h)]|h|^{\alpha-2} - 2[\lambda + \varphi(h)]^2|h|^{2\alpha} \geq 0.$$

Rappelons que :

$$\varphi(h) = \lambda_2 h^2 + \dots$$

L'inégalité s'écrit donc :

$$(4-2^\alpha)\lambda|h|^{\alpha} + 4\lambda_2(1-2^\alpha)|h|^{\alpha+2} - 2\lambda|h|^{2\alpha} + \dots \geq 0.$$

Lorsque $h \rightarrow 0$, elle doit continuer à être satisfaite.

Or pour h petit, c'est le premier terme qui donne son signe.

Si donc $\alpha < 2$, la condition est automatiquement satisfaite puisque $\lambda > 0$.

Si $\alpha > 2$, il faut nécessairement que $\lambda = 0$ et c'est alors le 2^{ème} terme qui compte d'où $\lambda_2 = 0$ et ainsi de suite.

Ainsi faut-il que $\varphi(h)$ soit identiquement nulle et que le coefficient de corrélation soit par conséquent égal à l'unité. La corrélation ne saurait donc être trop serrée au voisinage de $h=0$ sans dégénérer en liaison certaine.

On se rend d'ailleurs facilement compte que le type de fonction aléatoire correspondant à $r=1$ est de la forme banale

$$Af(t),$$

A étant une « constante aléatoire » (variable aléatoire ne dépendant pas de t) et $f(t)$ une fonction certaine. Et si, de plus, la fonction est stationnaire, elle se réduit à une constante aléatoire.

Si $\alpha=2$, le 1^{er} terme s'évanouit et il faut prendre les suivants en considération, ce qui donne la condition :

$$-6\lambda_2 \geq \lambda^2.$$

En particulier λ_2 ne saurait être positif.

On voit donc que les coefficients du développement de $r(h)$ sont assujettis à d'autres conditions que celles qui assurent simplement la convergence de la série.

Certaines formes analytiques qui pourraient paraître acceptables à première vue, ne sont pas des r .

Ainsi :

$$r(h) = \begin{cases} 1-h^2 & \text{pour } h < 1 \\ 0 & \text{pour } h \geq 1 \end{cases}$$

de même $r(h) = \begin{cases} =1 & \text{pour } h \leq \tau \\ =0 & \text{pour } h > \tau \end{cases}$

La fonction $\cos \omega h$ est un r remarquable pour lequel $\Delta_3=0$; il en résulte que tout $\Delta_n=0$ (pour $n > 2$); elle satisfait donc à *la limite* aux conditions de cohérence.

Elle correspond au cas où tous les vecteurs e_i sont dans un même plan :

$$(e_i, e_k) = (e_i, e_j) + (e_j, e_k).$$

Il est évident qu'en faisant appel aux conditions de cohérence d'ordre supérieur (pour 4, 5... points), on obtiendra des inégalités concernant les coefficients successifs. Toutes ces conditions confèrent à $r(h)$ une *forme analytique particulière*.

Examinons maintenant le cas des fonctions aléatoires non stationnaires. On doit s'attendre à ce que les choses ne soient pas changées dans leur essence.

L'on a :

$$r(t+h, t+2h) = r(t, t+h) + hA(t, h)$$

avec

$$A(h) = -\lambda' |h|^\alpha - \frac{\lambda''}{2} |h|^\alpha h + \dots$$

Posons, pour simplifier l'écriture :

$$\varphi(h) = r(t, t+h)$$

en omettant d'écrire t , qui ne présente pas d'intérêt.

Δ_3 se laisse mettre sous la forme :

$$[1 - \varphi(2h)][1 + \varphi(2h) - 2\varphi^2(h) - 2\varphi Ah] - A^2 h^2 \geq 0.$$

Or,

$$\begin{aligned} 1 - \varphi(2h) &= 2^\alpha \lambda |h|^{2\alpha} + \dots \\ 1 + \varphi(2h) - 2\varphi^2(h) &= \lambda(4 - 2^\alpha) |h|^\alpha + (2 - 2^\alpha) \lambda' |h|^\alpha h - 2\lambda^2 |h|^{2\alpha} + \dots \\ -2\varphi Ah &= -2\lambda' |h|^\alpha h + \dots \\ A^2 h^2 &= \lambda'^2 |h|^{2\alpha+2}. \end{aligned}$$

Le premier terme est donc de l'ordre de $|h|^{2\alpha}$; il est prépondérant, quand $\alpha < 2$. En ce cas, comme tout à l'heure, la condition de cohérence n'entraîne aucune condition nouvelle. Mais si $\alpha > 2$, c'est le 2^{ème} terme qui donne son signe et ceci nécessite que $\lambda' = 0$. A est alors identiquement nul et il faut se reporter au 1^{er} terme qui est le

même que pour une fonction stationnaire. La conclusion est donc que: $\lambda=0$, et la fonction aléatoire correspondante est de la forme banale: $B f(t)$. Si $\alpha=2$, le 1^{er} et le 2^{ème} terme sont de même ordre (4), mais les termes d'ordre 4 et 5 disparaissent et il faut pousser jusqu'aux termes en h^6 pour trouver la condition:

$$-6\lambda_2 \geq \lambda^2 + \frac{\lambda^3 - 4\lambda''}{8\lambda}$$

qui redonne, quand $\lambda'=0$, la condition déjà trouvée dans le cas stationnaire.

Pour terminer, faisons une remarque intéressante au sujet de la forme imposée au coefficient de corrélation par les conditions de contingence.

Se peut-il que $r(\tau)$ soit égal à 1 pour une valeur de $\tau \neq 0$? S'il en est ainsi, la seconde condition de contingence donne:

$$[r(k) - r(k+\tau)]^2 \leq 0$$

d'où $r(k) = r(k+\tau)$, donc $r(k)$ est une fonction périodique de période τ .

S'il existait une valeur τ de h pour laquelle $r(\tau) = -1$, on aurait:

$$[r(k) + r(k+\tau)]^2 \leq 0$$

d'où

$$r(k) = -r(k+\tau) \quad \text{quelque soit } k.$$

En particulier ($k=\tau$):

$$r(2\tau) = -r(\tau) = 1$$

et $r(k)$ serait encore une fonction périodique. Ainsi, le coefficient de corrélation ne saurait prendre les valeurs ± 1 (sauf la valeur 1 pour $h=0$) sans être une fonction périodique.

10. Définition de la dérivée aléatoire. Après avoir reconnu, par leur coefficient de corrélation les fonctions aléatoires qui admettent une différentielle, recherchons maintenant celles qui admettent une dérivée.

Posons-nous le problème suivant:

$$Z/t, h = X/t + h - X/t$$

étant l'accroissement d'une fonction aléatoire X/t , de valeur probable nulle, existe-t-il une fonction aléatoire \dot{X}/t , telle que, α étant un nombre positif, la moyenne quadratique:

$$\left(\frac{Z/t, h}{h^{\alpha/2}} - \dot{X}/t \right)^2$$

tende vers zéro quand $h \rightarrow 0$ (condition (I)).

La moyenne est prise, bien entendu, avec la loi de probabilité conjuguée de X/t , $X/t+h$ et \dot{X} , que nous n'avons d'ailleurs pas besoin de connaître pour conclure.

Le problème admet une solution qui est la suivante :

- 1°) α doit être égal à 2.
- 2°) Le coefficient de corrélation $r(t, t+h)$ entre X/t et $(X/t+h)$, doit être tel que :

$$\frac{1-r}{h^2} \rightarrow \text{une limite finie } \frac{1}{2} \lambda(t)$$

lorsque $h \rightarrow 0$.

3°) $\lambda(t)$ qui est la dérivée seconde de r (pour $h=0$) doit être une fonction dérivable de t (peut-être même seulement continue).

Si ces circonstances sont réalisées — et l'on notera qu'on en peut juger par des critères purement statistiques ne faisant intervenir que la loi de probabilité conjuguée en *deux points*, et encore seulement par son moment le plus simple, on dira que X/t admet une *dérivée aléatoire* en *moyenne quadratique*, qui est \dot{X}/t .

Lorsque $\alpha < 2$, on peut trouver des fonctions aléatoires telles que :

$$\frac{Z^2/t, h}{h^2}$$

tende vers une limite (condition II).

C'est en particulier le cas des processus aléatoires à éléments indépendants¹.

La condition (II) n'est pas suffisante pour qu'il existe une dérivée ; il est indispensable pour cela que la condition (I) plus restrictive soit remplie. Néanmoins, les fonctions aléatoires qui jouissent de la propriété (II) peuvent déjà engendrer des conséquences intéressantes et maniables.

Lorsque $\alpha > 2$, nous avons vu qu'en vertu des conditions de cohérence, r est nécessairement égal à l'unité.

La fonction aléatoire est alors de la forme $Af(t)$ et admet la dérivée $Af'(t)$. Lorsque $f(t)$ est une constante, elle est une *constante aléatoire* dont la dérivée est le nombre certain zéro.

En résumé, nous dirons qu'une fonction aléatoire X/t est *dérivable*

¹ Ces processus sont tels que $Z/t, h$ et X/t sont indépendants : l'accroissement de la fonction est indépendante de sa valeur initiale. Ils ont été étudiés par *Cramer* et *Paul Lévy*.

en moyenne quadratique au point t s'il existe un nombre aléatoire X/t tel que :

$$\left(\frac{X/t+h-X/t}{h} - \dot{X}/t \right)^2$$

tend vers zéro avec h .

Et nous omettrons dorénavant la qualification «en moyenne quadratique».

11. Extension des règles de calcul de l'analyse. Les règles de l'analyse s'étendent sans difficulté à la dérivation aléatoire.

a) En particulier, la règle de dérivation des *fonctions de fonctions* :

Si $\Phi(X, t)$

est une fonction certaine de la fonction aléatoire X/t et en outre, explicitement du paramètre t , dérivable au sens ordinaire par rapport à X et à t , la dérivée aléatoire Φ/t est :

$$\dot{\Phi}/t = \frac{\partial \Phi}{\partial X} \dot{X} + \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

Passant aux moyennes, on en déduit (Φ ne contenant plus explicitement t) :

$$\frac{d}{dt} \overline{\Phi(X)} = \overline{\Phi'(X) \dot{X}}$$

ce qui autorise l'échange entre les opérateurs «dérivation» et «valeur probable».

En particulier :

$$\frac{d}{dt} \overline{X^k} = k \overline{X^{k-1} \dot{X}}$$

qui donne :

$$\text{pour } k=1 \quad \frac{d\overline{X}}{dt} = \overline{\dot{X}}$$

$$\text{pour } k=2 \quad \frac{d\overline{X^2}}{dt} = 2 \overline{X \dot{X}}$$

b) La *dérivée seconde* aléatoire \ddot{X}/t de la fonction aléatoire X/t est la limite aléatoire, quand elle existe, du rapport :

$$\frac{X/t+2h-2X/t+h+X/t}{h}$$

Ce rapport est une fonction aléatoire de *trois points* du champ. La détermination de sa loi de probabilité exige la connaissance de la fonc-

tion de distribution conjuguée des valeurs de X en trois points ; cependant son écart type résulte seulement de la donnée du coefficient de corrélation entre les valeurs de X en deux points.

On démontre aisément que \dot{X}/t ainsi définie est la dérivée aléatoire de X/t .

Une fonction aléatoire peut avoir toute une série de dérivées successives et même être indéfiniment dérivable. Exemple : l'oscillateur aléatoire : $X=A \cos(\Omega t + \Phi)$. On peut en ce cas la développer en série de Taylor lorsque le reste de cette série tend vers zéro en moyenne quadratique.

La considération de la dérivée seconde conduit à la formule suivante :

$$\frac{d^2}{dt^2} \overline{\Phi(X)} = \overline{\Phi'(X) \dot{X}} + \overline{\Phi''(X) \dot{X}^2}$$

qui, pour $\Phi(X) = \frac{1}{2} X^2$ donne :

$$\frac{1}{2} \frac{d^2 \overline{X^2}}{dt^2} = \overline{X \dot{X}} + \overline{\dot{X}^2}$$

expression dans laquelle on reconnaît l'équation du viriel.

12. Développement du coefficient de corrélation. Si X/t_1 et X/t_2 sont les valeurs de la fonction aléatoire en deux points, la règle de dérivation sous le signe « trait » donne :

$$\frac{\partial^{n+p}}{\partial t_1^n \partial t_2^p} \overline{X/t_1 X/t_2} = \overline{\overset{(n)}{X}/t_1 \overset{(p)}{X}/t_2}$$

On en déduit le développement du moment rectangle :

$$\Gamma = \overline{X/t_1 X/t_2}.$$

En effet :

$$\begin{aligned} \Gamma(t_1+h, t_2+k) &= \sum_{n,p} \frac{h^n k^p}{n! p!} \frac{\partial^{n+p}}{\partial t_1^n \partial t_2^p} \Gamma(t_1, t_2) \\ &= \sum \frac{h^n k^p}{n! p!} \overline{\overset{(n)}{X}/t_1 \overset{(p)}{X}/t_2} \end{aligned}$$

On peut ensuite former le développement du coefficient de corrélation car :

$$\Gamma(t_1, t_2) = S_0(t_1) S_0(t_2) r(t_1, t_2)$$

S_0 désignant l'écart type de X ; d'une manière générale, nous désignons par S_n l'écart type de la dérivée $n^{\text{ième}} : \overset{(n)}{X}$.

Le début du développement de r s'écrit ainsi :

$$r(t, t+h) = 1 - \frac{\tau^2 S_1^2 - S_0'^2}{2 S_0^2} + \dots$$

Comme r doit être ≤ 1 on a nécessairement :

$$S_0' \leq S_1$$

c'est à dire que la dérivée de l'écart type est au plus égale à l'écart type de la dérivée.

Le rapport $\frac{S_0'}{S_1}$ a d'ailleurs une signification simple : c'est le coefficient de corrélation entre X et \dot{X} . De même, le coefficient de corrélation entre \ddot{X} et X est :

$$r(X, \ddot{X}) = \frac{S_0 S_0'' + S_0'^2 - S_1^2}{S_0 S_2}$$

d'où l'on peut tirer une inégalité vérifiée par les S et leurs dérivées. En particulier si S_0 ne dépend pas de t , $r(X, \ddot{X})$ est nécessairement négatif et l'on a de plus l'inégalité :

$$S_1^2 \leq S_0 S_2.$$

Nous allons calculer le développement complet dans le cas où $\Gamma(t_1, t_2)$ est seulement fonction de la différence $(t_2 - t_1)$ (*fonction aléatoire stationnaire*). Alors $S_0^2(t) = \Gamma(t, t) = \Gamma(0)$ est une constante.

Le coefficient de corrélation s'écrit :

$$r(t_1, t_2) = \frac{\Gamma(t_2 - t_1)}{S_0^2}.$$

Posons $t_2 - t_1 = h$; Γ qui est symétrique en t_1, t_2 est une fonction paire de h

$$\Gamma(h) = \sum \frac{h^{2n}}{(2n)!} \Gamma_0^{(2n)}.$$

Or la formule générale indiquée au début de ce paragraphe donne lorsque $t_1 = t_2$; $p = n$, et en remarquant que maintenant : $\frac{\partial}{\partial t_1} = -\frac{\partial}{\partial t_2}$:

$$\Gamma_0^{(2n)} = (-1)^n S_n^2$$

et l'on obtient :

$$r(h) = \sum (-1)^n \frac{h^{2n}}{(2n)!} \left(\frac{S_n}{S_0} \right)^2.$$

L'inégalité $S_1^2 \leq S_0 S_2$ s'étend évidemment à des dérivées d'ordre quelconque, de sorte que l'on a, en général :

$$S_{n+1}^2 \leq S_n S_{n+2}$$

La formule de dérivation sous le signe trait :

$$\overline{\dot{X}_1 \dot{X}_2} = \frac{\partial^2}{\partial t_1 \partial t_2} \overline{X_1 X_2}$$

montre que le coefficient de corrélation de \dot{X} est :

$$\rho(h) = -r''(h) \left(\frac{S_0}{S_1} \right)^2.$$

13. Forme générale du coefficient de corrélation. Soit $r(\omega, h)$ un r , dépendant du paramètre ω ; l'intégrale de Stieljes :

$$r(h) = \int r(\omega, h) d\mathcal{F}(\omega)$$

où $\mathcal{F}(\omega)$ est une fonction de répartition, est aussi un r . C'est en effet le coefficient de corrélation de la fonction aléatoire :

$$x = \int X/\omega, t \sqrt{d\mathcal{F}(\omega)} \quad (\overline{X^2/\omega}, t=1)$$

les X/ω n'étant pas corrélés : $\overline{X/\omega i, t_1 X/\omega j, t_2} = 0$ si $i \neq j$.

On vérifie d'ailleurs que la condition de cohérence :

$$\Delta(h) = 1 + r(2h) - 2r^2(h) \geq 0$$

est satisfaite. Elle s'écrit en effet :

$$\overline{\Delta(\omega, h)} + [\overline{r^2(\omega, h)} - \overline{r(\omega, h)^2}] \geq 0$$

et chacun des termes du 1.^{er} membre est positif ou nul.

La valeur zéro n'est atteinte que si ω ne peut prendre qu'une seule valeur ω_0 et si $r(\omega, h) = \cos \omega_0 h$.

Si donc, on veut former un r susceptible de donner à Δ toutes les valeurs possibles, il faut prendre :

$$r(h) = \int \cos \omega h d\mathcal{F}(\omega) = \overline{\cos \omega h}.$$

C'est la forme de *Khintchine*.

On voit qu'en somme, les inégalités :

$$S_n^2 \leq S_{n-1} S_{n-1}$$

qui s'écrivent :

$$\overline{\omega^{2n}} \leq \overline{\omega^{2n-2}} \overline{\omega^{2n+2}}$$

ne sont autres que celles vérifiées par les moments d'une loi de probabilité, et qui se déduisent de l'inégalité de *Schwartz* :

$$\left[\int f(\omega) g(\omega) d\mathcal{F}(\omega) \right]^2 \leq \left[\int f^2(\omega) d\mathcal{F}(\omega) \right] \left[\int g^2(\omega) d\mathcal{F}(\omega) \right].$$

On peut dire aussi que $\Phi(h)$ étant une fonction caractéristique,

$$\frac{1}{2} \left[\Phi(h) + \Phi(-h) \right]$$

est « un r ».

On obtient une fonction aléatoire ana. stat. dont le coefficient de corrélation soit une fonction périodique, en prenant pour $\mathcal{F}(\omega)$ une fonction en escalier présentant des discontinuités positives égales à :

$$a_0, a_1 \dots a_n \dots$$

pour des valeurs de ω , multiples les unes des autres :

$$\omega_0, 2\omega_0, \dots n\omega_0, \dots$$

Les a satisfont à la condition :

$$\sum_0^{\infty} a_n = 1$$

$r(h)$ est la série trigonométrique paire :

$$r(h) = \sum_0^{\infty} a_n \cos n\omega h.$$

14. Représentation d'une fonction aléatoire. Il est facile de former une fonction aléatoire dont le coefficient de corrélation ait la forme générale précédente : c'est l'oscillateur à fréquence aléatoire :

$$X = A \cos(\Omega t + \Phi)$$

où A , Ω , Φ sont des constantes aléatoires indépendantes ; A est de valeur probable nulle et Φ ($0 \leq \Phi \leq 2\pi$) a une distribution uniforme.

On a bien, pour cette fonction aléatoire :

$$r(h) = \overline{\cos \Omega h}.$$

C'est sans doute la fonction aléatoire élémentaire la plus simple qui permette de former le coefficient de corrélation le plus général ce qui n'est pas dire qu'elle représente la fonction aléatoire stationnaire la plus générale.

Au contraire, la représentation d'une fonction aléatoire par une forme analytique contenant des constantes aléatoires ne correspond pas à la conception que l'on doit se faire d'une telle fonction. En effet, sur une épreuve individuelle A , Ω , Φ , ont des valeurs déterminées qu'elles conservent au cours du temps ; la coordonnée varie donc selon une sinusoïde et le point de vue statistique n'est ici en somme que la considération d'une collection d'individus « déterministes ».

Mais on peut imaginer des schémas où la fonction aléatoire soit discontinue sur chaque épreuve. Tel est le schéma des « libres parcours » de la Théorie cinétique. On imagine des points matériels quelconques décrivant à vitesse constante des trajets rectilignes (*libres parcours*), troublés accidentellement par de brusques déviations (*les chocs*), causant une discontinuité de la vitesse. Les vitesses avant et après un choc

sont supposées *indépendantes en probabilité*. Dans ces conditions si $\Phi(\theta)$ désigne la probabilité pour que la durée d'un libre parcours soit *inférieure* ou égale à θ , qui est aussi celle pour qu'un *choc au moins* survienne pendant la durée θ , le coefficient de corrélation est :

$$r(h) = 1 - \Phi(|h|).$$

Lorsque Φ est une fonction paire, on obtient donc ainsi une fonction indéfiniment dérivable, malgré le caractère discontinu des épreuves individuelles. L'allure de $r(h)$ obtenue dans la schéma des libres parcours est un peu particulière : en raison des propriétés d'une fonction de répartition, $r(h)$ n'est jamais négatif ni jamais croissant.

On peut imaginer un schéma encore plus discontinu sur une épreuve. Supposons que la mesure de l'ensemble des discontinuités d'une fonction «en escalier», dans l'intervalle $h, h+dh$ soit :

$$dn = \varphi(h) dh.$$

La fonction est donc discontinue sur un ensemble ayant la puissance du continu : elle est d'une classe de Baire supérieure à 1.

Posons aussi que le coefficient de corrélation entre deux valeurs de X , séparées par « n » discontinuités soit α^n ($0 < \alpha < 1$). On a alors :

$$r(h) = \alpha^{\int_0^h \varphi(h) dh}.$$

Développons $\varphi(h)$

$$\varphi(h) = \varphi(0) + h\varphi'(0) + \dots$$

Et l'on a :

$$r(h) = 1 + h\varphi(0) \log \alpha + \frac{h^2}{2} \log \alpha [\varphi'(0) + \varphi^2(0) \log \alpha] + \dots$$

et si $\varphi(0) = 0$:

$$r(h) = 1 + \log \alpha \varphi'(0) \frac{h^2}{2} + \dots$$

qui représente le coefficient de corrélation d'une fonction aléatoire stationnaire dérivable.

15. Connexion Infinitésimale. Considérons le début du développement de r :

$$r(h) = 1 - \frac{h^2}{2} \frac{S_1^2}{S_0^2} + \dots$$

Il montre que la connaissance de l'écart type de la dérivée en un point, permet d'explorer d'une manière infinitésimale la *connexion* de la fonction aléatoire au voisinage de ce point, tout comme pour une fonction

certaine, la connaissance du nombre dérivé en un point renseigne sur la fonction au voisinage de ce point.

On peut préciser davantage et montrer que l'accroissement $(X/t+h-X/t)$ d'une fonction aléatoire dérivable suit, pour h infiniment petit, une loi de Gauss d'écart type hS_1 . Cette propriété confère à la loi de Gauss une importance particulière pour l'étude des connexions infinitésimales.

16. Fonctions aléatoires de plusieurs variables. Soit P un point de coordonnées (x, y, z) et U/P une fonction aléatoire de ce point. Pour connaître complètement la fonction aléatoire U/P , il faut connaître les corrélations entre les fonctions U attachées à n points P_i .

Par exemple, pour deux points, il faut connaître la fonction de distribution conjuguée R , telle que :

$$\mathfrak{R} \left\{ \begin{array}{l} u_1 < U/P_1 < u_1 + du_1 \\ u_2 < U/P_2 < u_2 + du_2 \end{array} \right\} = R(u_1, u_2; x_1, y_1, z_1, x_2, y_2, z_2) du_1 du_2.$$

Soient trois points :

$$P_1(x+h_1, y, z) \quad P_2(x, y+h_2, z) \quad P_3(x, y, z+h_3).$$

Les dérivées partielles de U seront les fonctions aléatoires $\dot{U}_x, \dot{U}_y, \dot{U}_z$, limites, (si elles existent) des trois rapports incrémentiels :

$$\frac{U/P_1 - U/P}{h_1}, \quad \frac{U/P_2 - U/P}{h_2}, \quad \frac{U/P_3 - U/P}{h_3}.$$

La fonction aléatoire U/P engendre ainsi trois nouvelles fonctions aléatoires de P . Il existe une fonction de distribution conjuguée de U/P et de ses trois dérivées ; c'est une fonction d'une part de x, y, z , d'autre part des valeurs courantes de $\dot{U}_x, \dot{U}_y, \dot{U}_z$.

On montre facilement que : $\overline{\dot{U}_x} = \frac{\partial}{\partial x} \overline{U}$

$$\overline{\dot{U}_x \dot{U}_{x_1}} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial x_1} \overline{U U_1}; \quad \overline{\dot{U}_x \dot{U}_{y_1}} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y_1} \overline{U U_1}, \dots$$

Si $P_1 \rightarrow P$, nous obtenons par ces formules les six moments du 2^e ordre des dérivées en P :

$$\overline{\dot{U}_x^2}, \quad \overline{\dot{U}_y^2}, \quad \overline{\dot{U}_z^2}, \quad \overline{\dot{U}_y \dot{U}_x}, \quad \overline{\dot{U}_z \dot{U}_x}, \quad \overline{\dot{U}_x \dot{U}_y}.$$

Les neuf moments primitifs (quand $P_1 \neq P$) se réduisent à six lorsque $P_1 \rightarrow P$ car :

$$\lim \frac{\partial^2}{\partial x \partial y_1} \overline{UU_1} = \lim \frac{\partial^2}{\partial x \partial y_1} \overline{UU_1}.$$

Les trois dérivées partielles \dot{U}_x , \dot{U}_y , \dot{U}_z sont les composantes d'un vecteur qu'on peut appeler *gradient aléatoire* du scalaire aléatoire U .

17. Champs de Vecteurs Aléatoires. Dans l'espace à 3 dimensions, un vecteur aléatoire est l'ensemble de 3 scalaires aléatoires U/P , V/P , W/P , fonctions du point P .

Les neuf moments conjugués en deux points :

$$\left\| \begin{array}{ccc} \overline{UU_1} & \overline{UV_1} & \overline{UW_1} \\ \overline{VU_1} & \overline{VV_1} & \overline{VW_1} \\ \overline{WU_1} & \overline{WV_1} & \overline{WW_1} \end{array} \right\|$$

forment un tenseur non symétrique, dit «tenseur de connexion», mais qui devient un tenseur symétrique dit «tenseur de corrélation» lorsque $P_1 \rightarrow P$.

Les neuf dérivés aléatoires des composantes d'un vecteur

$$(\dot{U}_x, \dot{U}_y, \dot{U}_z, \dot{V}_x, \dot{V}_y, \dot{V}_z, \dot{W}_x, \dot{W}_y, \dot{W}_z)$$

forment un tenseur à composantes aléatoires.

Elles déterminent 45 moments du second ordre :

- a) 9 moments quadratiques du type $\overline{\dot{U}_x^2}$
- b) 9 moments rectangles du type $\overline{\dot{U}_x \dot{U}_y}$
- c) 9 moments rectangles du type $\overline{\dot{U}_x \dot{V}_x}$
- d) 18 moments rectangles du type $\overline{\dot{U}_x \dot{V}_y}$

Ces 45 moments du 2^e ordre sont les limites, quand $P_1 \rightarrow P$ des dérivées partielles par rapport à tous les couples fournis par deux coordonnées d'indices différents du groupe de 6 fonctions de 6 variables :

$$\begin{array}{cc} \overline{UU_1}(x, y, z; x_1, y_1, z_1) & \overline{VW_1}(x, y, z; x_1, y_1, z_1) \\ \overline{VV_1}(x, y, z; x_1, y_1, z_1) & \overline{UV_1}(x, y, z; x_1, y_1, z_1) \\ \overline{WW_1}(x, y, z; x_1, y_1, z_1) & \overline{UW_1}(x, y, z; x_1, y_1, z_1) \end{array}$$

Cela fournit $9 \times 6 = 54$ moments, mais $\overline{UU_1}$, $\overline{VV_1}$, $\overline{WW_1}$ étant symétriques donnent deux fois les mêmes dérivées partielles (quand celles-ci

sont prises par rapport à des coordonnées de noms différents); ainsi :

$$\overline{U_x U_y} = \lim \frac{\partial^2}{\partial x \partial y_1} \overline{U U_1} = \lim \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial y} \overline{U U_1}.$$

Il reste donc bien : $54 - 9 = 45$ moments distincts.

18. Corrélation Vectorielle. Désignons par Φ le vecteur aléatoire (U, V, W) et soit $A(\lambda, \mu, \nu)$ un vecteur certain de module unité. On peut synthétiser le tenseur de corrélation par la forme quadratique :

$$(\overline{\Phi A})^2 = \overline{U}^2 \lambda^2 + \overline{V}^2 \mu^2 + \overline{W}^2 \nu^2 + 2\overline{VW} \mu \nu + 2\overline{WU} \nu \lambda + 2\overline{UV} \lambda \mu$$

qui est la valeur probable du carré du produit scalaire : $(\lambda U + \mu V + \nu W)$. On voit ainsi immédiatement pourquoi les $\overline{U}^2 \dots$ forment un tenseur. C'est parce que $(\overline{\Phi A})^2$ est la moyenne (opération invariante) d'un invariant (carré d'un produit scalaire).

D'une façon générale, on obtient tous les moments conjugués des U, V, W en développant la fonction caractéristique : $e^{(\Phi A)}$.

Dans le cas des moments conjugués en deux points, il faut considérer la forme bilinéaire

$$\begin{aligned} (\overline{\Phi A})(\overline{\Phi_1 A_1}) = & \overline{U U_1} \lambda \lambda_1 + \overline{V V_1} \mu \mu_1 + \overline{W W_1} \nu \nu_1 + \overline{U V_1} \lambda \mu_1 + \overline{U_1 V} \lambda_1 \mu + \\ & + \overline{V W_1} \mu \nu_1 + \overline{V_1 W} \mu_1 \nu + \overline{W U_1} \nu \lambda_1 + \overline{W_1 U} \nu_1 \lambda. \end{aligned}$$

Pour que deux systèmes de variables purement aléatoires ¹ soient non corrélés (tous les moments rectangles nuls) il faut et il suffit que :

$$(\overline{\Phi A})(\overline{\Phi_1 A_1}) = 0$$

quels que soient les vecteurs A et A_1 (de module unité).

REMARQUE : On peut former le tenseur certain le plus général par les opérations statistiques que nous venons d'employer. Soit par exemple trois vecteurs certains A, B, C . On forme le produit des 3 produits scalaires :

$$(\Phi A)(\Psi B)(\chi C)$$

forme trilinéaire qui définit un tenseur aléatoire à 3 indices très particulier puisque chacun de ses termes $U_i V_j W_k$ est le produit des composantes de 3 vecteurs.

¹ C'est à dire de valeur probable nulle.

Mais la moyenne de cette forme trilinéaire représente un *tenseur certain* :

$$a_{ijk} = \overline{U_i V_j W_k}$$

qui ne présente plus aucune particularité.

On peut donc concevoir que la notion générale de tenseur se déduise de celle de vecteur par des opérations statistiques.

19. *Fonction de Connexion.* Soient deux variables aléatoires U et U_1 . La fonction caractéristique de leur loi conjuguée est :

$$\overline{e^{\lambda U + \lambda_1 U_1}} = \sum \frac{\lambda^\alpha \lambda_1^\beta}{\alpha! \beta!} \overline{U^\alpha U_1^\beta}.$$

Si les variables U et U_1 sont indépendantes, tous les moments conjugués $\overline{U^\alpha U_1^\beta}$ deviennent des produits $\overline{U^\alpha} \overline{U_1^\beta}$ et la fonction caractéristique prend la forme :

$$\overline{e^{\lambda U}} \overline{e^{\lambda_1 U_1}} = \sum \frac{\lambda^\alpha \lambda_1^\beta}{\alpha! \beta!} \overline{U^\alpha} \overline{U_1^\beta}.$$

Nous appellerons « *fonction de connexion* » la fonction :

$$\Theta(\lambda, \lambda_1) = \overline{e^{\lambda U + \lambda_1 U_1}} - \overline{e^{\lambda U}} \overline{e^{\lambda_1 U_1}}.$$

Si au lieu de deux *variables* aléatoires, on a deux *vecteurs* aléatoires Φ et Φ_1 , la fonction de connexion est :

$$\Theta(A, A_1) = \overline{e^{(\Phi, A) + (\Phi_1, A_1)}} - \overline{e^{(\Phi, A)}} \overline{e^{(\Phi_1, A_1)}}.$$

Elles disparaît si les *vecteurs* Φ et Φ_1 sont *indépendants* entre eux, quelle que soit la corrélation qui existe entre les *composantes* de Φ ou entre les *composantes* de Φ_1 . Cette fonction fait la séparation entre les propriétés statistiques *internes* d'un vecteur (qui sont relatives aux corrélations entre ses composantes) et les propriétés statistiques proprement vectorielles, qui concernent les relations entre des êtres géométriques.

20. *Tenseur de Connexion dans le cas d'isotropie.*¹ Soit $\Phi, (U_i, V_i, W)$ un vecteur aléatoire fonction du point M . Considérons le tenseur de

¹ Le cas a été envisagé par de Kármán à propos du problème de la Turbulence.

connexion relatif à deux points M et M₁ et dont les composantes sont :

$$a_{11} = \overline{UU}_1; \quad a_{12} = \overline{UV}_1, \dots$$

Nous dirons qu'il y a *homogénéité* si les *a_{ij}* restent les mêmes après une translation du vecteur MM₁. Alors les *a_{ij}* ne dépendent que de la *différence* des coordonnées de M et de M₁.

Il y a, en outre, *isotropie* lorsque le tenseur *a_{ij}* présente une symétrie de révolution autour de la droite MM₁, et ne dépend que de la distance MM₁ = *r*.

Pour exprimer l'isotropie, il faut écrire que λ₁, λ₂, λ₃ et μ₁, μ₂, μ₃, désignant les composantes de deux vecteurs, la forme bilinéaire :

$$\sum \sum a_{ij} \lambda_i \mu_j$$

qui est invariante par rapport aux changements de coordonnées, admet la symétrie de révolution autour de la droite MM₁ et qu'elle reste invariante quand la distance MM₁ reste constante.

$\sum \sum a_{ij} \lambda_i \mu_j$ doit donc être combinaison linéaire d'une « sphère généralisée » et du carré d'un plan généralisé, la généralisation consistant à passer des formes quadratiques aux formes bilinéaires.

Donc :

$$\sum \sum a_{ij} \lambda_i \mu_j = A \sum \lambda_i \mu_j + B (\sum \lambda_i x_i) (\sum x_j \mu_j).$$

En effet, si on passe de là aux formes quadratiques, on écrit simplement que la quadrique $\sum \sum a_{ij} \lambda_i \lambda_j$, combinaison linéaire et homogène d'une sphère de centre M et d'un plan orthogonal à MM₁, est de révolution autour de MM₁.

Pour exprimer la condition d'invariance par rapport aux déplacements de M₁ sur toute sphère de centre M, il suffit d'ajouter que les grandeurs A et B sont fonctions de la distance *r* = MM₁, seulement.

On trouve, en identifiant :

$$a_{ij} = A \delta_{ij} + B x_i x_j$$

δ_{ij}, étant le symbole de *Kronecker*.

On pose d'habitude :

$$A = g(r), \quad B = \frac{f(r) - g(r)}{r^2}$$

ce qui permet d'écrire :

$$a_{ij} = \frac{f(r) - g(r)}{r^2} x_i x_j + g(r) \delta_{ij}.$$

On a, par exemple :

$$\overline{UU}_1 = \frac{f(r)-g(r)}{r^2} x^2 + g(r), \quad \overline{UV}_1 = \frac{f(r)-g(r)}{r^2} xy.$$

Pour interpréter les fonctions f et g , il suffit, à cause de l'isotropie, de choisir la position de M_1 la plus commode, c'est-à-dire de prendre pour coordonnées de M_1 : $x=1$, $y=0$, $z=0$ par rapport à M .

Alors, le tenseur de connexion ne contient plus que des termes diagonaux et s'écrit :

$$\begin{vmatrix} f(r) & 0 & 0 \\ 0 & g(r) & 0 \\ 0 & 0 & g(r) \end{vmatrix}$$

ce qui montre que $f(r)$ représente à un facteur près égal à la dispersion d'une quelconque des composantes du vecteur Φ , le coefficient de corrélation entre les composantes des vecteurs Φ et Φ_1 , portées par la droite MM_1 , $g(r)$ représentant de même le coefficient de corrélation de deux composantes normales à MM_1 (non parallèles).

La connexion se trouve ainsi représentée par deux fonctions seulement : f et g . Quand M_1 tend vers M , il faut que $\frac{f(r)-g(r)}{r^2}$ reste fini et alors le tenseur de connexion tend vers le tenseur de corrélation isotrope en M :

$$\begin{aligned} \overline{U}_2 &= \overline{V}^2 = \overline{W}^2 = g(0) \\ \overline{VW} &= \overline{UW} = \overline{UV} = 0. \end{aligned}$$

III — PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS DE DISTRIBUTION

21. Développement des fonctions conjuguées en 2 et 3 points. Le fait qu'une fonction aléatoire X/t est dérivable une ou plusieurs fois en moyenne quadratique, entraîne certaines propriétés des fonctions de distribution conjuguées en plusieurs points (c'est à dire des propriétés de la *connexion*), qui ont elles mêmes pour conséquences des propriétés des fonctions de distribution conjuguées de X et des dérivées.

D'une façon générale, la fonction de distribution conjuguée en 2 points :

$$g(x, x_1; t, t_1)$$

est soumise aux conditions de symétrie et de continuité suivantes :

$$\begin{aligned} g(x, x_1; t, t_1) &= g(x_1, x; t_1, t) \\ \text{et} \quad g(x, x_1; t, t_1) &= \begin{cases} 0 & \text{si } x \neq x_1 \\ \infty & \text{si } x = x_1. \end{cases} \end{aligned}$$

Si nous ajoutons maintenant que X/t est dérivable en moyenne quadratique, il va en résulter de nouvelles propriétés pour g . Le rapport incrémentiel :

$$U = \frac{Xt_1 - X/t}{t_1 - t}$$

ayant une limite aléatoire quand $\tau = (t_2 - t_1) \rightarrow 0$, la fonction de distribution de X et de U tend vers une limite qui est la fonction de distribution de X et de \dot{X} .

Or, la loi de probabilité de X et de U s'obtient par un simple changement de variables ; c'est :

$$|\tau| g(x, x + \tau u ; t, t + \tau)$$

que nous désignerons par :

$$g_1(x, u ; t, \tau).$$

Pour $\tau = 0$, $g_1(x, u ; t, 0)$ n'est autre que la fonction de distribution conjuguée de X et de \dot{X} :

$$R(x, u ; t)$$

u désignant la valeur courante de \dot{X} .

On peut donc généralement écrire :

$$g_1(x, u ; t, \tau) = R(x, u ; t) + \tau R_1(x, u ; t) + \dots$$

Exprimons maintenant la condition de symétrie qui, avec g_1 , s'écrit :

$$g_1(x, u ; t, \tau) = g_1(x + u\tau, u, t + \tau, -\tau).$$

Cela donne :

$$R(x, u ; t) + \tau R_1(x, u ; t) + \dots = R(x + u\tau, u ; t + \tau) + \tau R_1(x + u\tau, u ; t + \tau) + \dots$$

d'où en développant le second membre et identifiant les termes en τ :

$$R_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial R}{\partial x} \right).$$

Si nous intégrons $g_1(x, u ; t, \tau)$ par rapport à u , nous obtenons la fonction de distribution $\varphi(x, t)$ de X .

Mais nous avons aussi le même résultat en intégrant $R(x, u, t)$ par rapport à u ; d'où il suit que :

$$\int R_1 du = \int \left(\frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial R}{\partial x} \right) du = 0.$$

Ainsi la fonction de distribution conjuguée R de X et de sa dérivée \dot{X} est plus particulière que si X et \dot{X} étaient des variables aléatoires sans parenté. Elle vérifie la condition précédente qu'on peut rendre plus suggestive en introduisant la *moyenne liée* \bar{U} de V pour $X=x$

$$\bar{U} = \frac{1}{\rho} \int R u d u .$$

La condition prend alors la forme d'une *équation de continuité* :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{U}) = 0$$

qui se généralise sans difficulté pour le cas de plusieurs variables :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{U}) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho \bar{V}) + \frac{\partial}{\partial z} (\rho \bar{W}) = 0 .$$

Habituellement nous écrivons cette équation de continuité sous la forme abrégée :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{U}) = 0 .$$

Le signe \sum veut dire : « somme de termes semblables à ... »

Le résultat qui précède peut s'obtenir par une méthode tout à fait différente qui consiste à expliciter l'identité fondamentale :

$$\frac{d}{dt} \bar{\psi} = \bar{\dot{\psi}}$$

en choisissant pour ψ une fonction arbitraire assujettie seulement à être nulle aux limites du domaine d'intégration.

Cette seconde méthode met bien en évidence que les équations aux dérivées partielles que nous avons obtenues sont une conséquence directe de la dérivabilité.

En étudiant la fonction de distribution en trois points :

$$h(x, x_1, x_2; t, t_1, t_2)$$

qui est invariante par des permutations effectuées simultanément sur x, x_1, x_2 et t, t_1, t_2 et introduisant le fait que X est doublement dérivable, on démontre que la fonction de distribution conjuguée :

$$S(x, u, \alpha; t)$$

de X, \dot{X}, \ddot{X} vérifie la condition :

$$\int \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + \alpha \frac{\partial S}{\partial u} \right) d\alpha = 0$$

que l'on peut mettre sous la forme plus significative :

$$\frac{\partial R}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial u} (R\bar{A}) = 0$$

\bar{A} , étant la moyenne doublement liée de \ddot{X} pour $X=x$ et $U=u$.

Si l'on pousse plus loin l'approximation, on trouve des équations du second ordre vérifiées par les fonctions de distributions ; nous retiendrons celle-ci susceptible d'applications :

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} (\rho \bar{U}^2) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{A}) = 0$$

\bar{A} est la moyenne simplement liée de \ddot{X} pour $X=x$.

22. Équation générale de transfert. Soit :

$$S(x, u, \alpha, \beta, \gamma; t)$$

la fonction de distribution conjuguée de X et d'un nombre quelconque de ses dérivées, par exemple

$$\dot{X}, \ddot{X}, \ddot{\ddot{X}}, \overset{(iv)}{X}.$$

D'après ce que l'on vient de voir, S vérifie la condition :

$$\int \left(\frac{\partial S}{\partial t} + u \frac{\partial S}{\partial x} + \alpha \frac{\partial S}{\partial u} + \beta \frac{\partial S}{\partial \alpha} + \gamma \frac{\partial S}{\partial \beta} \right) d\gamma = 0.$$

Si l'on multiplie par une fonction certaine quelconque :

$$\psi(x, u, \alpha, \beta, t)$$

et qu'on intègre par rapport à α et β , on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{\psi}) + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{\psi} U) = \rho \bar{\psi}$$

et dans le cas de plusieurs variables :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \bar{\psi}) + \sum \frac{\partial}{\partial x} (\rho \bar{\psi} U) = \rho \bar{\psi}$$

C'est l'équation générale de transfert d'une grandeur ψ qui peut être fonction de X et d'un nombre quelconque de ses dérivées.

Elle trouvera de nombreuses applications en Mécanique des Fluides Turbulents.

IV — INTÉGRATION ALÉATOIRE

23 — Définition et propriétés fondamentales. Il est bien connu en Analyse que la notion de dérivée est une notion locale. En Analyse aléatoire, on rencontre d'habitude des fonctions qui, dans chaque réalisation élémentaire (épreuve), ne sont dérivables pour aucune valeur de la variable et peuvent même ne jamais être continues. Le seul moyen de définir une dérivée est de rassembler sous forme statistique les diverses réalisations et l'on arrive ainsi à la dérivée en moyenne quadratique.

On sait qu'au contraire l'intégration est une opération globale et qu'elle s'applique même à des fonctions discontinues. La définition de l'intégrale aléatoire est donc plus directe que celle de la dérivée aléatoire. Soit U/t une fonction aléatoire. Désignons par $\mathfrak{M}(t)$ une réalisation quelconque de U/t pour l'ensemble des valeurs de t , à la suite d'une épreuve statistique, et calculons l'intégrale :¹

$$J = \int_a^b \mathfrak{M}(t) dt$$

qui jouit, de par sa définition, des deux propriétés essentielles des intégrales non aléatoires :

$$\int_a^b (U/t + V/t) dt = \int_a^b U/t dt + \int_a^b V/t dt; \quad \int_a^b = \int_a^c + \int_c^b.$$

On définit sans peine les intégrales aléatoires multiples qui se calculent comme les intégrales multiples ordinaires.

Mais les intégrales aléatoires ont des propriétés particulières, dont la seconde est formellement équivalente à la propriété fondamentale des intégrales ordinaires, mais en diffère en réalité profondément.

Premier théorème (Echange du signe d'intégration et du signe trait).

¹ Cette intégrale existe si la fonction $\mathfrak{M}(t)$ est sommable au sens de Lebesgue. Il en est ainsi de toutes les fonctions de Baire.

Si la fonction $\overline{|U/t|}$ est sommable, on peut écrire :

$$\int_a^b \overline{U/t} dt = \int_a^b \overline{U/t} dt.$$

Ce théorème, qui est évident si la fonction U/t est intégrable au sens de Riemann (ce qui n'est pas le cas plus fréquent) a été démontré par Slutsky, et nous l'admettrons.

Second théorème.

Si U/t est continue en moyenne quadratique, la fonction aléatoire

$$I/t = \int_a^t U/s ds$$

est dérivable en moyenne quadratique et a pour dérivée U/t .

Il faut former la moyenne $\overline{Z^2}$ du carré de :

$$Z = \frac{I/t+h - I/t}{h} - U/t$$

et montrer qu'elle tend vers zéro avec h .

Comme en Analyse ordinaire, on trouve que :

$$Z = \frac{1}{h} \int_t^{t+h} [U/s - U/t] ds.$$

A partir de ce moment, l'analyse aléatoire se sépare de l'analyse ordinaire. Les propriétés des intégrales aléatoires permettent d'écrire :

$$Z^2 = \frac{1}{h^2} \iint (U/\alpha - U/t)(U/\beta - U/t) d\alpha d\beta$$

l'intégrale double étant étendue au carré :

$$(t, t), (t+h, t), (t+h, t+h), (t, t+h)$$

et

$$\overline{Z^2} = \frac{1}{h^2} \iint \overline{(U/\alpha - U/t)(U/\beta - U/t)} d\alpha d\beta.$$

D'après l'inégalité de Schwartz :

$$\overline{(U/\alpha - U/t)(U/\beta - U/t)} \leq \sqrt{\overline{(U/\alpha - U/t)^2}} \sqrt{\overline{(U/\beta - U/t)^2}}$$

Or, si U/t est une fonction aléatoire continue, on peut trouver une valeur h_0 de h telle que si $h < h_0$:

$$\sqrt{(\overline{U/t+h-U/t})^2} < \varepsilon$$

ε , étant un nombre positif arbitrairement petit.

Il en résulte que

$$\sqrt{(\overline{U/\alpha-U/t})^2} < \varepsilon$$

$$\sqrt{(\overline{U/\beta-U/t})^2} < \varepsilon$$

et que

$$\overline{Z^2} \leq \frac{1}{h^2} \varepsilon^2 \iint dx d\beta < \varepsilon^2$$

ce qui montre bien que $\overline{Z^2}$ tend vers zéro avec h .

24. Moyennes aléatoires. *La constante aléatoire :*

$$X = \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} U/s ds$$

peut être appelée moyenne aléatoire de la fonction aléatoire dans l'intervalle $(t, t+\tau)$.

L'écart type de X est (on suppose $\overline{U/s} = 0$):

$$\overline{X^2} = \frac{1}{\tau^2} \overline{\left(\int_t^{t+\tau} U/s ds \right)^2} = \frac{1}{\tau^2} \iint \overline{U/\alpha U/\beta} dx d\beta.$$

Désignons par $S(\alpha)$, l'écart type de U/α et par $r(\alpha, \beta)$ le coefficient de corrélation entre U/α et U/β , qui mesure la *connexion* du champ de la fonction aléatoire U/s .

Alors :

$$\overline{X^2} = \frac{1}{\tau^2} \iint S(\alpha) S(\beta) r(\alpha, \beta) dx d\beta$$

l'intégrale double étant étendue au carré de côté τ construit à partir du sommet (t, t) .

On découvre le fait fondamental suivant :

L'écart type de l'intégrale dépend essentiellement de la connexion du champ de la fonction à intégrer.

Nous verrons, dans les applications, que ce fait mathématique a une importance énorme pour la compréhension de la « turbulence » des fluides.

Imaginons un type de connexion pour lequel $r(\alpha, \beta)$ soit nul, sauf ce qui est nécessaire, si $|\alpha - \beta| < \varepsilon$, ε étant un nombre donné très petit. L'aire d'intégration devient alors simplement une bande étroite

axée sur la diagonale du carré. Soit S une borne supérieure de $S(x)$. L'intégrale est inférieure à :

$$\frac{S^2}{\tau^2} \iint dx d\beta = \frac{S^2}{\tau^2} (2\tau\varepsilon - \varepsilon^2)$$

soit encore à :

$$2S^2 \frac{\varepsilon}{\tau}$$

La dispersion de l'intégrale aléatoire est donc *très faible* et l'on peut dire que : *c'est la connexion du champ de la fonction aléatoire qui entraîne l'existence de son intégrale aléatoire.*

Une autre remarque est à faire : comme $|r(\alpha, \beta)| \leq 1$,

$$\overline{X^2} \leq \frac{1}{\tau^2} \iint S(x)S(\beta) dx d\beta = \left[\frac{1}{\tau} \int S(x) d(x) \right]^2 = (\mathfrak{N}_{0y} S)^2$$

d'où :

$$\sqrt{\overline{X^2}} \leq \mathfrak{N}_{0y} S.$$

Ainsi l'écart type de la moyenne aléatoire est au plus égal à la moyenne de l'écart type de la fonction.

Supposons maintenant que U soit une fonction aléatoire *stationnaire* ; nous entendons par là que $r(\alpha, \beta)$ soit simplement fonction de $(\beta - \alpha)$ et que $S(x)$ soit une constante S .

$\overline{X^2}$ se met alors facilement sous la forme d'une intégrale simple :

$$\overline{X^2} = \frac{2S^2}{\tau^2} \int_0^\tau (\tau - s) r(s) ds$$

est l'on voit bien que, $|r(s)|$ étant ≤ 1

$$\overline{X^2} \leq S^2.$$

L'opération de moyenne diminue la dispersion.

Dans le cas où

$$\begin{aligned} r(s) &\neq 0 && \text{pour } (s) \leq \varepsilon \\ &= 0 && \text{pour } (s) > \varepsilon \end{aligned}$$

on a

$$\overline{X^2} \leq \frac{S^2}{\tau^2} (2\tau\varepsilon - \varepsilon^2) < 2S^2 \frac{\varepsilon}{\tau}.$$

25. Intégrale à éléments aléatoires indépendants. La dispersion de l'intégrale :

$$I = \int_a^b U/t dt$$

est égale à :

$$\bar{I}^2 = \int_a^b \int_a^b S(\alpha) S(\beta) r(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

$r(\alpha, \beta)$ étant le coefficient de corrélation entre U/α et U/β .

Si la connexion de la fonction aléatoire U/t dégénère, de façon que U/α et U/β soient indépendants lorsque $\beta \neq \alpha$, alors :

$$r(\alpha, \beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \neq \alpha \\ 1 & \text{si } \beta = \alpha \end{cases}$$

On voit que $\bar{I}^2 = 0$. Le nombre aléatoire I se réduit à sa valeur moyenne :

$$\bar{I} = \int_a^b \bar{U}/t dt$$

et l'intégrale de U/t cesse d'être aléatoire.

Le problème de l'intégration aléatoire n'appartient plus au calcul des probabilités.

Il est cependant possible d'attacher une intégrale aléatoire d'un type nouveau, qui jouit encore de la plupart des propriétés des intégrales classiques, sauf qu'elle n'est plus dérivable par rapport à sa limite supérieure. C'est l'intégrale à *éléments aléatoires indépendants* de P. Levy, dont nous nous contenterons de donner rapidement la définition.

Considérons une fonction aléatoire I/t , de valeur probable nulle, telle que l'accroissement $\Delta I = I/t+h - I/t$, relatif à un accroissement positif h du temps (non nécessairement infinitésimal), soit indépendant de I/t' pour tout instant t' antérieur à t . Soit $\sigma(t)$ la dispersion de I/t et supposons que pour $t=0$, $I(t)$ se réduise à la valeur zero :

Par hypothèse :

$$\overline{I/t(I/t+h - I/t)} = 0$$

ou

$$\overline{I/t I/t+h} = \overline{I^2/t} = \sigma^2(t).$$

Par suite :

$$(\overline{\Delta I})^2 = \overline{(I/t+h - I/t)^2} = \overline{I^2/t+h} + \overline{I^2/t} - 2\overline{I/t I/t+h} = \sigma^2(t+h) - \sigma^2(t).$$

Si, en particulier h est très petit, la fonction σ étant continue, on voit que la dispersion de ΔI a pour partie principale $\sqrt{2\sigma\sigma'}\sqrt{h}$. Elle est d'ordre \sqrt{h} et non plus d'ordre h .

Divisons alors l'intervalle $(0, t)$ par des points t_1, \dots, t_{n-1} en intervalles partiels d'abord finis, et ensuite infiniment petits, et posons :

$$\Delta_k = I(t_k) - I(t_{k-1}).$$

On a :

$$I/t = \Delta_1 + \Delta_2 + \dots + \Delta_n.$$

Les Δ_k sont deux à deux indépendants, et quand $(t_{k-1} - t_k) \rightarrow 0$, la dispersion de $\frac{\Delta_k}{\sqrt{t_{k+1} - t_k}}$, et non plus de $\frac{\Delta_k}{(t_{k+1} - t_k)}$, reste finie.

On peut donc considérer I/t comme une intégrale d'accroissement aléatoire de la forme $U/t\sqrt{h}$, la fonction aléatoire U/t étant à connexion dégénérée : I/t est une intégrale d'éléments aléatoires indépendants, dont les propriétés diffèrent beaucoup de celles de l'intégrale ordinaire.

On peut la représenter par le symbole :

$$X = \int U/s\sqrt{ds}.$$

Alors :

$$\overline{X^2} = \iint \overline{U/\alpha U/\beta} \sqrt{d\alpha d\beta}$$

et comme le moment rectangle n'a une valeur non nulle que sur la diagonale $\alpha = \beta$:

$$\overline{X^2} = \int \overline{U^2}(\alpha) d\alpha.$$

Dans cette conception, la dispersion de l'intégrale est égale à l'intégrale de la dispersion, formule qui généralise la propriété de la somme d'un nombre fini de variables aléatoires indépendantes d'avoir une dispersion égale à la somme des dispersions des composantes.

26. Propriétés des moyennes arithmétiques. On comprend mieux l'importance de la connexion dans la notion d'intégrale aléatoire quand on observe ce qui se passe sur la moyenne arithmétique d'un très grand nombre de variables aléatoires.

Soit X la moyenne arithmétique de n variables aléatoires $X_1, X_2 \dots X_n$, de valeur probable nulle :

$$X = \frac{\sum X_i}{n}.$$

Appelons r_{ij} le coefficient de corrélation entre X_i et X_j et S_i l'écart type de X_i . L'écart type S de X est donné par :

$$S^2 = \frac{1}{n^2} \sum \sum r_{ij} S_i S_j.$$

Supposons pour bien voir le fond de la question, les S_i tous égaux à 1 et les r_{ij} tous égaux à un même nombre r .

On trouve immédiatement :

$$S^2 = r + \frac{1-r}{n}.$$

Lorsque $r=0$ (c'est le cas en particulier si les variables sont indépendantes), S^2 est le nombre très petit $\frac{1}{n}$.

Au contraire, si les variables sont corrélées, l'écart type cesse tout de suite d'être négligeable.

En gros :

$$S^2 = r.$$

Donc la fluctuation moyenne d'un grand nombre de variables est la conséquence de la corrélation entre ces variables. Elle est d'ailleurs inférieure à leur fluctuation commune.

De plus, S^2 étant positif, on a lorsque n est fini :

$$r > \frac{-1}{n-1}.$$

Si $n \rightarrow \infty$, r ne peut rester négatif.

Si un très grand nombre de variables aléatoires présentent deux à deux la même corrélation, celle-ci ne saurait être négative.

27. Equations différentielles aléatoires. On peut dire que la théorie classique des équations différentielles repose sur le théorème fondamental suivant : si, en tous points d'un intervalle (a, b) , la fonction $X(t)$ admet une dérivée et si cette dérivée est nulle, alors $X(t)$ est une constante.

On sait que ce théorème se démontre à l'aide de la formule des accroissements finis. En analyse aléatoire, il n'y a pas de formule des accroissements finis. Mais cependant le théorème précédent subsiste.

En effet :

1.°) \overline{X} ne dépend pas de t car $\frac{d\overline{X}}{dt} = \overline{\dot{X}} = 0$.

2.°) $\overline{X_1 X_2}$ ne dépend ni de t_1 ni de t_2 , car : $\frac{\partial}{\partial t_1} \overline{X_1 X_2} = \overline{\dot{X}_1 X_2} = 0$

et de même $\frac{\partial}{\partial t_2} = 0$.

3.°) $\overline{X'_1 X'_2}$ ($X' = X - \overline{X}$) est donc une constante C , donc aussi $\overline{X'^2}$ et le coefficient de corrélation est égal à un.

Par conséquent X est bien une constante aléatoire.

Cette propriété se rattache à celle du coefficient de corrélation selon laquelle si :

$$\frac{1-r(h)}{h^{2+\varepsilon}} \rightarrow \lambda \neq 0 \quad (\varepsilon > 0)$$

il est identiquement égal à l'unité (conditions de cohérence).

Il ne peut donc pas se produire qu'une fonction aléatoire admette une dérivée nulle sans être une constante aléatoire.

28. Oscillateur à fréquence aléatoire. Nous allons étudier sur un exemple : l'oscillateur aléatoire à fréquence aléatoire, comment se présente l'intégration d'une équation différentielle aléatoire.

L'oscillateur aléatoire est la fonction :

$$X/t = A \sin(\Omega t - \Phi)$$

où A , Ω et Φ sont trois constantes aléatoires : l'amplitude, la pulsation et la phase ($\Omega > 0$).

X est solution de l'équation différentielle aléatoire :

$$\ddot{X} + \Omega^2 X = 0.$$

Cette équation admet une intégrale première : l'intégrale des forces vives :

$$\dot{X}^2 + \Omega^2 X^2 = 2E$$

où la constante aléatoire E , énergie de l'oscillateur a pour expression :

$$E = \frac{1}{2} A^2 \Omega^2$$

en fonction des données.

Nous nous proposons de chercher à quelles conditions l'oscillateur est une fonction aléatoire stationnaire en probabilité, c'est à dire telle que la loi de probabilité de X ne dépende pas de t :

a) *Loi de probabilité de l'oscillateur aléatoire.*

1^{ère} Méthode. L'oscillateur dépend de 3 constantes aléatoires. Nous saurons tout sur son compte en nous donnant la loi de probabilité conjuguée de ces 3 constantes aléatoires.

En fait, il est plus commode de définir X par les 3 autres constantes aléatoires :

$$B = A \cos \varphi; \quad C = A \sin \varphi; \quad \Omega$$

à l'aide desquelles X s'exprime par :

$$X = B \sin \Omega t - C \cos \Omega t$$

et $\frac{\dot{X}}{\Omega}$ par

$$\frac{\dot{X}}{\Omega} = B \cos \Omega t + C \sin \Omega t.$$

Soit donc $R_0(b, c, \omega)$ la fonction de distribution conjuguée de B, C, Ω .

Pour passer de là aux variables X, \dot{X}, Ω , il faut faire le changement de variables :

$$\begin{cases} b = x \sin \omega t + \frac{u}{\omega} \cos \omega t \\ c = -x \cos \omega t + \frac{u}{\omega} \sin \omega t \end{cases}$$

avec

$$\frac{D(b, c)}{D(x, u)} = \frac{1}{\omega}.$$

La fonction de distribution conjuguée de X, \dot{X}, Ω a donc pour expression :

$$\frac{1}{\omega} R_0\left(x \sin \omega t + \frac{u}{\omega} \cos \omega t, -x \cos \omega t + \frac{u}{\omega} \sin \omega t, \omega\right).$$

Remarquons maintenant que R_0 est aussi bien une fonction de $b^2 + c^2$, b et ω et qu'on peut écrire :

$$R_0(b, c, \omega) = R_1(b^2 + c^2, b, \omega).$$

La fonction de distribution conjuguée de X, \dot{X}, Ω s'écrit alors :

$$\frac{1}{\omega} R_1\left(x^2 + \frac{u^2}{\omega^2}, x \sin \omega t + \frac{u}{\omega} \cos \omega t, \omega\right).$$

Pour que l'oscillateur soit stationnaire, il est nécessaire qu'elle ne dépende pas de l'argument dans lequel le temps apparaît, c'est-à-dire que la fonction $R_1(b^2 + c^2, b, \omega)$ s'écrive simplement $R_2(b^2 + c^2, \omega)$. Finalement, nous écrirons la fonction de distribution conjuguée de X, \dot{X}, Ω dans le cas stationnaire sous la forme :

$$R\left(\frac{\omega^4 x^2 + u^2}{2}, \omega\right).$$

Autrement dit :

$$\mathfrak{R} \left\{ \begin{array}{l} x < X < x + dx \\ u < \dot{X} < u + du \\ \omega < \Omega < \omega + d\omega \end{array} \right\} = \mathfrak{R} \left(\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}, \omega \right) dx du d\omega .$$

2^{ème} Méthode. Utilisons l'équation différentielle aléatoire :

$$\ddot{X} + \Omega^2 X = 0$$

et cherchons la fonction de distribution conjuguée de X, de \dot{X} et de la constante aléatoire Ω qui y figure seulement comme paramètre.

Nous savons qu'elle vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial t} + u \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} - \omega^2 x \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial u} = 0$$

qui, en cas de stationnarité, se réduit à :

$$u \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial x} - \omega^2 x \frac{\partial \mathfrak{R}}{\partial u} = 0 .$$

Pour chaque valeur de ω , la solution générale en est l'intégrale première du système différentiel :

$$\frac{dx}{u} = \frac{du}{-\omega^2 x}$$

c'est à dire une fonction arbitraire de $\omega^2 x^2 + u^2$. La fonction cherchée a donc la forme :

$$\mathfrak{R} \left(\frac{\omega^2 x^2 + u^2}{2}, \omega \right)$$

ce qui est le résultat trouvé par la 1^{ère} méthode.

b) *Loi de probabilité de l'amplitude, de la fréquence et de la phase dans le cas stationnaire.*

Le calcul inverse de celui que nous faisons dans la 1^{ère} méthode, montre que la loi de probabilité conjuguée de b, c, ω est :

$$\omega \mathfrak{R} \left[\frac{\omega (b^2 + c^2)}{2}, \omega \right] .$$

Passons des constantes B et C à l'amplitude A et la phase Φ par le changement de variables :

$$\begin{cases} b = a \cos \varphi \\ c = a \sin \varphi . \end{cases}$$

La loi de probabilité conjuguée de Λ, Φ, Ω est :

$$\omega a R\left(\frac{\omega^2 a^2}{2}, \omega\right).$$

Elle ne dépend pas de φ . Elle est donc le produit d'une fonction de ω et de a par une fonction de φ , laquelle se réduit d'ailleurs à une constante.

La phase aléatoire Φ est donc une variable aléatoire indépendante de l'amplitude et de la pulsation et elle est répartie uniformément en probabilité (dans un intervalle d'amplitude 2π , bien entendu).

Il en résulte que la fonction de distribution conjuguée de Λ et de Ω a pour expression :

$$\int_0^{2\pi} \omega a R\left(\frac{\omega^2 a^2}{2}, \omega\right) d\varphi = 2\pi \omega a R\left(\frac{\omega^2 a^2}{2}, \omega\right).$$

Cherchons enfin la fonction de distribution conjuguée de l'énergie E et de la pulsation Ω de l'oscillateur. Cette fonction est intéressante parce qu'elle contient les deux grandeurs ayant une signification physique et un caractère intrinsèque et invariant. De la définition :

$$E = \frac{1}{2} \Lambda^2 \Omega^2$$

de l'énergie, on déduit tout de suite le résultat :

$$\frac{2\pi}{\omega} R(\varepsilon, \omega).$$

c) *L'oscillateur stationnaire en probabilité est complètement stationnaire.*

Nous disons qu'une fonction aléatoire est complètement stationnaire, lorsque son moment linéaire ne dépend que des différences $(t_j - t_i)$ entre les époques t_1, t_2, \dots, t_n . L'expression analytique de l'oscillateur aléatoire dépend de trois constantes aléatoires. Supposons que nous connaissions les valeurs X_1, X_2, X_3 de X à trois instants t_1, t_2, t_3 arbitraires. Nous pouvons alors calculer la valeur de X à un instant quelconque :

X/t est une fonction certaine de X_1, X_2, X_3 .

Cette remarque est très importante, car elle montre que l'oscillateur aléatoire est une fonction aléatoire un peu particulière : la loi de probabilité des valeurs de X/t prises à n instants successifs n'est pas

essentiellement distincte de la loi de probabilité de X/t à *trois* instants t_1, t_2, t_3 seulement : la connexion est donc très simplifiée. Comme la pulsation Ω joue un rôle à part, il est commode de la conserver et de la conjuguer avec des valeurs de X prises à deux instants seulement : X/t est une fonction certaine de X_1, X_2, Ω . On trouve facilement que :

$$X/t = \frac{X_1 \sin \Omega (t_2 - t) - X_2 \sin \Omega (t_1 - t)}{\sin \Omega (t_2 - t_1)}.$$

L'expression analytique de X/t en fonction de $X/t_1, X/t_2$ et Ω ne dépend que des *différences* $(t_2 - t), (t_1 - t), (t_2 - t_1)$.

Si nous démontrons que la loi de probabilité conjuguée de X_1, X_2, Ω ne dépend que de la différence $(t_2 - t_1)$ il en résultera donc que la loi de probabilité conjuguée des valeurs de X/t en n points ne dépend que des intervalles de temps, et non des temps eux-mêmes, d'où il suivra que l'oscillateur est complètement stationnaire.

Or, il est bien facile de former la fonction de distribution conjuguée de X_1, X_2 et Ω . La fonction de distribution conjuguée de B, C, Φ étant :

$$\omega R \left[\frac{b^2 + c^2}{2} \omega^2, \omega \right]$$

il suffit de faire le changement de variables :

$$\begin{cases} x_1 = b \sin \omega t_1 - c \cos \omega t_1 \\ x_2 = b \sin \omega t_2 - c \cos \omega t_2 \end{cases}$$

et l'on trouve :

$$\frac{\omega}{|\sin \omega (t_2 - t_1)|} R \left[\frac{\omega^2 x_1^2 + x_2^2 - 2x_1 x_2 \cos \omega (t_2 - t_1)}{2 (\sin^2 \omega (t_2 - t_1))}, \omega \right].$$

La loi de probabilité conjuguée de X_1, X_2 et Ω dépend donc du temps uniquement par la différence $(t_2 - t_1)$. Il en résulte que les conditions : phase indépendante de l'amplitude et de la pulsation, et répartie uniformément dans un intervalle 2π , constituent la condition nécessaire et suffisante pour que l'oscillateur aléatoire soit complètement stationnaire.

d) *Propriétés des moments. Connexion.*

Le moment rectangle $\overline{X_1 X_2}$ a pour expression :

$$\begin{aligned} \overline{X_1 X_2} &= \overline{A^2 \sin (\Omega t_1 - \Phi) \sin (\Omega t_2 - \Phi)} = \\ &= \frac{A^2 \cos \Omega (t_2 - t_1)}{2} - \frac{A^2}{2} \cos [\Omega (t_1 + t_2) - 2\Phi]. \end{aligned}$$

Pour calculer le 2^{ème} terme, on peut d'abord donner à Λ et Ω des valeurs fixes et intégrer par rapport à φ . Comme la fonction de distribution de φ est $\frac{1}{2\pi}$ on voit qu'il faut calculer l'intégrale :

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cos [\omega(t_1 + t_2) - 2\varphi] d\varphi$$

qui est nulle. Le second terme est donc nul, et il reste :

$$\overline{X_1 X_2} = \frac{1}{2} \overline{\Lambda^2 \cos \Omega(t_2 - t_1)}.$$

Introduisons la moyenne liée $\overline{\Lambda^2(\omega)}$ de Λ^2 pour $\Omega = \omega$ et la fonction de distribution $\psi(\omega)$ de la pulsation. Nous pouvons écrire :

$$\overline{X_1 X_2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \overline{\Lambda^2(\omega)} \cos \omega(t_2 - t_1) \psi(\omega) d\omega.$$

Pour $t_2 = t_1$, nous voyons que $\overline{X^2}$ a la valeur (constante bien entendu) :

$$\overline{X^2} = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} \overline{\Lambda^2(\omega)} \psi(\omega) d\omega.$$

Par suite, le coefficient de corrélation entre X_1 et X_2 est :

$$r(t_2 - t_1) = \frac{\int_0^{\infty} \overline{\Lambda^2(\omega)} \cos \omega(t_2 - t_1) \psi(\omega) d\omega}{\int_0^{\infty} \overline{\Lambda^2(\omega)} \psi(\omega) d\omega}.$$

Posons :

$$f(\omega) = \frac{\overline{\Lambda^2(\omega)} \psi(\omega)}{\int_0^{\infty} \overline{\Lambda^2(\omega)} \psi(\omega) d\omega}.$$

Nous pouvons mettre r sous forme d'une intégrale de Fourier :

$$r(t_2 - t_1) = \int_0^{\infty} f(\omega) \cos \omega(t_2 - t_1) d\omega,$$

résultat qui n'est pas l'apanage de l'oscillateur, mais de toute fonction aléatoire analytique stationnaire.

29. Calcul des variations. Le calcul des variations se transpose sans difficultés en Analyse aléatoire et conduit à des équations d'Euler aléatoires.

Démontrons d'abord le *lemme fondamental*.

Soit Y/t une fonction aléatoire arbitraire, à cela près qu'elle se réduise à la constante certaine *zéro* pour $t=t_1$ et $t=t_2$.

Soit Z/t une seconde fonction aléatoire.

Si $\int_{t_1}^{t_2} \overline{YZ} dt = 0$ quelle que soit la fonction Y, Z ne peut être que le nombre certain *zéro*.

Séparons en effet, dans Y et Z les valeurs probables \overline{Y} et \overline{Z} et les valeurs purement aléatoires Y', Z' .

Posons :

$$S^2(t) = \overline{Y'^2} \quad \sigma^2(t) = \overline{Z'^2} \quad r(t) = \frac{\overline{Y'Z'}}{\sigma S}$$

L'hypothèse devient :

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{Y Z} dt + \int_{t_1}^{t_2} \overline{Y' Z'} dt = 0.$$

Parmi les fonctions Y , choisissons celles dont la valeur probable est nulle. Leur écart type $S(t)$ reste cependant une fonction arbitraire (nulle pour t_1 et t_2) et leur coefficient de corrélation r avec Z est aussi arbitraire. Or l'on a :

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{Y' Z'} dt = \int_{t_1}^{t_2} (rS) \sigma dt = 0,$$

rS étant une fonction arbitraire de t , nulle pour t_1 et t_2 ; le lemme fondamental du Calcul des Variations classique montre que :

$$\sigma = 0.$$

D'où $Z' = 0$ et par suite $Z = \overline{Z}$.

Choissant maintenant une fonction aléatoire Y de valeur probable \overline{Y} non nulle (sauf pour t_1 et t_2), on doit avoir :

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{Y Z} dt = 0$$

d'où $\overline{Z} = 0$; donc $Z = 0$.

Le problème du Calcul des variations aléatoire, est la recherche des fonctions aléatoires X/t *dérivables* qui rendent extrême l'intégrale :

$$I = \int_{t_1}^{t_2} \overline{\varphi(X, \dot{X}, t)} dt$$

et qui se réduisent pour t_1 et t_2 à des constantes aléatoires données.

φ est une fonction certaine de ses arguments.

La variation de I s'obtient, comme en Analyse certaine, en remplaçant X par $X + \alpha Y$, Y étant une fonction aléatoire arbitraire nulle pour t_1 et t_2 .

On obtient :

$$\frac{\partial I}{\partial \alpha} = \int_{t_1}^{t_2} Y \left[\frac{\partial \varphi}{\partial X} - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{X}} \right)' \right] dt$$

et il résulte du lemme fondamental que la fonction aléatoire vérifie l'équation d'Euler aléatoire :

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial \dot{X}} \right)' - \frac{\partial \varphi}{\partial X} = 0.$$

Traitons l'exemple du point aléatoire libre.

Il faut déterminer les fonctions aléatoires X/t qui rendent extrême l'intégrale :

$$\int_{t_1}^{t_2} \overline{X^2} dt.$$

L'équation d'Euler $\ddot{X} = 0$ a pour solution formelle :

$$X = A + Bt$$

Les constantes aléatoires $X/t_1, X/t_2$ sont données par leur loi de probabilité conjuguée :

$$G(x_1, x_2).$$

On en déduit immédiatement, par un simple changement de variables, la loi conjuguée de A et de B :

$$R_0(a, b) = |t_2 - t_1| G(a + bt_1, a + bt_2).$$

Ainsi, si G est le produit de deux lois de Gauss (indépendance de X/t_1 et de X/t_2) :

$$G(x_1, x_2) = \frac{1}{2\pi S_1 S_2} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x_1^2}{S_1^2} + \frac{x_2^2}{S_2^2} \right)}$$

on trouve :

$$R_0(a, b) = \frac{|t_2 - t_1|}{2\pi S_1 S_2} e^{-\frac{1}{2} \left[\frac{(a + bt_1)^2}{S_1^2} + \frac{(a + bt_2)^2}{S_2^2} \right]}.$$

La fonction de distribution conjuguée de X et de \dot{X} à l'instant t , est :

$$R(x, u, t) = \frac{|t_2 - t_1|}{2\pi S_1 S_2} e^{-\frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{x-u(t-t_1)}{S_1} \right]^2 + \left[\frac{x-u(t-t_2)}{S_2} \right]^2 \right\}}$$

et celle de X seul :

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{|t_2 - t_1|}{\sqrt{S_2^2(t-t_1)^2 + S_1^2(t-t_2)^2}} e^{-\frac{x^2}{2} \frac{(t_1 - t_2)^2}{S_2^2(t-t_1)^2 + S_1^2(t-t_2)^2}}$$

L'écart type de X est :

$$\frac{\sqrt{S_2^2(t-t_1)^2 + S_1^2(t-t_2)^2}}{|t_2 - t_1|}$$

V - FONCTIONS ALÉATOIRES STATIONNAIRES

30. Diverses Sortes de Stationnarité. La stationnarité d'une fonction aléatoire peut s'entendre de plusieurs manières :

(a) *Stationnarité en probabilité*, lorsque la fonction de distribution conjuguée de X/t et de \dot{X}/t ne dépend pas de t .

En particulier, il en est de même de la loi de probabilité de X .

Tous les moments conjugués de X et de \dot{X} sont constants ; certains sont nuls :

$$\overline{X^k \dot{X}} = \frac{1}{k+1} \frac{d}{dt} \overline{X^{k+1}} = 0.$$

Cette notion de stationnarité est très importante au point de vue physique. Ainsi elle rend très bien compte du paradoxe de l'atome de Bohr dans lequel les électrons ne rayonnent pas d'énergie dans leur mouvement sur leur orbite. C'est que cette énergie rayonnée est une grandeur macroscopique dépendant des *moments* de X et de \dot{X} et ceux-ci sont constants lorsque le mouvement est stationnaire en probabilité.

(b) *Stationnarité simple*, lorsque le moment rectangle $\overline{X/t_1 X/t_2}$ est fonction de la seule variable $(t_2 - t_1)$.

En ce cas, l'écart type $S^2(t) = \overline{X^2}/t$ est constant et le coefficient de corrélation n'est aussi fonction que de $(t_2 - t_1)$.

(c) *Stationnarité complète*¹ — beaucoup plus restrictive que les précédents et qui les englobe —, lorsque le moment linéaire :

¹ Nous devons cette notion à M. J. Moyal

$$\Gamma_n = \overline{X/t_1 X/t_2 \dots X/t_n}$$

ne dépend que des différences $(t_i - t_j)$, et cela quelque soit n . En ce qui concerne l'oscillateur, nous avons vu que s'il est stationnaire en probabilité, il est aussi simplement stationnaire et même complètement stationnaire. Mais bien entendu, ce fait ne saurait être qu'accidentel.

Par contre, il est aisé de démontrer le théorème suivant qui est presque évident :

Si une fonction aléatoire X , indéfiniment dérivable, est complètement stationnaire, tous les moments conjugués de X et de ses dérivées successives sont constants, et réciproquement.

31. Le Spectre d'une Fonction Aléatoire Stationnaire. Nous allons indiquer maintenant une propriété tout à fait fondamentale des fonctions aléatoires (simplement) stationnaires.

On supposera, ce qui est une restriction sans importance que :

$$\overline{X} = 0 \quad \text{et} \quad \overline{X^2} = 1.$$

Nous avons vu que le coefficient de corrélation $r(\tau)$ d'une fonction aléatoire stationnaire indéfiniment dérivable, se développe ainsi :

$$r(\tau) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\tau^{2p}}{(2p)!} S_p^2.$$

S_p étant l'écart type de la $p^{\text{ème}}$ dérivée ($S_0 = 1$).

Or, les S_p^2 peuvent être considérés comme les moments pairs d'une loi de probabilité, définie par une certaine fonction des probabilités totales $\psi(\omega)$:

$$S_p^2 = \int_0^{\infty} \omega^{2p} d\psi(\omega) = \overline{\omega^{2p}}.$$

Les inégalités vérifiées par les S_p sont bien en effet celles que vérifient les moments successifs d'une variable aléatoire.

Ainsi :

$$S_1^2 \leq S_2 S_0, \quad \text{soit} \quad S_1^2 \leq S_2$$

correspond à :

$$\overline{\omega^2}^2 < \overline{\omega^4}.$$

Multipliant cette inégalité par la suivante qui est :

$$S_2^2 \leq S_3 S_1$$

on obtient :

$$S_1 S_2 \leq S_3$$

d'où

$$S_1^3 < S_1 S_2 < S_3$$

qui correspond à

$$\overline{\omega_2^3} < \overline{\omega^3}$$

et ainsi de suite.

$r(\tau)$ peut donc s'écrire :

$$r(\tau) = \sum_{p=0}^{\infty} (-1)^p \frac{\tau^{2p}}{(2p)!} \overline{\omega^{2p}} = \sum (-1)^p \frac{(\omega\tau)^{2p}}{(2p)!} = \overline{\cos \omega\tau}$$

soit, sous forme d'une *intégrale de Fourier* :

$$r(\tau) = \int_0^{\infty} \cos \omega\tau d\psi(\omega).$$

En somme cela revient à dire que $r(\tau)$ a les propriétés d'une *fonction caractéristique*.

Inversement, la fonction $\Psi(\omega)$ peut être déduite de $r(\tau)$ par une *inversion de Fourier*.

La propriété dont nous venons de parler a été établie d'autre part, par Khintchine, dans des conditions très générales.

Pour trouver son interprétation physique, adressons nous à l'oscillateur aléatoire stationnaire (à fréquence aléatoire) dont nous avons fait l'étude, à titre d'exemple de l'intégration d'une équation différentielle aléatoire.

Le coefficient de corrélation entre X_1 et X_2 est bien, en effet, de la forme voulue :

$$\frac{\overline{A^2 \cos \Omega t}}{A^2}$$

Nous choisirons de préférence le coefficient de corrélation entre \dot{X}_1 et \dot{X}_2 qui se déduit du précédent en remplaçant A par $(-\Omega A)$. L'énergie de l'oscillateur étant égale à $\Omega^2 A^2$, ce coefficient de corrélation s'écrit :

$$r(\tau) = \frac{\overline{E \cos \Omega t}}{E}$$

Désignons par $\overline{E(\omega)}$ la moyenne liée de l'énergie pour la valeur déterminée ω de Ω , et par $\mathcal{F}(\omega)$ la fonction des probabilités totales de Ω .

$\mathcal{F}(\omega)$ détermine la répartition des fréquences dans le spectre; on peut donc l'appeler *fonction spectrale*.

Quand à $\overline{E(\omega)}$ c'est l'énergie moyenne que possède a priori—en vertu

du «mécanisme» de l'oscillateur — un oscillateur de pulsation ω . Par exemple, pour un oscillateur de Planck, on aurait :

$$\overline{E}(\omega) = \frac{h\omega}{2\pi}.$$

La moyenne générale de l'énergie (qui dépend de la répartition, c'est à dire du nombre d'oscillateurs ayant une fréquence donnée) est :

$$\overline{E} = \int_0^{\infty} \overline{E}(\omega) d\mathfrak{F}(\omega).$$

Le coefficient de corrélation de \dot{X} s'écrit :

$$r(\tau) = \int_0^{\infty} (\cos \omega\tau) \frac{\overline{E}(\omega)}{\overline{E}} d\mathfrak{F}(\omega).$$

d'où la signification de la fonction Ψ :

$$d\Psi(\omega) = \frac{\overline{E}(\omega)}{\overline{E}} d\mathfrak{F}(\omega).$$

La fonction Ψ n'est identique à la fonction spectrale que si l'énergie est indépendante de la fréquence :

$$\overline{E}(\omega) = c^{te} = \overline{E}$$

Physiquement, on peut se faire la représentation suivante.

Dans une enceinte se trouve un «gaz d'oscillateurs» c'est à dire un très grand nombre d'oscillateurs possédant toutes les fréquences, toutes les énergies et toutes les phases possibles. Ce gaz peut être représenté par un *oscillateur aléatoire unique*, pour lequel Ω, E, Φ seront considérées comme des *constantes aléatoires*. On suppose qu'en vertu de la nature physique de ces oscillateurs, l'énergie moyenne des oscillateurs de pulsation ω est, en toutes circonstances, une fonction connue $\overline{E}(\omega)$ de ω ; par exemple il pourra se faire qu'*individuellement* chaque oscillateur satisfasse à la relation de Planck :

$$E = \frac{h\omega}{2\pi}.$$

Pour qu'un *équilibre statistique* s'établisse, c'est à dire un état dans lequel les moyennes des diverses grandeurs physiques prises sur l'ensemble des oscillateurs élémentaires (et qui sont des moments de X

et de \dot{X}) demeurent permanentes, il faut que l'oscillateur aléatoire équivalent soit stationnaire.

Cela est réalisé quand Φ est une variable aléatoire de distribution uniforme, indépendante en probabilité de Ω et de E . Alors, le coefficient de corrélation $r(\tau)$ qui exprime la connexion entre les états successifs du gaz d'oscillateurs, détermine (par une inversion de Fourier) la fonction $\Psi(\omega)$.

On en déduit ensuite la fonction spectrale $\mathcal{F}(\omega)$ par la relation :

$$d\Psi(\omega) = \frac{\overline{E}(\omega)}{\overline{E}} d\mathcal{F}(\omega).$$

En résumé, le théorème de Khintchine confère à une fonction aléatoire stationnaire la propriété d'avoir un spectre de fréquences, ce qui laisse espérer qu'une telle représentation convienne particulièrement bien à la Physique atomique.

32. Spectre Continu et Spectre de Raies. Rappelons les propriétés des fonctions de probabilité totale.

$\mathcal{F}(\omega)$ est la probabilité pour que $0 < \Omega < \omega$.

La probabilité pour que :

$$\omega < \Omega < \omega + d\omega$$

est de l'ordre de $d\omega$, sauf pour un certain nombre de valeurs ω_k de ω formant une suite dénombrable.

On peut décomposer $\mathcal{F}(\omega)$ en la somme de deux fonctions \mathcal{F}_1 et \mathcal{F}_2 .

a) $\mathcal{F}_1(\omega)$ est une fonction continue (que nous supposons même dérivable), non négative et non décroissante. Soit $\lambda(\omega)$ sa dérivée.

b) $\mathcal{F}_2(\omega)$ est une fonction discontinue, non négative et non décroissante. Elle reste constante dans l'intervalle :

$$\omega_k < \omega < \omega_{k+1}$$

et, lorsque ω traverse la valeur ω_k , elle subit la discontinuité :

$$\mathcal{F}_2(\omega_k + 0) - \mathcal{F}_2(\omega_k - 0) = \alpha_k.$$

C'est une fonction « en escalier ».

D'après le théorème des probabilités totales :

$$\int_0^{\infty} d\mathcal{F}(\omega) = 1$$

done :

$$\int_0^{\infty} \lambda(\omega) d\omega + \sum_k \alpha_k = 1.$$

La série à termes positifs $\sum_k a_k$ est *convergente*, sa somme ne pouvant excéder l'unité.

La fonction $\overline{\mathcal{F}}_1(\omega)$ représente la partie *continue* du spectre et les fréquences ω_k repèrent les *raies spectrales*.

La fonction $\Psi(\omega)$ — inverse de Fourier du coefficient de corrélation-est donnée par :

$$d\Psi(\omega) = \lambda(\omega) \frac{\overline{E}(\omega)}{\overline{E}} d\omega + \frac{\overline{E}(\omega)}{\overline{E}} d\overline{\mathcal{F}}_2(\omega).$$

Et le coefficient de corrélation lui même, par :

$$r(\tau) = \int_0^\infty (\cos \omega\tau) \frac{\overline{E}(\omega)}{\overline{E}} \lambda(\omega) d\omega + \sum_k b_k \cos \omega_k \tau$$

avec :

$$b_k = \frac{\overline{E}(\omega_k)}{\overline{E}} a_k.$$

Le coefficient de corrélation admet donc comme discontinuités toutes les discontinuités de la fonction spectrale $\overline{\mathcal{F}}(\omega)$. On peut dire qu'il reproduit *qualitativement* le spectre.

33. Périodicité et Stationnarité. L'exemple de l'oscillateur aléatoire (à fréquence aléatoire) semble montrer qu'il existe une certaine relation entre le caractère de stationnarité d'une fonction aléatoire et le caractère de *périodicité* de la fonction obtenue au cours d'une *épreuve* sur la fonction aléatoire.

Mais la relation que suggère l'oscillateur est évidemment *trop particulière*. Elle est contraire à l'idée que nous nous sommes faite de la «réalisation» d'une fonction aléatoire — qui doit être assez discontinue pour qu'une épreuve permette d'estimer les moments statistiques — d'admettre que l'évolution de chaque individu puisse se représenter par une sinusoïde (ou même une fonction périodique).

Slutsky a montré que, sous des conditions assez générales : «toute fonction aléatoire stationnaire est une série de Fourier aléatoire presque périodique». Cette représentation déjà plus satisfaisante que l'oscillateur, n'est pourtant pas encore, à notre avis, la plus générale.

(A suivre)

Note d'un des auteurs

Ce Mémoire est le résumé, que nous nous sommes efforcés de rendre aussi compréhensible que possible, d'un ouvrage de volume plus important, auquel nous avons travaillé avec des interruptions et des fortunes diverses depuis 1936.

Il voit le jour grâce à l'accueil bienveillant du Laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences de Lisbonne et à la large hospitalité que lui a donnée la Revue *Portugaliae Physica*.

Je remercie, au nom de mon co-auteur Ph. Wehrlé et au mien propre :

Mr. le Professeur Cyrillo Soares, Directeur du Laboratoire ;

Mr. le Docteur Marques da Silva ;

Mr. le Docteur Valadares.

Particulièrement, c'est à Mr. Valadares que l'on devra que le Mémoire ait été publié presque sans fautes typographiques, grâce à la discrète patience avec laquelle il a suivi les corrections.

LISBONNE, 5 FÉVRIER 1945.

G. DEDEBANT

