

LE PROBLÈME COSMOLOGIQUE GÉNÉRALISÉ ET LA MÉCANIQUE
ONDULATOIRE RELATIVISTE

par ANTONIO GIÃO

(Reçu le 15 Mars 1945)

I — PRÉLIMINAIRES

Ce mémoire a pour but d'introduire dans la physique un *principe cosmologique* qui permet de faire la synthèse de la Relativité générale et de la Mécanique ondulatoire, suivant une voie nouvelle.

Pour comprendre ce principe, d'après lequel *il y a identité entre existence physique et existence mathématique non-arbitraire*, il faut expliquer tout d'abord ce que nous entendons par *être mathématique non-arbitraire*.

1. Les êtres mathématiques complets. L'existence mathématique n'est conditionnée que par l'absence de contradiction. La non-contradiction, qui assure la compatibilité des différentes opérations par lesquelles on peut obtenir (exprimer) un être mathématique, *pose dans l'existence mathématique* non seulement les êtres déjà construits ou définis effectivement et les êtres simplement « nommés » (au sens de Lebesgue), mais aussi une infinité d'autres êtres non encore envisagés par la science et qui ne le seront jamais. On voit par là quelle est la richesse du « monde » mathématique, dans lequel tout ce qui jouit d'une seule propriété (la non-contradiction) se pose automatiquement dans l'existence (tout *possible* existe).

Considérons un exemple d'être mathématique : une fonction $f(x)$ de la variable réelle x dans l'intervalle fermé $a \leq x \leq b$. Le champ de variation continue de x peut être appelé un *cadre* ou un *contenant*, apte à recevoir une quantité transfinie (transfini dont la puissance est ici supérieure à celle du continu) de fonctions, c'est-à-dire de *contenus*.

Ce cadre ou contenant est un ensemble de nombres réels dont les éléments ont entre eux des relations de simple juxtaposition, mais qui obéit cependant à un plan ou à un ordre. Si le contenant est un espace

non-euclidien, il possède, en plus de cet ordre interne, une *structure* (qui se révèle immédiatement en plongeant l'espace en question dans un espace non-euclidien). Ceci sans parler de la *forme* de la surface frontière du domaine spatial d'existence d'une fonction ou contenu. Après ces remarques, nous dirons qu'un être mathématique est *complet* lorsqu'on peut y distinguer un contenant et un ou plusieurs contenus. En d'autres termes : *lorsqu'il est formé par une fonction ou par un ensemble de fonctions ayant toutes le même domaine d'existence.*

2. Les êtres mathématiques arbitraires. Si nous considérons à nouveau une fonction quelconque $f(x)$ de la variable réelle x dans l'intervalle $a \leq x \leq b$, on voit immédiatement que cet être mathématique complet est *arbitraire*, en accordant à cette expression la signification suivante : — D'une part, le domaine de définition de $f(x)$, c'est-à-dire le contenant, est apte à recevoir une infinité d'autres fonctions, de sorte que le contenu [ensemble des valeurs de $f(x)$] existe arbitrairement dans le contenant, sans qu'il y ait une raison quelconque pour que ce contenant «contienne» un certain $f(x)$ plutôt qu'un autre. D'autre part, la connaissance de $f(x)$ ne détermine pas le contenant (sa forme et sa structure), car si x désigne par exemple un paramètre de position entre les points a et b sur une ligne d'un espace à un nombre quelconque de dimensions, la connaissance de $f(x)$ ne donne *aucun* renseignement sur la forme (ni sur les autres propriétés) de cette ligne. Il y a une infinité de contenants géométriques pour une même fonction abstraite $f(x)$.

On voit que les êtres mathématiques arbitraires, tout en étant non contradictoires, n'ont en eux mêmes aucun principe de «self-explication», aucun propriété de «self-crédation». Leur existence leur est en quelque sorte conférée du «dehors» par la «force» du non-contradictoire, qui fait que tout non contradictoire se pose dans l'existence mathématique.

Ici, une analogie sera utile à la compréhension claire de ce qui va suivre. Donnons-nous un vase ou récipient ayant une certaine capacité et une certaine forme, susceptible d'être rempli de toutes sortes de liquides. Le fait de connaître la nature du liquide (ou contenu) qui se trouve à un moment donné dans le vase, ne suffit pas pour déterminer la forme et la capacité du vase. Inversement, étant données seulement cette forme et cette capacité, on ne peut rien dire sur le liquide qui peut se trouver dans le vase à un certain moment. En d'autres termes : entre le contenant ou récipient et le contenu il n'y a aucune relation intrinsèque. L'«être» formé par l'ensemble vase + liquide est donc un être arbitraire.

3. Les êtres mathématiques non-arbitraires. Poursuivons notre analogie en imaginant un vase idéal doué des deux propriétés tout-à-fait spéciales suivantes : 1.^o) il suffit de connaître la nature et la structure du liquide pour déterminer la forme et la capacité *du seul* vase qui peut le contenir ; 2.^o) inversement, il suffit de connaître la forme et la capacité du vase pour déterminer la nature et la structure *du seul* liquide qu'il peut contenir. Il existe alors entre vase et liquide, entre contenant et contenu, une dépendance intrinsèque absolue et nous dirons que l'ensemble vase+liquide est, dans ces conditions, un être non-arbitraire.

Il est facile de passer de cette « analogie » à la *définition d'être mathématique non-arbitraire*. Nous dirons qu'un être mathématique est non-arbitraire lorsqu'il est complet et satisfait aux conditions suivantes : 1.^o) les propriétés intrinsèques de la structure et de la forme du contenant sont entièrement déterminées quand on connaît les fonctions-contenus ; 2.^o) inversement, les fonctions-contenus sont entièrement déterminées quand on connaît les propriétés intrinsèques de la structure et de la forme du contenant ; 3.^o) les deux premières conditions déterminent complètement l'ensemble contenant+contenus.

Faisons ici la remarque évidente que cette définition d'être mathématique non-arbitraire ne peut entrer en jeu que si le contenant est un espace continu, puisque c'est seulement un espace continu qui possède une forme et une structure intrinsèque.

4. L'existence physique. Si l'on croit que le cosmos est d'essence mathématique, c'est-à-dire que l'Univers physique est un être ou un ensemble d'êtres mathématiques, une question fondamentale se pose inévitablement, à savoir : — Quelle est la propriété qui distingue l'être ou l'ensemble d'êtres mathématiques qui forment (et qui sont) l'Univers physique de tous les autres êtres mathématiques ? En d'autres termes : — Quelle est la propriété qui confère l'existence physique à l'être ou à l'ensemble d'êtres mathématiques qui forment l'Univers ? Nous répondrons à cette question par le principe de base suivant :

L'existence physique est identique à l'existence mathématique non-arbitraire.

En d'autres termes :

Tout être mathématique non-arbitraire possède l'existence physique.

En partant d'un ensemble d'espaces très général (ensemble des espaces continus pouvant être « plongés » dans des espaces à une dimension de plus et pour lesquels le carré de la distance de deux points infiniment voisins est une forme quadratique des différentielles des coordonnées), nous montrerons plus loin qu'il n'y a, dans cet ensemble, qu'un seul

être mathématique non-arbitraire. Grâce au principe fondamental, on peut donc dire que *dans l'ensemble défini ci-dessus un seul être mathématique possède l'existence physique.* Nous verrons d'ailleurs qu'il est très probable qu'il n'y ait qu'un seul être mathématique non-arbitraire dans l'ensemble de tous les espaces continus. Si tel est réellement le cas, alors on arrive immédiatement à la conclusion suivante :

L'Univers physique est le seul être mathématique non-arbitraire qui existe dans le «monde» mathématique.

Nous avons dit plus haut que les êtres mathématiques arbitraires n'ont en eux mêmes aucun principe de self-explication, aucun propriété de «self-création». Par contre, l'Univers physique (qu'on peut définir comme étant l'ensemble des êtres mathématiques non-arbitraires, un tel ensemble n'ayant très probablement *qu'un seul* élément) contient en lui même une telle propriété (le caractère non-arbitraire), nécessaire pour le poser dans l'existence d'une manière absolument autonome et le faire subsister en tant qu'existence physique indépendamment de toute «cause» extérieure. L'existence physique n'est que l'existence mathématique marquée par le «sceau» intrinsèque du non-arbitraire.

5. La Physique Cosmologique. Nous donnons ce nom à la théorie mathématique qui peut être construite, par voie purement déductive, avec la définition d'être mathématique non-arbitraire et le principe de l'identité de l'existence physique et de l'existence mathématique non-arbitraire. Le but idéal de cette théorie peut être résumé comme suit :

Sans faire appel à des hypothèses, postulats ou axiomes de nature physique (ou métaphysique) en dehors de la définition d'être mathématique non-arbitraire et du principe de l'identité de l'existence physique et de l'existence mathématique non-arbitraire, et sans utiliser aucune loi de nature expérimentale ou suggérée par l'expérience, déterminer, par voie purement mathématique : 1.^o) la structure métrique, la forme et le nombre de dimensions du contenant de l'Univers (l'espace-temps), 2.^o) les valeurs des propriétés de l'Univers (c'est-à-dire les valeurs de tous les contenus) en chaque point du contenant.

Les pages qui suivent exposent une première tentative pour réaliser une partie de ce programme. Nous y verrons que le problème cosmologique de la Relativité générale se pose constamment en Physique cosmologique, sous une forme généralisée. Cela se comprend facilement si l'on pense que la Relativité générale, par ses équations du champ de gravitation, établit en somme des relations entre une propriété intrinsèque de la structure métrique du contenant de l'Univers (de l'espace-temps) et une propriété (densité d'énergie-quantité de mouvement) du contenu.

II — ANALYSE DE L'ÊTRE MATHÉMATIQUE NON-ARBITRAIRE

1. Définitions. Soit ε_{N+1} l'ensemble des espaces continus (ε_{N+1}) à un nombre quelconque ($N+1$) de dimensions, pour lesquels le carré de la distance de deux points infiniment voisins est donné par la forme quadratique :

$$(1) \quad d\Sigma^2 = \Gamma_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, N+1),$$

des différentielles des coordonnées X^μ , les $\Gamma_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\mu}$ étant des fonctions finies quelconques des X^μ possédant des dérivées premières et secondes. (Lorsqu'un ε_{N+1} est euclidien ou pseudo-euclidien, nous le désignerons par E_{N+1} et alors on conviendra que les X^μ sont des coordonnées cartésiennes rectangulaires, c'est-à-dire $\Gamma_{\mu\nu} = \pm 1$ pour $\mu = \nu$ et $\Gamma_{\mu\nu} = 0$ pour $\mu \neq \nu$). Soit ε_N l'ensemble des espaces (e_N), à un nombre quelconque (N) de dimensions, qui peuvent être considérés comme des sous-espaces d'espaces ε_{N+1} à $N+1$ dimensions de l'ensemble ε_{N+1} . Une variation virtuelle des paramètres qui figurent dans toute expression analytique de l'équation $F(X^1, X^2, \dots, X^{N+1}) = 0$ d'un espace e_N , plongé dans un espace ε_{N+1} , peut être considérée comme une déformation ou un mouvement de e_N dans ε_{N+1} . Désignons alors par x^1, x^2, \dots, x^N des coordonnées générales *intrinsèques* dans un e_N , c'est-à-dire des coordonnées telles que leurs valeurs en un point quelconque de e_N sont *invariantes* vis-à-vis de toute déformation et de tout mouvement de e_N dans ε_{N+1} . La *forme métrique interne* d'un e_N quelconque s'écrit :

$$(2) \quad ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (i, k = 1, 2, \dots, N)$$

les $g_{ik} = g_{ki}$ (coefficients métriques internes) étant, comme les $\Gamma_{\mu\nu}$, des fonctions finies quelconques des x^i possédant des dérivées premières et secondes. La forme (2) est invariante et g_{ik} est un tenseur covariant symétrique du second ordre qui satisfait aux conditions de conservation (divergence nulle) :

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} g^{ik}) + g^{jk} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = 0,$$

g étant le déterminant des g_{ik} et $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$ le symbole de Christoffel de seconde espèce formé avec les g_{ik} .

Considérons un espace e_N de ε_N plongé dans un espace ε_{N+1} de ε_{N+1} . Nous appelons *forme* de e_N par rapport à ε_{N+1} : 1° — l'équation $F(X^1, \dots, X^{N+1}) = 0$, de la variété e_N dans ε_{N+1} , déterminée aux coor-

données et à l'orientation près d'un de ses éléments; 2° — l'équation $\sigma(x^1, \dots, x^N) = 0$ de la variété $(N-1)$ -dimensionnelle, frontière de e_N . (Rappelons ici qu'un e_N est dit de *classe 1* s'il peut être considéré comme un sous-espace d'un espace euclidien ou pseudo-euclidien à $N+1$ dimensions).

À côté de la forme métrique fondamentale (2), nous envisagerons aussi la *forme métrique externe* de l'espace e_N (supposé plongé dans un ϵ_{N+1}). Cette forme quadratique peut être déduite comme suit. Désignons par $X_{;ik}^\mu$ la « dérivée tensorielle » (« dérivée covariante générale ») seconde des X^μ par rapport aux x^i . Comme les X^μ sont des invariants vis-à-vis de tout changement des x^i , on a ici simplement :

$$(4) \quad X_{;ik}^\mu = \frac{\partial^2 X^\mu}{\partial x^i \partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} j \\ ik \end{matrix} \right\} \frac{\partial X^\mu}{\partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^k}.$$

(Les symboles de Christoffel avec indices grecs et latins se rapportent respectivement à la forme (1) et à la forme (2)). On sait que les $X_{;ik}^\mu$ sont les composantes contravariantes d'un vecteur $\vec{X}_{;ik}$ de ϵ_{N+1} normal à e_N . Si n^μ représente les composantes de la normale unitaire \vec{n} à e_N (dans ϵ_{N+1}), on a donc :

$$(5) \quad X_{;ik}^\mu = \omega_{ik} n^\mu,$$

$$(6) \quad \omega_{ik} = X_{;ik}^\mu n_\mu = X_{;ik}^\mu \Gamma_{\mu\nu} n^\nu = \vec{X}_{;ik} \cdot \vec{n}.$$

La forme métrique externe de e_N par rapport à ϵ_{N+1} est alors définie par :

$$(7) \quad d\Omega^2 = \omega_{ik} dx^i dx^k.$$

La relation (5) montre que les ω_{ik} sont les composantes d'un tenseur covariant symétrique du second ordre ($d\Omega^2$ est donc un invariant comme ds^2) et nous supposerons qu'ils sont des fonctions quelconques des x^i possédant des dérivées premières et secondes. Ce tenseur ω_{ik} satisfait d'ailleurs, comme les g_{ik} , à des relations de « conservation », qui s'écrivent maintenant :

$$(8) \quad \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{\omega} \omega^{ik}) + \omega^{jk} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_\Omega = 0,$$

l'indice Ω rappelant que le symbole de Christoffel doit être formé ici

avec les ω_{ik} de (7), et : $\omega = |\omega_{ik}|$, $\omega^{ik} = \frac{1}{\omega} \times$ mineur de ω relatif à ω_{ik} .

En remarquant que l'on a :

$$d\vec{X} \cdot \vec{n} = 0,$$

$d\vec{X}$ étant un vecteur infinitésimal reliant deux points infiniment voisins de e_N , les relations (4) et (6) donnent encore :

$$(9) \quad \omega_{ik} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial x^i \partial x^k} \cdot \vec{n} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^k} n_\mu,$$

\vec{X} étant le vecteur (de ϵ_{N+1}) de composantes X^μ en un point de ϵ_{N+1} situé sur e_N . La forme métrique externe de e_N dans ϵ_{N+1} s'écrit donc aussi :

$$(10) \quad d\Omega^2 = \vec{n} \cdot d^2 \vec{X} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^k} n_\mu dx^i dx^k,$$

ou bien, par suite de la relation : $\vec{n} \cdot d^2 \vec{X} = -d\vec{n} \cdot d\vec{X}$:

$$(11) \quad \vec{n} \cdot d^2 \vec{X} = -d\vec{n} \cdot d\vec{X} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^k} n_\mu dx^i dx^k.$$

Si l'espace ϵ_{N+1} est un espace euclidien ou pseudo-euclidien, la forme métrique externe se réduit donc à :

$$(12) \quad d\Omega^2 = \omega_{ik} dx^i dx^k = -d\vec{n} \cdot d\vec{X} = \vec{n} \cdot d^2 \vec{X}.$$

Quand on se donne les coordonnées $X_0^1, X_0^2, \dots, X_0^{N+1}$ d'un point arbitraire $P_0(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^N)$ de e_N (supposé plongé dans un ϵ_{N+1}), la normale unitaire d'un élément de e_N dont P_0 est le centre, ainsi que la métrique de ϵ_{N+1} (c'est-à-dire les $\Gamma_{\mu\nu}$ de la forme (1)), alors la connaissance des g_{ik} et des ω_{ik} , en chaque point de e_N , détermine cet espace (par rapport à ϵ_{N+1}), lorsque les g_{ik} et les ω_{ik} satisfont aux conditions de compatibilité de Gauss et de Codazzi.

Considérons maintenant une forme quadratique :

$$(13) \quad dQ^2 = \chi_{ik} dx^i dx^k,$$

dont les coefficients χ_{ik} sont des fonctions des g_{ik} et de leurs dérivées premières et secondes, ne faisant intervenir d'ailleurs ces dernières que linéairement. Nous dirons alors que les χ_{ik} représentent une *propriété intrinsèque de la métrique* d'un espace e_N , lorsqu'ils satisfont aux mêmes conditions que les g_{ik} , c'est-à-dire lorsqu'ils sont les composantes d'un tenseur covariant symétrique du second ordre (ce qui est équi-

valent à l'invariance du dQ^2 vis-à-vis d'un changement de coordonnées) qui satisfait aux relations de conservation :

$$(14) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \chi^{ik}) + \chi^{jk} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_s = 0,$$

l'indice s rappelant que le symbole de Christoffel doit être formé avec les g_{ik} , et $\chi^{ik} = g^{ij} g^{kl} \chi_{jl}$.

De même, soit :

$$(15) \quad dP^2 = \Pi_{ik} dx^i dx^k,$$

une forme quadratique dont les coefficients Π_{ik} sont des fonctions des ω_{ik} , de leurs dérivées premières et secondes, ne faisant intervenir d'ailleurs ces dernières que linéairement. Nous dirons alors que les Π_{ik} représentent une *propriété intrinsèque de la forme* d'un espace e_N (plongé dans un e_{N+1}), lorsqu'ils sont les composantes d'un tenseur covariant symétrique du second ordre (ce qui est équivalent à l'invariance du dP^2) qui satisfait aux relations de conservation :

$$(16) \quad \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{\omega} \Pi^{ik}) + \Pi^{jk} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_\Omega = 0,$$

l'indice Ω rappelant que le symbole de Christoffel doit être formé avec les ω_{ik} de la forme (7), et $\Pi^{ik} = \omega^{ij} \omega^{kl} \Pi_{jl}$.

Un théorème bien connu du calcul tensoriel nous permet d'affirmer que l'expression analytique générale des propriétés intrinsèques de la métrique d'un espace e_N est nécessairement la suivante :

$$(17) \quad \frac{1}{\lambda_g} \left[R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} (R + \lambda_g) \right],$$

λ_g et λ_g étant deux constantes (provisoirement arbitraires), R_{ik} le tenseur de Ricci-Einstein, et R l'invariant de courbure défini par : $R = g^{ik} R_{ik}$. Le même théorème nous permet d'affirmer que l'expression analytique générale des propriétés intrinsèques de la forme d'un espace e_N (supposé plongé dans un e_{N+1}) est nécessairement la suivante :

$$(18) \quad \frac{1}{\lambda_\omega} \left[S_{ik} - \frac{1}{2} \omega_{ik} (S + \lambda_\omega) \right],$$

λ_ω et λ_ω étant deux autres constantes (provisoirement arbitraires), S_{ik} le tenseur de Ricci-Einstein qui correspond à la forme quadratique (7) et S un invariant défini par $S = \omega^{ik} S_{ik}$.

Ceci étant dit, définissons finalement ce que nous entendons par *être mathématique non-arbitraire* : c'est un ensemble de fonctions, ayant toutes le même domaine d'existence, appartenant à ε_N , et telles que : 1.^o — les propriétés intrinsèques de la métrique et de la forme du domaine d'existence (ou *contenant*) des fonctions (ou contenus) sont entièrement déterminées quand on se donne ces fonctions ; 2.^o — inversement, les fonctions-contenus sont entièrement déterminées quand on se donne les propriétés intrinsèques de la métrique et de la forme du contenant ; 3.^o — les deux premières conditions déterminent complètement l'ensemble contenant + contenus.

2. Equations de l'être mathématique non-arbitraire. Considérons un être mathématique non-arbitraire à N dimensions. Il est très facile d'écrire les équations qui traduisent la propriété de « non-arbitraire » que nous venons de définir. En effet, comme (17) est l'expression analytique générale des propriétés intrinsèques de la métrique du contenant, il faut nécessairement l'égaliser, d'après la définition d'être mathématique non-arbitraire, à une fonction contenu tensorielle bien définie, que nous désignerons par T_{ik} . De même, comme (18) est l'expression analytique générale des propriétés intrinsèques de la forme du contenant, il faut aussi l'égaliser à une fonction-contenu tensorielle bien définie, que nous désignerons par U_{ik} . On a donc le système d'équations suivant :

$$(19) \quad \begin{cases} (a) & \left\{ R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} (R + \lambda_g) = z_g T_{ik}, \right. \\ (b) & \left. S_{ik} - \frac{1}{2} \omega_{ik} (S + \lambda_\omega) = z_\omega U_{ik}. \right. \end{cases}$$

Par suite de la symétrie des R_{ik} , g_{ik} , S_{ik} et ω_{ik} ce système se compose de $N(N+1)$ équations. En multipliant (19 a) par g^{ik} , (19 b) par ω^{ik} et en introduisant les invariants $T = g^{ik} T_{ik}$ et $U = \omega^{ik} U_{ik}$, le système (19) prend la forme équivalente :

$$(20) \quad \begin{cases} (a) & \left\{ R_{ik} + \frac{\lambda_g}{N-2} g_{ik} = z_g \left(T_{ik} - \frac{T}{N-2} g_{ik} \right), \right. \\ (b) & \left. S_{ik} + \frac{\lambda_\omega}{N-2} \omega_{ik} = z_\omega \left(U_{ik} - \frac{U}{N-2} \omega_{ik} \right), \right. \end{cases}$$

et l'on a :

$$(21) \quad \begin{cases} \left(\frac{N}{2} - 1 \right) R + \frac{N}{2} \lambda_g = -z_g T, \\ \left(\frac{N}{2} - 1 \right) S + \frac{N}{2} \lambda_\omega = -z_\omega U. \end{cases}$$

Au système (19) il faut nécessairement ajouter les équations de Gauss et de Codazzi, car les g_{ik} et les ω_{ik} que l'on déduit de (19) ne sont compatibles que si les conditions de Gauss et de Codazzi sont satisfaites. Pour un espace e_N plongé dans un e_{N+1} les équations de Gauss ont la forme :

$$(23) \quad R_{ijk} = (\omega_{ij} \omega_{ik} - \omega_{ik} \omega_{ij}) + \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^k} \frac{\partial X^\delta}{\partial x^k},$$

dans lesquelles R_{ijk} sont les composantes du tenseur covariant de courbure de l'espace e_N (contenant) et $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$ les composantes, prises en un point de e_N , du tenseur covariant de courbure de l'espace e_{N+1} . En désignant par $\omega_{ik,j}$ la dérivée covariante de ω_{ik} par rapport à x^j , les équations de Codazzi s'écrivent comme suit :

$$(24) \quad \omega_{ij,k} - \omega_{ik,j} + \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} n^\alpha \frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^j} \frac{\partial X^\delta}{\partial x^k} = 0,$$

n^α étant les composantes de la normale unitaire en un point de e_N . Comme le tenseur R_{ijk} a $\frac{1}{12} N^2(N^2-1)$ composantes linéairement indépendantes et différentes de zéro, on voit facilement, en tenant compte de la forme du dernier terme de (23), qu'il y a :

$$\frac{1}{12} N^2(N^2-1) + \frac{1}{2} N(N-1)(N+1) + N$$

équations de Gauss indépendantes. D'autre part, grâce à la symétrie des ω_{ik} , il est facile de voir qu'il y a :

$$\frac{1}{6} N(N-1)(N+4) + N^2$$

équations de Codazzi indépendantes. Le système (19)+(23)+(24) se compose donc de :

$$N(N+1) + \frac{1}{12} N^2(N^2-1) + \frac{1}{6} N(N-1)(N+4) + \frac{1}{2} N(N-1)(N+1) + N^2 + N$$

équations dans le cas où e_N n'est pas de classe un.

Si le contenant est un espace e_N de classe un, les équations de Gauss et de Codazzi se simplifient et deviennent respectivement :

$$(25) \quad R_{ijk} = \omega_{ij} \omega_{ik} - \omega_{ik} \omega_{ij},$$

et :

$$(26) \quad \omega_{ij,k} - \omega_{ik,j} = 0.$$

En explicitant les dérivées covariantes des ω_{ik} , les équations de Codazzi peuvent s'écrire comme suit :

$$(27) \quad \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x^j} + \omega_{lk} \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\} - \omega_{lj} \left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\} = 0.$$

Il n'y a plus maintenant que $\frac{1}{12} N^2 (N^2 - 1)$ équations de Gauss et $\frac{1}{6} N(N-1)(N+4)$ équations de Codazzi indépendantes, de sorte que le système (19)+(25)+(26) de l'être mathématique non-arbitraire se compose de :

$$N(N+1) + \frac{1}{12} N^2 (N^2 - 1) + \frac{1}{6} N(N-1)(N+4)$$

équations indépendantes si le contenant est un espace e_N de classe un.

3. Théorème : Le contenant d'un être mathématique non-arbitraire est un espace de Riemann à quatre dimensions et de classe un. Pour démontrer ce théorème, cherchons quel est le nombre des inconnues qui interviennent dans le système (19)+(23)+(24). On a d'abord évidemment les $\frac{1}{2} N(N+1)$ fonctions g_{ik} , les $\frac{1}{2} N(N+1)$ fonctions ω_{ik} , les $\frac{1}{2} N(N+1)$ fonctions T_{ik} et les $\frac{1}{2} N(N+1)$ fonctions U_{ik} , c'est-à-dire $2N(N+1)$ inconnues. Nous avons ensuite N autres inconnues qui sont simplement les N fonctions $x^i (X^1, X^2, \dots, X^N)$, qui définissent, en fonction de N des $N+1$ coordonnées X^a , un système de *coordonnées intrinsèques* dans le contenant de l'être mathématique non-arbitraire. (Il est impossible de prendre $x^1 = X^1, x^2 = X^2, \dots, x^N = X^N$, parce qu'à de telles coordonnées dans e_N ne correspondent pas a priori des g_{ik} essentiellement finis). Finalement, nous avons $2N$ autres inconnues qui proviennent du fait que la frontière (σ) , à $N-1$ dimensions, du domaine d'existence des fonctions-contenus, n'est pas déterminée quand on ne connaît que l'équation $F(X^1, X^2, \dots, X^{N+1}) = 0$ du contenant. En effet, pour déterminer l'équation $\sigma(x^1, x^2, \dots, x^N) = 0$ il faut connaître les N quantités $\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}$ ainsi que les N coordonnées x_0^i d'un point de σ . Les $2N(N+1) + 3N$ inconnues que nous venons de mettre en évidence déterminent le contenant et sa frontière σ quand on se donne les coordonnées X_0^a de l'un de ses points, ainsi que la normale

unitaire en ce point et la métrique de e_{N+1} . Cependant, comme ces inconnues doivent être déterminées nécessairement par le système (19)+(23)+(24), où figurent les constantes $\lambda_g, \alpha_g, \lambda_\omega$ et α_ω , ces quatre constantes sont de nouvelles inconnues, car il ne saurait y avoir des constantes arbitraires dans un être mathématique non-arbitraire. (La métrique et la forme du contenant dépendent d'ailleurs en grande partie des valeurs de ces constantes). On a donc en tout :

$$2N(N+1)+3N+4$$

inconnues dans le problème de l'être mathématique non-arbitraire. Pour que ce problème soit bien défini, c'est-à-dire pour qu'il existe, dans l'ensemble ε_N , un être mathématique non-arbitraire, il faut que le système (19)+(23)+(24) soit un système complet (avec le même nombre d'équations que d'inconnues). Si le contenant de l'être mathématique non-arbitraire *n'est pas de classe un*, il faut donc poser :

$$N(N+1) + \frac{1}{12}N^2(N^2-1) + \frac{1}{6}N(N-1)(N+4) + \frac{1}{2}N(N-1)(N+1) + N^2 + N = 2N(N+1) + 3N + 4.$$

Comme cette relation n'est vérifiée par aucune valeur entière et positive de N , il faut évaluer le nombre d'équations au nombre d'inconnues dans le cas d'un contenant de classe un. D'après le §3 on doit donc poser :

$$N(N+1) + \frac{1}{12}N^2(N^2-1) + \frac{1}{6}N(N-1)(N+4) = 2N(N+1) + 3N + 4.$$

Comme cette relation est satisfaite par $N=4$ et seulement pour $N=4$, le théorème est donc démontré.

4. Il n'existe qu'un seul être mathématique non-arbitraire dans l'ensemble ε_N . En effet, le système (19)+(25)+(26) est un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre qui ne peut avoir qu'une seule solution ne faisant pas intervenir des fonctions arbitraires donnant la distribution des inconnues et de leurs dérivées normales sur la frontière σ du contenant. Or, dans un être mathématique non-arbitraire il ne peut y avoir de telles fonctions arbitraires, car celles-ci n'auraient aucun rapport avec la métrique et la forme du contenant et ne seraient donc pas des fonctions-contenus.

5. Tableau des inconnues du problème de l'être mathématique non-arbitraire. Comme nous avons démontré que le contenant est un espace de Riemann à quatre dimensions et de classe un, le système (19)+(25)++(26) se compose de 56 équations indépendantes et contient 56 inconnues, à savoir :

métrique et forme du contenant . . .	{	10 inconnues : g_{ik} .
	{	10 inconnues : ω_{ik} .
fonctions-contenus	{	10 inconnues : T_{ik} .
	{	10 inconnues : U_{ik} .
frontière σ du contenant.	{	4 inconnues : $\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}$.
	{	4 inconnues : x_0^i .
coordonnées «intrinsèques»	{	4 inconnues : $x^i (X^1, X^2, X^3, X^4)$.
constantes absolues.	{	4 inconnues : $\lambda_g, \lambda_g, \lambda_\omega, \lambda_\omega$.
		56 inconnues au total.

Rappelons que les $\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}$ fournissent les cosinus directeurs de la frontière tridimensionnelle σ du contenant et que cette frontière passe par le point x_0^i .

6. Détermination des fonctions-contenus tensorielles T_{ik} et U_{ik} . La détermination complète de ces fonctions, en tant que fonctions des x^i , fait partie de l'intégration du système fondamental (19)+(25)+(26). Il est cependant très important d'exprimer ces mêmes tenseurs en fonction de certaines fonctions-contenus de base : Ψ^{mn} (pour les T_{ik}) et Φ^{mn} (pour les U_{ik}). (Nous verrons que l'indice m varie de 1 à 4 et l'indice n de 1 à ∞). Les nouvelles expressions de T_{ik} et de U_{ik} montrent immédiatement que ces fonctions satisfont identiquement aux conditions de divergence nulle exigées par le système (19), et l'on peut en déduire le caractère (hyperbolique normal, anormal ou elliptique) de la métrique, indépendamment de l'intégration du système (19)++(25)+(26).

Désignons par $\epsilon^i (i=1, 2, 3, 4)$ quatre opérateurs matrices, à quatre lignes et quatre colonnes, satisfaisant aux conditions :

$$(28) \quad \epsilon^i \epsilon^k + \epsilon^k \epsilon^i = 2 \delta^{ik} \cdot I \quad (I = \text{matrice unité}),$$

et formons, avec quatre fonctions $\psi^m (m=1, 2, 3, 4)$ des x^i , linéairement indépendantes, une matrice à quatre lignes et une colonne. Considérons, en un point $P(x^1, x^2, x^3, x^4)$ quelconque de l'espace de Riemann qua-

dridimensionnel qui est le contenant de l'être mathématique non-arbitraire (d'après le théorème du § 3), un système de coordonnées géodésiques orthogonales locales $\zeta^i (i=1, 2, 3, 4)$, et imposons aux fonctions ψ^m la condition de satisfaire au système suivant de quatre équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$(29) \quad \epsilon^i \frac{\partial \psi^m}{\partial \zeta^i} = -\sqrt{\alpha} \psi^m$$

dans lequel α est une constante réelle, les opérations $\epsilon^i \psi^m$ étant définies par :

$$(30) \quad \epsilon^i \psi^m = (\epsilon^i)^{ml} \psi_l.$$

En appliquant à ces équations l'opérateur $\epsilon^i \frac{\partial}{\partial \zeta^i}$, on voit immédiatement, par suite de (28) et de $\partial^2 / \partial \zeta^i \partial \zeta^k = \partial^2 / \partial \zeta^k \partial \zeta^i$, que chaque ψ^m satisfait à l'équation :

$$(31) \quad \sum_1^4 \frac{\partial^2 \psi^m}{\partial \zeta^{i2}} = \alpha \psi^m.$$

Par suite des propriétés des coordonnées géodésiques locales rectangulaires, l'opérateur $\sum_1^4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^{i2}}$ est le laplacien :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \right),$$

de l'espace de Riemann, et l'équation (31) s'écrit donc :

$$(32) \quad \Delta \psi^m = \alpha \psi^m.$$

On voit que les solutions du système (29) sont les fonctions propres de l'opérateur laplacien et que la constante α est la valeur propre correspondante. Pour qu'il existe une solution $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4$ du système (29), lorsque α est l'une des valeurs propres du laplacien, il faut donc qu'il existe, pour cette valeur propre, quatre fonctions propres linéairement indépendantes de cet opérateur. Inversement, il est facile de voir qu'étant données quatre fonctions propres linéairement indépendantes $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4$ du laplacien, relatives à une même valeur propre, ces fonctions sont des solutions du système (29) pour une certaine orientation du quadripode des ζ^i bien définie en chaque point. En effet, en introduisant des fonctions propres du laplacien, préalablement déterminées, dans le système (29), on obtient quatre équations qui permet-

tent de déterminer les quatre paramètres (par ex. les angles d'Euler) qui fixent l'orientation des φ^i . D'ailleurs, l'orientation du quadripode des φ^i qui correspond, en un point, à un système donné de fonctions propres linéairement indépendantes du laplacien, est invariante vis-à-vis d'un changement quelconque des matrices ϵ^i , pourvu que les nouvelles matrices satisfassent aussi aux conditions (28) et n'introduisent aucune nouvelle quantité arbitraire. D'après les propriétés du groupe des rotations et des symétries, un tel changement de ϵ^i est en effet équivalent à une rotation simple (d'angle $\frac{\pi}{2}$) accompagnée ou non d'une symétrie des axes locaux φ^i .

Effectuons maintenant un changement des coordonnées géodésiques locales et désignons les nouvelles coordonnées géodésiques par $\bar{\varphi}^i$. Les $\frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}^i}$ sont les composantes covariantes de l'opérateur gradient, et l'on a :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}^i} = \frac{\partial \varphi^k}{\partial \bar{\varphi}^i} \frac{\partial}{\partial \varphi^k},$$

c'est-à-dire :

$$(33) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi^k} = \frac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial \varphi^k} \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}^i}.$$

La transformation (33) appliquée à (29) donne donc :

$$\epsilon^k \frac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial \varphi^k} \frac{\partial \psi^m}{\partial \bar{\varphi}^i} = -\sqrt{\alpha} \psi^m,$$

ou bien :

$$(34) \quad \bar{\epsilon}^i \frac{\partial \psi^m}{\partial \bar{\varphi}^i} = -\sqrt{\alpha} \psi^m,$$

en posant :

$$(35) \quad \bar{\epsilon}^i = \epsilon^k \frac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial \varphi^k}.$$

Comme les ψ^m sont des invariants, par suite de leur définition (32), on voit donc que les équations (29) sont invariantes vis-à-vis d'un changement $\varphi^i \rightarrow \bar{\varphi}^i$ de coordonnées géodésiques, quand on admet que les ϵ^i se transforment comme les composantes contravariantes d'un vecteur. Or, on peut admettre cette loi de transformation puisque les $\bar{\epsilon}^i$ transformés satisfont aussi aux conditions (28) :

$$\bar{\epsilon}^i \bar{\epsilon}^k + \bar{\epsilon}^k \bar{\epsilon}^i = 2\delta^{ik} \cdot I.$$

En effet :

$$\bar{\epsilon}^i \bar{\epsilon}^k + \bar{\epsilon}^k \bar{\epsilon}^i = (\epsilon^j \epsilon^l + \epsilon^l \epsilon^j) \frac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial \varphi^j} \frac{\partial \bar{\varphi}^k}{\partial \varphi^l} = 2\delta^{jl} \cdot I \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial \varphi^j} \frac{\partial \bar{\varphi}^k}{\partial \varphi^l} = 2I \cdot \sum_j \frac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial \varphi^j} \frac{\partial \bar{\varphi}^k}{\partial \varphi^j},$$

et :

$$\sum_j \frac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial \varphi^j} \frac{\partial \bar{\varphi}^k}{\partial \varphi^j} = \delta^{ik},$$

pour des coordonnées orthogonales comme les coordonnées géodésiques.

Nous désignerons dorénavant par Ψ^{mn} ($m=1, 2, 3, 4$) les *fonctions propres non-arbitraires* du laplacien, c'est-à-dire celles qui son *entièrement* déterminées quand on connaît les g_{ik} du contenant de l'être mathématique non-arbitraire ainsi que l'équation $\sigma(x^1, x^2, x^3, x^4)=0$ de sa frontière tridimensionnelle. (L'indice n , qui varie, comme on le verra plus loin, de 1 à ∞ , sert à numéroter les valeurs propres du laplacien pour lesquelles il y a *quatre* fonctions propres linéairement indépendantes et non-arbitraires. Nous montrerons plus tard qu'aucun spectre continu n'intervient dans notre problème). Choisissons maintenant, parmi les matrices à quatre lignes et quatre colonnes qui satisfont aux conditions (28), un système de quatre matrices ϵ_0^i dont trois sont réelles et hermitiques et l'autre (par exemple ϵ_0^4) purement imaginaire et hermitique. De plus, les éléments de ces ϵ_0^i seront uniquement les nombres 0, ± 1 et $\pm i$. Les matrices suivantes satisfont à ces conditions :

$$(36) \quad \epsilon_0^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \epsilon_0^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\epsilon_0^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \epsilon_0^4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Aux fonctions Ψ^{mn} , et pour une valeur donnée de n , correspond, en utilisant les matrices ϵ_0^i , une orientation du quadripode des φ^i bien définie en chaque point, pour laquelle ces Ψ^{mn} sont des solutions du système (29). Nous dirons que l'orientation des φ^i ainsi définie est une *orientation principale*, et nous désignerons alors les coordonnées géo-

désiques correspondantes par φ_n^i . Les fonctions Ψ^{mn} satisfont donc au système d'équations suivant :

$$(37) \quad \epsilon_0^i \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial \varphi_n^i} = -\sqrt{\alpha^n} \Psi^{mn}.$$

A la suite d'un changement quelconque $\varphi_n^i \rightarrow \varphi^i$ des coordonnées géodésiques les équations précédentes deviennent :

$$(38) \quad \epsilon_n^i \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial \varphi^i} = -\sqrt{\alpha^n} \Psi^{mn},$$

en tenant compte de la transformation (35) qui s'écrit ici :

$$(39) \quad \epsilon_n^i = \epsilon_0^k \frac{\partial \varphi^i}{\partial \varphi_n^k}.$$

Par suite des définitions :

$$(40) \quad \epsilon^i \Psi^{mn} = (\epsilon^i)^{ml} \Psi_l^n; \quad \Psi^{mn} \epsilon^i = (\epsilon^i)^{lm} \Psi_l^n,$$

il est évident que les matrices réelles $\epsilon_0^1, \epsilon_0^2, \epsilon_0^3$ commutent avec les Ψ^{mn} tandis que la matrice imaginaire ϵ_0^4 anti-commute avec les Ψ^{mn} . En posant :

$$(41) \quad \Psi_{mn}^+ = i \Psi^{mn} \epsilon_0^4,$$

on déduit donc immédiatement de (37) les équations :

$$(42) \quad \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi_n^i} \epsilon_0^i = \sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn}^+.$$

Le changement $\varphi_n^i \rightarrow \varphi^i$ donne alors, grâce à la transformation (39) :

$$(43) \quad \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi^i} \epsilon_n^i = \sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn}^+$$

(équations adjointes des équations 38).

Désignons par $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}$ les composantes contravariantes de l'opérateur gradient, et formons avec les Ψ^{mn} et les Ψ_{mn}^+ le tenseur suivant :

$$(44) \quad T^{ik} = \Psi_{mn}^+ \epsilon_n^i \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial \varphi_k^i} - \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi_k^i} \epsilon_n^i \Psi^{mn} + \Psi_{mn}^+ \epsilon_n^k \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial \varphi_i^i} - \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi_i^i} \epsilon_n^k \Psi^{mn}.$$

(une sommation doit être effectuée par rapport aux indices muets m et n). Les T^{ik} sont symétriques et le caractère tensoriel contravariant,

pour une transformation $\bar{\varphi}^i \rightarrow \varphi^i$, est évident par suite de (35). Comme les Ψ^{mn} et les Ψ_{mn}^+ satisfont évidemment aux équations

$$(45) \quad \Delta \Psi^{mn} = \sum_i \frac{\partial^2 \Psi^{mn}}{\partial \varphi^{i2}} = \alpha^n \Psi^{mn}; \quad \Delta \Psi_{mn}^+ = \sum_i \frac{\partial^2 \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi^{i2}} = \alpha_n \Psi_{mn}^+,$$

on vérifie sans peine, en utilisant les équations (38) et (43), que le tenseur T^{ik} a une divergence nulle, c'est-à-dire :

$$(46) \quad \frac{\partial T^{ik}}{\partial \varphi^k} = 0,$$

car les φ^i sont des coordonnées géodésiques. (Comme le ds^2 en coordonnées géodésiques s'écrit simplement :

$$ds^2 = \sum_i (d\varphi^i)^2,$$

dans le voisinage infinitésimal d'un point, on a ici : $T_{ik} = T^{ik}$, T_{ik} étant le tenseur covariant «complément» de T^{ik}). Il faut remarquer qu'à l'invariance des orientations principales du quadripode des φ^i correspond évidemment l'invariance des composantes du tenseur T^{ik} vis-à-vis d'un changement des matrices ϵ_0^i respectant toutes les conditions auxquelles satisfont ces ϵ_0^i .

Nous avons ainsi trouvé un tenseur qui satisfait aux mêmes conditions que le tenseur (17) des équations fondamentales (19 a); en effet, T^{ik} est symétrique, sans divergence et ne dépend que des g_{ik} . Or, le tenseur (17), étant le seul qui satisfait à ces conditions et devant être égalé, comme nous l'avons vu dans le § 2, à une fonction-contenu unique bien définie, il est évident que cette fonction n'est autre que le tenseur (44) quand on écrit (19 a) en coordonnées géodésiques, et s'il existe des valeurs propres du laplacien pour lesquelles il y a quatre fonctions propres linéairement indépendantes.

Ce que nous venons de dire sur le tenseur (44) peut être répété, mutatis mutandis, pour déterminer le tenseur U^{ik} qui doit être égalé au second membre de (19 b). A la forme métrique externe (7) correspondent des coordonnées «géodésiques» locales q^i , c'est-à-dire $d\Omega^2 = \sum (dq^i)^2$, et l'on peut définir des fonctions Φ^{mn} satisfaisant aux équations :

$$(47) \quad \sum_1^4 \frac{\partial^2 \Phi^{mn}}{\partial q^{i2}} = \zeta^n \Phi^{mn}, \quad (m=1, 2, 3, 4),$$

c'est-à-dire :

$$(48) \quad \Delta_{\omega} \Phi^{mn} \equiv \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\sqrt{\omega} \omega^{ik} \frac{\partial \Phi^{mn}}{\partial x^i} \right) = \zeta_n \Phi^{mn},$$

Aux fonctions Φ^{mn} et aux matrices ϵ_0^i correspondent aussi, pour une valeur quelconque de l'indice n , des orientations principales du quadripode des q^i , pour lesquelles on a :

$$(49) \quad \epsilon_0^i \frac{\partial \Phi^{mn}}{\partial q_n^i} = -\sqrt{|\zeta_n|} \Phi^{mn},$$

ou encore :

$$(50) \quad \epsilon_{nq}^i \frac{\partial \Phi^{mn}}{\partial q^i} = -\sqrt{|\zeta_n|} \Phi^{mn},$$

grâce à la transformation :

$$(51) \quad \epsilon_{nq}^i = \epsilon_0^k \frac{\partial q^i}{\partial q_n^k}.$$

En posant :

$$(52) \quad \Phi_{mn}^+ = i \Phi^{mn} \epsilon_0^i$$

on aura aussi les équations adjointes :

$$(53) \quad \frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q_n^i} \epsilon_0^i = \sqrt{|\zeta_n|} \Phi_{mn}^+,$$

et :

$$(54) \quad \frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q^i} \epsilon_{nq}^i = \sqrt{|\zeta_n|} \Phi_{mn}^+.$$

Le tenseur U^{ik} a donc l'expression :

$$(55) \quad U^{ik} = \Phi_{mn}^+ \epsilon_{nq}^i \frac{\partial \Phi^{mn}}{\partial q_k} - \frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q_k} \epsilon_{nq}^i \Phi^{mn} + \Phi_{mn}^+ \epsilon_{nq}^k \frac{\partial \Phi^{mn}}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q_i} \epsilon_{nq}^k \Phi^{mn}.$$

Pour les raisons expliquées plus haut au sujet de T^{ik} , ce tenseur U^{ik} est le seul qui peut être égalé aux seconds membres des équations (19b) écrites en coordonnées « géodésiques » q^i , s'il existe des valeurs propres β_n de l'opérateur Δ_{ω} pour lesquelles il y a quatre fonctions propres linéairement indépendantes.

7. Les fonctions propres de l'opérateur laplacien et le caractère de la métrique du contenant. Nous allons démontrer le théorème suivant :

La métrique du contenant de l'être mathématique non-arbitraire est hyperbolique normale et il y a un ensemble dénombrable de valeurs propres du laplacien pour chacune desquelles il existe quatre fonctions propres linéairement indépendantes de cet opérateur.

Avant la démonstration de ce théorème, signalons un important corollaire :

Le tenseur T_{ik} , défini par (44), est égal à la fonction-contenu tensorielle T_{ik} qui figure aux seconds membres des équations fondamentales (19a), lorsque ces équations sont écrites en coordonnées géodésiques ρ^i .

En effet, si le théorème annoncé est vrai, le tenseur (44) existe réellement et d'après les résultats du paragraphe précédent il est alors le seul qui peut être égalé au tenseur (17) lorsque les équations (19a) sont écrites en coordonnées ρ^i .

Remarquons ici qu'un ds^2 hyperbolique normal et à quatre dimensions, comme celui de l'être mathématique non-arbitraire, peut être écrit en coordonnées géodésiques de deux manières : 1.^o avec trois carrés positifs (par exemple $(d\rho^1)^2$, $(d\rho^2)^2$ et $(d\rho^3)^2$) et un carré négatif ($(d\rho^4)^2 < 0$); 2.^o avec trois carrés négatifs et un carré positif. L'expression (44) du tenseur T^{ik} suppose implicitement que le ds^2 est écrit en coordonnées géodésiques, avec les trois carrés $(d\rho^1)^2$, $(d\rho^2)^2$ et $(d\rho^3)^2$ positifs et $(d\rho^4)^2 < 0$. Les composantes T^{44} et T^{ik} pour $i, k=1, 2, 3$ sont alors réelles, tandis que les composantes $T^{i4} = T^{4i}$ sont purement imaginaires. Nous adopterons toujours cette manière d'écrire le ds^2 géodésique. Si, pourtant, le ds^2 géodésique avait été écrit avec trois carrés négatifs, il suffirait de diviser par l'unité imaginaire le tenseur (4) pour avoir le tenseur correspondant T'_{ik} , c'est-à-dire : $T'_{ik} = \frac{1}{i} T_{ik}$, ce qui revient à poser $\Psi_{mn}^+ = \Psi^{mn} \epsilon_0^4$ au lieu de $\Psi_{mn}^+ = i\Psi^{mn} \epsilon_0^4$, comme nous l'avons fait en (41).

On peut envisager *a priori* trois cas essentiellement différents :

1.^o *La métrique est elliptique.* Autrement dit, il est possible d'écrire le ds^2 en coordonnées géodésiques avec quatre carrés positifs (ou négatifs). La forme métrique est définie et l'équation (45) des fonctions propres du laplacien est une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre et *du type elliptique*. Soient $P(x^1, x^2, x^3, x^4)$ et $M(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$ deux points quelconques du contenant et $G(M, P)$ la fonction de Green (s'annulant aux limites) relative au pôle P et au domaine d'existence V des fonctions propres Ψ du laplacien. En appliquant la formule de Green aux fonctions $G(M, P)$ et Ψ , on obtient facilement, par un calcul classique en théorie du potentiel et en remarquant que les fonctions propres, par leur définition même, s'annulent aux frontières de V , l'équation intégrale suivante :

$$\Psi(P) = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_V G(M, P) \Psi(M) dv,$$

Des propriétés évidentes du noyau de cette équation de Fredholm montrent qu'à chaque valeur propre α_n du laplacien ne correspond qu'une fonction propre. Si la métrique était elliptique, il serait donc impossible de former un tenseur (44) avec les fonctions propres du laplacien.

2°. *La métrique est hyperbolique normale.* Autrement dit, il est possible d'écrire le ds^2 en coordonnées géodésiques avec trois carrés positifs et un carré négatif. La forme métrique est indéfinie et l'équation (45) des fonctions propres du laplacien est une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre *du type hyperbolique normal*.

Le laplacien est maintenant un dalembertien \square généralisé relatif à la métrique (2) et nous écrirons comme suit l'équation (45):

$$(56) \quad \square \Psi = \alpha \Psi.$$

Pour chercher s'il y a des valeurs de α pour lesquelles l'équation précédente a quatre fonctions propres non-arbitraires linéairement indépendantes, décomposons le contenant quadridimensionnel en une famille infinie et continue de variétés tridimensionnelles V_3 à métrique elliptique, définie par un paramètre $\tau = x^4$ qui sera l'une des coordonnées¹. Parmi les systèmes de coordonnées x^1, x^2, x^3, τ que l'on peut considérer nous prendrons ceux pour lesquels :

$$(57) \quad g_{ik} = 0 \quad \text{pour } i \neq k.$$

La métrique pourra donc se mettre sous la forme :

$$(57 a) \quad ds^2 = g_{44} d\tau^2 + \sum_1^3 g_{ii} (dx^i)^2$$

avec : $g_{44} < 0$ et $g_{ii} > 0$. Désignons par γ le déterminant des g_{ik} des V_3 . On peut alors écrire :

$$(58) \quad g = g_{44} \gamma$$

et l'équation (56) des fonctions propres du laplacien (dalembertien) prendra la forme suivante :

$$(59) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{g} g^{i\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \right) + \frac{1}{2g_{44}} g^{\mu\mu} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sqrt{g} g^{44} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right) = \alpha \Psi,$$

l'indice μ pouvant varier de 1 à 3. En désignant par Δ_3 le laplacien

¹ Pour que cette décomposition ne soit pas arbitraire, il faut naturellement prendre la famille de V_3 qui donne, en chaque point, la contribution (positive) maxima au ds^2 du contenant.

relatif aux V_3 et par ∇_3 l'opérateur hamiltonien (gradient) pour les mêmes variétés, l'équation précédente s'écrit :

$$(60) \quad \Delta_3 \Psi + \frac{1}{2g_{44}} (\nabla g_{44}) \cdot \nabla_3 \Psi + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\sqrt{g} g^{44} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right) = \alpha \Psi.$$

(Si la métrique était pseudo euclidienne, on aurait $g = -c^2$ (c étant une constante, égale à l'unité imaginaire quand le ds^2 est écrit sous la forme :

$$ds^2 = \sum_1^4 (d\rho^i)^2, \text{ et } g^{44} = -\frac{1}{c^2}, \text{ de sorte que le premier membre de (60)}$$

deviendrait identique au dalembertien classique de Ψ).

Admettons, dans ce qui suit, qu'il est possible de choisir un système de coordonnées x^1, x^2, x^3, τ satisfaisant aux conditions (57) et tel que l'une des hypersurfaces $x^i = \text{const}$ coïncide avec la frontière σ du contenant. Supposons provisoirement que les g_{ik} d'un tel système de coordonnées satisfont aux conditions suivantes :

$$(61) \quad g_{44} = g_{44}(\tau)$$

et :

$$(62) \quad g_{ik} = f(\tau) r_{ik}(x^1, x^2, x^3) \quad \text{pour } i, k = 1, 2, 3.$$

L'équation (60) devient alors :

$$(63) \quad \Delta_3^0 \Psi + \frac{f(\tau)}{g_{44}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2g_{44}} \left(3 \frac{df}{d\tau} - \frac{f}{g_{44}} \frac{dg_{44}}{d\tau} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \alpha f(\tau) \Psi,$$

avec :

$$\Delta_3^0 = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\sqrt{r} r^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right).$$

Par suite de (62) et de (19a) les fonctions Ψ_n sont ici de la forme :

$$(64) \quad \Psi_n = \sum_l u_n^{(l)}(\tau) v_l(x^1, x^2, x^3).$$

Comme le second membre de (63) peut être écrit sous la forme :

$$- \sum_l k_l u_n^{(l)}(\tau) v_l + \alpha f(\tau) \Psi + \sum_l k_l u_n^{(l)}(\tau) v_l,$$

on obtient pour les v_l l'équation :

$$(65) \quad \Delta_3^0 v_l = -k_l v_l.$$

D'autre part, les fonctions $u_n^{(l)}(\tau)$ satisfont aux équations :

$$(66) \quad \frac{d^2 u_n^{(l)}}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left(3 \frac{df}{d\tau} - \frac{1}{g_{44}} \frac{dg_{44}}{d\tau} \right) \frac{du_n^{(l)}}{d\tau} = \frac{g_{44}}{f(\tau)} [k_n f(\tau) + k_l] u_n^{(l)},$$

dans laquelle nous avons posé $\alpha = k_n$, puisqu'il s'agit des fonctions propres non-arbitraires Ψ_{mn} du laplacien. Ces fonctions sont uniformes, bornées, continues, possèdent des dérivées premières continues, des dérivées secondes bornées et intégrables, et s'annulent nécessairement sur la frontière σ . En désignant par $G(M, P)$ la fonction de Green attachée à l'opérateur Δ_3^0 et s'annulant sur σ , l'équation (65) donne donc :

$$(67) \quad v_l(P) = \frac{k_l}{4\pi} \int_{V_3} G(M, P) v_l(M) dV_3(M).$$

Cette équation intégrale a une infinité dénombrable de valeurs propres k_l , toutes positives, et à chacune de ces valeurs propres correspond une seule fonction propre $v_l(x^1, x^2, x^3)$, solution de (65). Aux fonctions v_l correspondent les solutions de l'équation (66) pour la même valeur de l'indice l . Il y a évidemment deux solutions non-arbitraires et linéairement indépendantes de (66) pour des valeurs données des indices l et n : nous les désignerons par $u_n^{(1)}$ et $u_n^{(2)}$.

Remarquons maintenant que les expressions (64) des fonctions propres du laplacien ne peuvent être absolument non-arbitraires que si la sommation fait intervenir, ou bien tous les v_l , ou bien un seul v_l , et dans ce dernier cas on doit évidemment avoir $l = n$. Formons donc les fonctions :

$$(68) \quad \begin{cases} \Psi_{I,n} = \sum_1^\infty u_n^{(1)}(\tau) v_l(x^1, x^2, x^3); & \Psi_{II,n} = \sum_1^\infty u_n^{(2)}(\tau) v_l(x^1, x^2, x^3) \\ \Psi_{III,n} = u_n^{(1)}(\tau) v_n(x^1, x^2, x^3); & \Psi_{IV,n} = u_n^{(2)}(\tau) v_n(x^1, x^2, x^3). \end{cases}$$

Ces fonctions sont les seules fonctions propres linéairement indépendantes et absolument non-arbitraires du laplacien (pour $\alpha_n = k_n$), lorsque la métrique satisfait aux conditions (61) et (62), et lorsque la frontière σ du contenant coïncide avec une hypersurface $x^i = \text{const}$.

Faisons maintenant subir à la métrique une variation virtuelle ne respectant plus les conditions (61) et (62). Les quatre fonctions $\Psi_{I,n}$, $\Psi_{II,n}$, $\Psi_{III,n}$ et $\Psi_{IV,n}$ se transformeront alors respectivement en quatre fonctions propres non-arbitraires et linéairement indépendantes du laplacien général, que nous désignerons par Ψ_{1n} , Ψ_{2n} , Ψ_{3n} et Ψ_{4n} . Inversement, les fonctions Ψ_{1n} , Ψ_{2n} , Ψ_{3n} et Ψ_{4n} tendront respectivement vers $\Psi_{I,n}$, $\Psi_{II,n}$, $\Psi_{III,n}$ et $\Psi_{IV,n}$ lorsque $g_{44} \rightarrow g_{44}(\tau)$ et $g_{ik} \rightarrow f(\tau) r_{ik}(x^1, x^2, x^3)$. Si la métrique est hyperbolique normale et si la frontière du contenant est un lieu de lignes coordonnées orthogonales à des variétés tridimensionnelles à métrique elliptique, il existe donc une infinité dénombrable de valeurs propres (positives) du lapla-

ciens, à chacune desquelles correspondent quatre fonctions propres absolument non-arbitraires et linéairement indépendantes. De plus, le calcul précédent montre clairement qu'il n'y a pas, pour ces valeurs propres, d'autres fonctions propres linéairement indépendantes et non-arbitraires en dehors de celles dont nous venons de démontrer l'existence.

Nous donnerons plus loin (§ 12) un exemple de calcul effectif des valeurs et fonctions propres du laplacien, dans le cas où l'opérateur Δ_0^3 est attaché à un « espace-temps » de De Sitter.

3°. *La métrique est « hyperbolique anormale »*. Dans ce cas, le ds^2 , en coordonnées géodésiques locales ζ^i , comporte deux carrés positifs et deux carrés négatifs. L'équation $\Delta \Psi_{mn} = \alpha_n \Psi_{mn}$ des fonctions et valeurs propres du laplacien est alors une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique anormal. Un calcul tout-à-fait analogue à celui que nous avons fait dans le cas hyperbolique normal, montre alors qu'aux valeurs propres α_n du laplacien correspondent, soit moins de quatre, soit plus de quatre fonctions propres non-arbitraires et linéairement indépendantes. S'il y a moins de quatre fonctions propres, il est impossible d'écrire avec ces fonctions un tenseur T_{ik} symétrique, du second ordre et sans divergence, pouvant par conséquent être égalé aux seconds membres des équations (19 a). S'il y a plus de quatre fonctions propres du laplacien, il est évidemment impossible de former avec ces fonctions un tel tenseur T_{ik} ayant une expression absolument non-arbitraire. En effet, à chaque combinaison quatre à quatre de ces fonctions propres (le nombre de ces combinaisons étant au moins 5) correspondrait un tenseur partiel T'_{ik} , qu'il faudrait associer linéairement aux autres tenseurs partiels. Comme cette association comporte toujours un choix arbitraire de facteurs, elle est inadmissible et empêche d'identifier les tenseurs qui en résultent avec le tenseur qui figure aux seconds membres des équations de l'être mathématique non-arbitraire.

En résumé, on voit que c'est seulement dans le cas hyperbolique normal qu'il existe un tenseur T_{ik} formé avec les fonctions propres du laplacien, ayant une expression absolument non-arbitraire, et satisfaisant aux conditions qui permettent de l'identifier au tenseur fondamental T_{ik} des équations de l'être mathématique non-arbitraire. Comme un tel tenseur existe nécessairement, puisque nous avons démontré dans le § 3 qu'il existe un être mathématique non-arbitraire, et comme d'autre part il ne peut avoir plus d'un tenseur satisfaisant aux mêmes conditions que T_{ik} , la métrique du contenant de l'être mathématique non-

-arbitraire doit être nécessairement une métrique hyperbolique normale. Le théorème énoncé au début de ce § est donc démontré.

Nous savons, d'après les calculs faits dans le cas hyperbolique normal, que la surface frontière $\sigma(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0$ du contenant de l'être mathématique non-arbitraire est un lieu de lignes coordonnées orthogonales à des variétés tridimensionnelles à métrique elliptique. Comme les coefficients g_{ik} de la forme métrique interne sont essentiellement des fonctions finies en chaque point du contenant, le résultat que nous venons de signaler entraîne la conséquence que la frontière σ ne peut être fermée, c'est-à-dire que *le contenant de l'être mathématique non arbitraire doit être illimité dans les deux sens le long de certaines lignes coordonnées, orthogonales à des variétés tridimensionnelles à métrique elliptique.*

8. Les fonctions propres de l'opérateur Δ_ω et le caractère de la métrique externe du contenant. Les raisonnements du § précédent peuvent être répétés sans aucun changement au sujet de l'opérateur Δ_ω et de l'équation $\Delta_\omega \Phi_{mn} = \beta_n \Phi_{mn}$ de ses fonctions propres Φ_{mn} et de ses valeurs propres β_n . On a donc le théorème suivant :

La métrique externe du contenant de l'être mathématique non-arbitraire est hyperbolique normale, et il y a un ensemble dénombrable de valeurs propres de l'opérateur Δ_ω pour chacune desquelles il existe quatre fonctions propres non-arbitraires linéairement indépendantes de cet opérateur.

On voit donc que le tenseur U_{ik} défini par (55), est égal à la fonction — contenu tensorielle qui figure aux seconds membres des équations fondamentales (19b), lorsque ces équations sont écrites en coordonnées géodésiques locales q^i relatives à la métrique externe (7).

9. Le principe variationnel qui correspond aux équations (19a, b) (38, 43) et (50, 54). Considérons la fonction de Lagrange suivante :

$$(69) \quad \mathcal{L} = \sum_{ikmn} [\sqrt{g} g^{ik} (\Psi_{mn}^+ \epsilon_n^i \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi_k} \epsilon_n^i \Psi^{mn}) + 2\sqrt{\omega} \Psi_{mn}^+ \Psi^{mn} + \\ + \sqrt{\omega} \omega^{ik} (\Phi_{mn}^+ \epsilon_{nq}^i \frac{\partial \Phi^{mn}}{\partial q_k} - \frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q_k} \epsilon_{nq}^i \Phi^{mn}) + 2\sqrt{\zeta} \zeta_n \Phi_{mn}^+ \Phi^{mn}],$$

et désignons par $x^i \rightarrow \varphi^i$ l'opération qui fait tendre, en un point $P(x^1, x^2, x^3, x^4)$ quelconque du contenant de l'être mathématique non-arbitraire, les coordonnées générales x^i vers des coordonnées géodésiques locales orthogonales φ^i . De même, soit $x^i \rightarrow q^i$ l'opération qui fait tendre les coordonnées générales x^i vers les coordonnées «géodé-

siques» locales orthogonales q^i . Les équations (38) et (50) s'obtiennent alors en égalant à zéro la dérivée variationnelle de \mathcal{L} par rapport aux Ψ_{mn}^+ et aux Φ_{mn}^+ respectivement, et en soumettant ces dérivées aux opérations $x^i \rightarrow \varrho^i$ et $x^i \rightarrow q^i$. On a en effet :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi_{mn}^+} \right)_{x^i \rightarrow \varrho^i} = \epsilon_n^i \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial \varrho^i} + \sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn} = 0,$$

et

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_{mn}^+} \right)_{x^i \rightarrow q^i} = \epsilon_{nq}^i \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial q^i} + \sqrt{\beta_n} \Phi_{mn} = 0,$$

puisque, pour $x^i \rightarrow \varrho^i$ on a : $g^{ik} \rightarrow \delta_{ik}$ et $g \rightarrow 1$, de même que $\omega^{ik} \rightarrow \delta_{ik}$ et $\omega \rightarrow 1$ pour $x^i \rightarrow q^i$. Pour ce qui est des équations adjointes (43) et (54) des équations (38) et (50), on a simplement, d'une manière analogue :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi_{mn}^+} \right)_{x^i \rightarrow \varrho^i} = - \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varrho^i} \epsilon_n^i + \sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn}^+ = 0,$$

et :

$$\frac{1}{2} \left(\frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_{mn}^+} \right)_{x^i \rightarrow q^i} = - \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial q^i} \epsilon_{nq}^i + \sqrt{\beta_n} \Phi_{mn}^+ = 0.$$

Finalement, en prenant les dérivées variationnelles *symétriques* de \mathcal{L} par rapport aux g^{ik} et aux ω^{ik} qui *y entrent explicitement*, on obtient (cf les expressions (44) et (55)) :

$$\sqrt{g} T^{ik} = \left(\frac{\delta}{\delta g^{ik}} + \frac{\delta}{\delta g^{ki}} \right) \mathcal{L},$$

et :

$$\sqrt{\omega} U^{ik} = \left(\frac{\delta}{\delta \omega^{ik}} + \frac{\delta}{\delta \omega^{ki}} \right) \mathcal{L}.$$

Ceci étant dit, considérons la fonction :

$$(70) \quad \mathcal{G} = \frac{1}{z_g} (R + \lambda_g) \sqrt{g} + \frac{1}{z_\omega} (S + \lambda_\omega) \sqrt{\omega}$$

et formons sa dérivée variationnelle par rapport aux g_{ik} . On a :

$$\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta g^{ik}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial g^{ik}} - \frac{d}{dx^j} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left(\frac{\partial g^{ik}}{\partial x^j} \right)} \right] + \frac{d^2}{dx^j dx^l} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left(\frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^j \partial x^l} \right)} \right].$$

D'autre part :

$$\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \omega^{ik}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \omega^{ik}} - \frac{d}{dx^j} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left(\frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x^j} \right)} \right] + \frac{d^2}{dx^j dx^l} \left[\frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left(\frac{\partial^2 \omega^{ik}}{\partial x^j \partial x^l} \right)} \right].$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \omega^{ik}} = \frac{1}{\kappa_g} \left[R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} (R + \lambda_g) \right],$$

et :

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \omega^{ik}} = \frac{1}{\kappa_\omega} \left[S_{ik} - \frac{1}{2} \omega_{ik} (S + \lambda_\omega) \right],$$

et ces fonctions ne sont autres que les premiers membres des équations (19 a, b). Les « principe » variationnel qui correspond aux équations (19 a) s'écrit donc (pour $x^i \rightarrow \rho^i$) :

$$(71) \quad \frac{\delta}{\delta g^{ik}} (\mathcal{G} - \mathcal{L}) = 0,$$

en convenant que la dérivée variationnelle de \mathcal{L} est la dérivée symétrique. Au système (19 b) correspond aussi la relation variationnelle analogue (pour $x^i \rightarrow q^i$) :

$$(72) \quad \frac{\delta}{\delta \omega^{ik}} (\mathcal{G} - \mathcal{L}) = 0,$$

dans laquelle la dérivée variationnelle de \mathcal{L} est la dérivée symétrique. On peut d'ailleurs mettre ces relations sous la forme intégrale :

$$\frac{\delta_g}{V} \int (\mathcal{G} - \mathcal{L}) dx^1 dx^2 dx^3 dx^4,$$

pour (71) et :

$$\frac{\delta_\omega}{V} \int (\mathcal{G} - \mathcal{L}) dx^1 dx^2 dx^3 dx^4,$$

pour (72). Dans ces relations V est le contenant de l'être mathématique non-arbitraire et les variations doivent s'annuler aux limites de V c'est-à-dire sur la frontière σ .

10. Les fonctions-contenus et les nombres contenus de l'être mathématique non-arbitraire. Soit $\varphi(x^1, x^2, x^3, x^4)$ une fonction dont le domaine d'existence est le contenant de l'être mathématique non-arbitraire. D'accord avec la définition de cet être, nous dirons que la fonction φ est une fonction-contenu de l'être mathématique non-arbitraire lorsqu'elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1°. La valeur de φ en chaque point du contenant est entièrement déterminée par les propriétés intrinsèques de la métrique et de la forme.

2°. Les propriétés intrinsèques de la métrique ou de la forme du contenant sont entièrement déterminées par la fonction φ seule ou associée à d'autres fonctions satisfaisant à la première condition.

Considérons maintenant un opérateur A et écrivons l'équation de ses fonctions propres φ et de ses valeurs propres a :

$$(73) \quad A\varphi = a\varphi$$

Supposons que les fonctions propres de A sont des fonctions-contenus de l'être mathématique non-arbitraire. L'ensemble $\{a\}$ des valeurs propres, dénombrables ou non, de l'opérateur A est alors un ensemble de nombres non-arbitraires, puisqu'ils peuvent être déterminés, comme les fonctions propres φ , par les propriétés de la métrique et de la forme du contenant. Nous dirons que les valeurs propres d'un opérateur dont les fonctions propres sont des fonctions-contenus, sont des *nombres-contenus* de l'être mathématique non-arbitraire. C'est évidemment le cas des valeurs propres α_n de l'opérateur laplacien Δ et β_n de l'opérateur Δ_ω (nous verrons que les α_n et les β_n jouent un grand rôle dans l'interprétation physique de la théorie).

Les nombres-contenus qui correspondent à un opérateur A sont évidemment des propriétés de l'être mathématique non-arbitraire qui doivent être attachées à certains points du contenant, marquant ainsi dans cet espace un espace discontinu (si le spectre de A est discontinu), dont nous dirons que chaque point est un *point singulier* de l'être mathématique non-arbitraire. Nous verrons plus tard quelle est l'interprétation physique des points singuliers et quels sont les points du contenant où doivent être attachés les nombres-contenus.

Désignons par a^* la quantité conjuguée d'une quantité donnée a . Considérons alors l'équation (73) et son équation conjuguée. On déduit immédiatement de ces équations :

$$(74) \quad \int_V [\varphi^* A(\varphi) - \varphi A^*(\varphi^*)] dv = (a - a^*) \int_V \varphi^* \varphi dv,$$

les intégrales étant étendues à tout le domaine d'existence des fonctions propres de A , c'est-à-dire à tout le contenant de l'être mathématique non-arbitraire. Il faut distinguer deux cas :

1°. L'opérateur A est réel, ainsi que ses fonctions propres. La relation précédente montre alors immédiatement que $a = a^*$, c'est-à-dire que les valeurs propres de A sont réelles. Dans ce cas, les a seront des propriétés réelles des points singuliers du contenant.
2°. L'opérateur A est complexe. Alors, la relation (74) montre que ses valeurs propres ne peuvent être réelles que s'il est un opérateur *hermitique*. Dans ce cas, comme les φ sont des fonctions-contenus, les a_n seront aussi des propriétés réelles des points singuliers. Les fonctions propres, par contre, tout en étant des fonctions contenues, ne

seront pas en général des propriétés réelles de l'être mathématique non-arbitraire, mais on peut former des combinaisons des φ essentiellement réelles, la plus simple étant la fonction qui figure sous le signe d'intégration du second membre de (74). Il est intéressant de remarquer que si le spectre d'un opérateur A est simplement discontinu, les propriétés correspondantes des points singuliers ne peuvent prendre qu'une suite discontinue de valeurs. Cette distinction entre propriétés réelles et propriétés imaginaires de l'être mathématique non-arbitraire, joue, comme on le verra plus loin, un rôle important dans l'interprétation physique de la théorie.

Les opérateurs les plus importants dans l'analyse de l'être mathématique non-arbitraire peuvent être rangés en trois classes, à savoir :

1°. Opérateurs dont l'expression est formée uniquement avec les g_{ik} (ou les ω_{ik}), les x^i (ou les φ^i et q^i) et les symboles de dérivation ou d'intégration par rapport aux x^i , φ^i ou q^i . Tels sont par exemple les importants opérateurs Δ et Δ_ω , déjà utilisés dans les paragraphes précédents.

2°. Opérateurs dont l'expression ne contient aucun des symboles de nature géométrique qui interviennent dans les opérateurs de la première classe. Tels sont par exemple les opérateurs matrices ϵ^i et tous les autres que l'on peut former par des combinaisons des ϵ^i .

3°. Opérateurs mixtes, faisant intervenir à la fois des symboles appartenant aux opérateurs de la première et de la deuxième classe. Tels sont par exemple les importants opérateurs $\epsilon^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$ et $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right) \epsilon^i$ dont nous avons vu le rôle dans le § 6.

Dans chacune de ces trois classes d'opérateurs on peut encore distinguer les opérateurs *complets*, faisant intervenir toutes les variables x^i (ou φ^i et q^i), des opérateurs *incomplets* qui ne font pas intervenir toutes les variables x^i . Nous dirons que les nombres-contenus (valeurs propres) qui correspondent aux premiers sont des *propriétés intrinsèques* des points singuliers, tandis que les valeurs propres qui correspondent aux seconds seront appelés des *propriétés non-intrinsèques* des points siguliers.

Considérons en particulier les opérateurs de la deuxième classe qu'on peut former uniquement avec i et les ϵ_n^i définis par (39) et qui satisfont aux relations (28). En ajoutant aux ϵ_n^i la matrice unité I (à quatre lignes et quatre colonnes) on peut former les seize opérateurs suivants :

$$(75) \left\{ \begin{array}{l} I, \epsilon_n^1, \epsilon_n^2, \epsilon_n^3, \epsilon_n^4 \equiv \gamma_n^\mu (\mu=1, 2, \dots, 5), \\ \frac{i}{2} (\epsilon_n^j \epsilon_n^k - \epsilon_n^k \epsilon_n^j) : \{ i \epsilon_n^2 \epsilon_n^3, i \epsilon_n^3 \epsilon_n^4, i \epsilon_n^4 \epsilon_n^1, i \epsilon_n^1 \epsilon_n^2, i \epsilon_n^2 \epsilon_n^4, i \epsilon_n^3 \epsilon_n^1 \} \equiv \\ \equiv \gamma_n^\mu (\mu=6, 7, \dots, 11), \\ i \epsilon_n^{j+1} \epsilon_n^{j+2} \epsilon_n^{j+3} : \{ i \epsilon_n^2 \epsilon_n^3 \epsilon_n^4, i \epsilon_n^3 \epsilon_n^4 \epsilon_n^1, i \epsilon_n^4 \epsilon_n^1 \epsilon_n^2, i \epsilon_n^1 \epsilon_n^2 \epsilon_n^3 \} \equiv \\ \equiv \gamma_n^\mu (\mu=12, \dots, 15), \\ \epsilon_n^1 \epsilon_n^2 \epsilon_n^3 \epsilon_n^4 \equiv \gamma_n^{16}. \end{array} \right.$$

Ces opérateurs sont linéairement indépendants et de plus sont hermitiques lorsque les ϵ_n^i le sont, c'est-à-dire lorsque ces matrices se confondent avec les matrices de base ϵ_0^i définies dans le § 6. Écrivons l'équation des fonctions propres d'un γ_0^μ formé avec les ϵ_0^i ;

$$\gamma_0^\mu \varphi_{m\nu} = a_\nu \varphi_{m\nu}.$$

On trouve alors que pour tous les γ_0^μ il ne peut y avoir que les deux valeurs propres $+1$ et -1 .

Il est possible de former d'autres nombres-contenus différents des nombres-contenus valeurs propres d'opérateurs. Nous allons indiquer les principaux modes de formation de ces nouveaux nombres-contenus. Soit $f(x^1, x^2, x^3, x^4)$ une fonction-contenu quelconque et A un opérateur dont les fonctions propres φ sont aussi des fonctions-contenus. Supposons, ce qui est vrai sous des conditions très générales lorsque A est hermitique, que f peut être développée en série absolument et uniformément convergente suivant les fonctions propres de A :

$$f = \sum_{mn} c_{mn} \varphi^{mn} + \sum_m \int b_m(a) \varphi_m(a) da \equiv \sum_{mn} c_{mn} \varphi_{mn} + \\ + \sum_{m, \delta a} b_m(a) \left[\frac{1}{\delta a} \int_a^{a+\delta a} \varphi_m(a) da \right] \delta a,$$

la sommation se rapportant au spectre discontinu de A (l'indice n servant à numéroter les valeurs propres correspondantes) et l'intégrale au spectre continu. Si l'opérateur A est complet, alors les c_{mn} et les $b_m(a)$ sont des constantes; dans le cas contraire, ces quantités sont des fonctions des variables x^i qui n'interviennent pas dans l'expression de l'opérateur A . Remarquons que si A est hermitique, les fonctions propres sont orthogonales. En effet, on déduit de $A\varphi^{mn} = a^n \varphi^{mn}$ la relation:

$$\int_D [\varphi_{mn} A^* (\varphi_{\mu\nu}^*) - \varphi_{\mu\nu}^* A (\varphi_{mn})] dv = (a_\nu - a_n) \int_D \varphi_{\mu\nu}^* \varphi_{mn} dv,$$

l'intégrale étant étendue à tout le domaine défini par les variables dont dépend A . L'orthogonalité :

$$\int \varphi_{\mu\nu}^* \varphi_{mn} dv = 0$$

de deux fonctions propres relatives à des valeurs propres différentes ($a^n \neq a^m$) résulte donc immédiatement de la relation précédente si A est hermitique. Pour des valeurs propres possédant plusieurs fonctions propres linéairement indépendantes on peut encore supposer l'orthogonalité si A est linéaire, car alors on peut former une combinaison linéaire à coefficients constants des φ_{mn} qui sera encore solution de $A\varphi_{mn} = a_n \varphi_{mn}$ et qui satisfera à la relation :

$$\int_D \varphi_{mn}^* \varphi_{pm} = 0 \quad \text{pour } p \neq m.$$

Grâce à l'orthogonalité des φ_{mn} et des «différentielles propres»

$$\frac{1}{\partial a} \int_a^{a+\delta a} \varphi_m(a) da, \quad \text{on a :}$$

$$c_{mn} = \frac{\int_D f \varphi_{mn}^* dv}{\int_D \varphi_{mn}^* \varphi_{mn} dv},$$

et :

$$b_m(a) = \frac{\int_D \left[\frac{1}{\partial a} \int_a^{a+\delta a} \varphi_m^*(a) da \right] f dv}{\int_D \frac{1}{\partial a} \left[\int_D \varphi_m^*(a) da \right] \left[\int_a^{a+\delta a} \varphi_m(a) da \right] dv},$$

relations qui se réduisent à :

$$c_{mn} = \int_D f \varphi_{mn}^* dv,$$

et

$$b_m(a) = \int_D \left[\frac{1}{\partial a} \int_a^{a+\delta a} \varphi_m^*(a) da \right] f dv,$$

si les φ_{mn} et les «différentielles propres» sont normalisées à l'unité. Comme les fonctions f et φ_{mn} sont des fonctions-contenus, on voit que les coefficients c_{mn} et $b_m(a)$ sont des nombres-contenus, si A est complet.

En plus de ces nombres-contenus, relatifs à une fonction-contenu f et à un opérateur complet A , on peut former par exemple les nombres-contenus suivants :

$$(76) \quad \bar{A}(f) = \int f^* A(f) dx,$$

Il est facile de voir que l'on a

$$A(f) = \sum_n a_n |c_n|^2,$$

En effet :

$$\int f^* A(f) dx = \int \sum c_y^* c_n (\varphi_y^* \varphi_n) a_n dx = \sum a_n |c_n|^2.$$

Appliquons maintenant un opérateur B à l'une des fonctions propres φ^{mn} d'un opérateur A et supposons que la fonction $B(\varphi^{mn})$ soit développable en série absolument et uniformément convergente suivant les φ^{mn} :

$$B(\varphi^{mn}) = \sum_{\mu\nu} (b_{mn})_{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}.$$

(Nous ne tenons pas compte du spectre continu). On déduit de la relation précédente :

$$(b_{mn})_{\mu\nu} = \int \varphi_{\mu\nu}^* B(\varphi^{mn}) dx.$$

Ces nombres $(b_{mn})_{\mu\nu}$ sont les éléments de la matrice engendrée par l'opérateur B dans le système des fonctions propres orthogonales de l'opérateur A . Comme les φ^{mn} sont des fonctions-contenus, les fonctions $B(\varphi^{mn})$ sont aussi des fonctions-contenus (si l'opérateur B ne fait pas intervenir des constantes arbitraires, ou, ce qui revient au même, si ces fonctions propres sont des fonctions-contenus). La matrice $(b_{mn})_{\mu\nu}$ est donc une «matrice contenu» de l'être mathématique non-arbitraire.

En résumé, de toute fonction-contenu f , associée à une paire d'opérateurs (A, B) hermitiques dont les fonctions propres sont des fonctions-contenus, nous avons déduit les nombres-contenus suivants :

$$a_n(A); \quad c_{mn}(A, f); \quad \bar{A}(f); \quad [b_{mn}]_{\mu\nu}(A, B).$$

Les nombres $A(f)$ les plus importants dans l'analyse de l'être mathématique non-arbitraire sont ceux qu'on obtient en prenant pour

f l'une des fonctions propres Ψ^{mn} de l'opérateur Δ ou Φ^{mn} de l'opérateur Δ_ω , pour A l'un des opérateurs $i\epsilon_0^i \gamma_n^u$ et en remplaçant dans (76) l'intégration par une sommation par rapport à l'indice m qui sert à numéroter les fonctions propres relatives à une même valeur propre (cet indice est en somme la seule variable sur laquelle agissent les opérateurs γ_n^u). Nous formons donc les quantités :

$$(77 a, b) \quad \bar{A}(\Psi^{mn}) = \Psi_{mn}^+ \gamma_n^u \Psi_n^m ; \quad \bar{A}(\Phi^{mn}) = \Phi_{mn}^+ \gamma_{nq}^u \Phi_n^m,$$

et l'on peut aussi envisager les quantités :

$$(78 a, b) \quad \bar{\bar{A}}(\Psi) = \Psi_{mn}^+ \gamma_n^u \Psi^{mn} ; \quad \bar{\bar{A}}(\Phi) = \Phi_{mn}^+ \gamma_{nq}^u \Phi^{mn},$$

avec sommation par rapport aux indices m et n . On peut ranger ces quantités en plusieurs catégories suivant leurs variances vis-à-vis d'un changement de coordonnées géodésiques locales ζ^i (pour les quantités (77, a) ou de coordonnées «géodésiques» q^i (pour les quantités (77, b). On a ainsi le tableau suivant :

$$(79) \left\{ \begin{array}{ll} M_n^{ik} = \frac{i}{2} \Psi_{mn}^+ (\epsilon_n^i \epsilon_n^k - \epsilon_n^k \epsilon_n^i) \Psi_n^m & ; \quad M^{ik} = \sum_n M_n^{ik} : \text{tenseurs} \\ & \text{antisymétriques du second ordre,} \\ V_n^i = \Psi_{mn}^+ \epsilon_n^i \Psi_n^m & ; \quad V^i = \sum_n V_n^i : \text{quadri-} \\ & \text{vecteurs,} \\ W_n^i = \Psi_{mn}^+ \epsilon_n^{i+1} \epsilon_n^{i+2} \epsilon_n^{i+3} \Psi_n^m & ; \quad W^i = \sum_n W_n^i : \text{tenseurs} \\ & \text{complètement antisymétriques du 3^{ième} ordre,} \\ (I_1)_n = \Psi_{mn}^+ \Psi_n^m & ; \quad I_1 = \sum_n (I_1)_n : \text{inva-} \\ & \text{riants (scalaires),} \\ (I_2)_n = \Psi_{mn}^+ \epsilon_n^1 \epsilon_n^2 \epsilon_n^3 \epsilon_n^4 \Psi_n^m & ; \quad I_2 = \sum_n (I_2)_n : \text{inva-} \\ & \text{riants (pseudo-scalaires),} \end{array} \right.$$

De même :

$$(80) \left\{ \begin{array}{ll} (M_\omega)_n^{ik} = \frac{i}{2} \Phi_{mn}^+ (\epsilon_{nq}^i \epsilon_{nq}^k - \epsilon_{nq}^k \epsilon_{nq}^i) \Phi_n^m & ; \quad M_\omega^{ik} = \sum_n (M_\omega)_n^{ik} : \text{tenseurs} \\ & \text{antisymétriques du second ordre,} \\ (V_\omega)_n^i = \Phi_{mn}^+ \epsilon_{nq}^i \Phi_n^m & ; \quad V_\omega^i = \sum_n (V_\omega)_n^i : \text{quadri-} \\ & \text{vecteurs,} \\ (W_\omega)_n^i = \Phi_{mn}^+ \epsilon_{nq}^{i+1} \epsilon_{nq}^{i+2} \epsilon_{nq}^{i+3} \Phi_n^m & ; \quad W_\omega^i = \sum_n (W_\omega)_n^i : \text{tenseurs} \\ & \text{complètement antisymétriques du 3^{ième} ordre,} \\ (I_1^\omega)_n = \Phi_{mn}^+ \Phi_n^m & ; \quad I_1^\omega = \sum_n (I_1^\omega)_n : \text{inva-} \\ & \text{riants (scalaires),} \\ (I_2^\omega)_n = \Phi_{mn}^+ \epsilon_{nq}^1 \epsilon_{nq}^2 \epsilon_{nq}^3 \epsilon_{nq}^4 \Phi_n^m & ; \quad I_2^\omega = \sum_n (I_2^\omega)_n : \text{inva-} \\ & \text{riants (pseudo-scalaires).} \end{array} \right.$$

Les vecteurs V_n^i , V^i , V_ω^i , $(V_\omega)_n^i$ sont conservatifs (divergence nulle). Par suite des équations (38) et (43) on voit en effet immédiatement que

$$(82) \quad \frac{\partial V_n^i}{\partial \varphi^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \bar{V}_n^i) = 0,$$

et :

$$(83) \quad \frac{\partial (V_\omega)_n^i}{\partial q^i} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^i} [\sqrt{\omega} (\bar{V}_\omega)_n^i] = 0.$$

D'autre part, on a :

$$(84) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial M_n^{ik}}{\partial \varphi^k} &= \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \bar{M}_n^{ik}) + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} i \\ k, j \end{matrix} \right\} \bar{M}_n^{kj} = \\ &= -i\sqrt{\alpha_n} V_n^i + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi^i} \Psi_n^m - \Psi_{mn}^+ \frac{\partial \Psi_n^m}{\partial \varphi^i} \right), \end{aligned}$$

et :

$$(85) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial (M_\omega)_n^{ik}}{\partial q^k} &= \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^k} [\sqrt{\omega} (\bar{M}_\omega)_n^{ik}] + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} i \\ k, j \end{matrix} \right\}_\Omega (\bar{M}_\omega)_n^{kj} = \\ &= -i\sqrt{\zeta_n} (V_\omega)_n^i + \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q^i} \Phi_n^m - \Phi_{mn}^+ \frac{\partial \Phi_n^m}{\partial q^i} \right), \end{aligned}$$

l'indice Ω rappelant que le symbole de Christoffel est formé avec les ω_{ik} de la forme métrique externe (7).

Il est important de calculer aussi la divergence des vecteurs W^i et W_ω^i . Pour W^i on trouve :

$$(86) \quad \frac{\partial W_n^i}{\partial \varphi^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \bar{W}_n^i) = -2\sqrt{\alpha_n} (I_2)_n,$$

et pour W_ω^i :

$$(87) \quad \frac{\partial (W_\omega)_n^i}{\partial q^i} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\omega} (\bar{W}_\omega)_n^i) = -2\sqrt{\zeta_n} (I_2)_n.$$

Finalement, désignons par B_n^{ik} un tenseur antisymétrique sans divergence satisfaisant à la condition :

$$(88) \quad B_n^{ijk} \equiv \frac{\partial B_n^{ij}}{\partial \varphi^k} + \frac{\partial B_n^{jk}}{\partial \varphi^i} + \frac{\partial B_n^{ki}}{\partial \varphi^j} = \frac{\partial M_n^{ij}}{\partial \varphi^k} + \frac{\partial M_n^{jk}}{\partial \varphi^i} + \frac{\partial M_n^{ki}}{\partial \varphi^j},$$

et par $(B_\omega)_n^{ik}$ un tenseur antisymétrique sans divergence satisfaisant à la condition :

$$(89) \quad (B_\omega)_n^{ijk} \equiv \frac{\partial (B_\omega)_n^{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial (B_\omega)_n^{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial (B_\omega)_n^{ki}}{\partial q^j} = \frac{\partial (M_\omega)_n^{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial (M_\omega)_n^{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial (M_\omega)_n^{ki}}{\partial q^j}.$$

On peut alors poser :

$$(90) \quad M_n^{ik} = \frac{\partial A_n^k}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial A_n^i}{\partial \varphi_k} + B_n^{ik}$$

A_n^k étant un vecteur, et :

$$(91) \quad (M_\omega)_n^{ik} = \frac{\partial (A_\omega)_n^k}{\partial q_i} - \frac{\partial (A_\omega)_n^i}{\partial q_k} + (B_\omega)_n^{ik}$$

$(A_\omega)_n^k$ étant un autre vecteur (par rapport à un changement des q^i).

Il va de soi que l'on peut assujettir A_n^i et $(A_\omega)_n^i$ aux conditions :

$$(92 \text{ a, b}) \quad \frac{\partial A_n^i}{\partial \varphi^i} = 0; \quad \frac{\partial (A_\omega)_n^i}{\partial q^i} = 0,$$

ce qui entraîne :

$$(93) \quad \square A_n^i = - \frac{\partial M_n^{ik}}{\partial \varphi^k},$$

et :

$$(94) \quad \square_\omega (A_\omega)_n^i = - \frac{\partial (M_\omega)_n^{ik}}{\partial q^k}.$$

Toutes ces relations sur les $\Psi_{mn}^+ \gamma_n^\mu \Psi^{mn}$ et les $\Phi_{mn}^+ \gamma_{nq}^\mu \Phi^{mn}$ nous seront indispensables plus tard dans l'interprétation physique de la théorie.

11. Solution approchée des équations de l'être mathématique non-arbitraire. Le système d'équations complet formé par la réunion des systèmes (19), (25) et (26) se compose de 56 équations indépendantes faisant intervenir 56 inconnues que nous avons appris à distinguer plus haut (§ 5). La solution de ce système de 56 équations aux dérivées partielles du second ordre (non linéaires) constitue un problème très difficile qui ne peut être attaqué de front actuellement. Il faut trouver des solutions approchées en utilisant la méthode des perturbations.

Nous partirons d'une solution de base des équations (19), (25) et (26), qui définit une hypersurface $F_0(X^1, X^2, X^3, X^4, X^5) = 0$ de l'espace E_5 pseudo-euclidien hyperbolique à cinq dimensions où le contenant de l'être mathématique non-arbitraire peut, d'après nos résultats précédents, être plongé. Nous admettrons ensuite que les écarts entre les valeurs des inconnues qui correspondent exactement à l'être mathématique non-arbitraire et les valeurs qui correspondent à la solution approchée sont, ou bien nulles, ou bien des quantités très petites dont on peut négliger les carrés et les produits. Désignons par G_{ik} et Ω_{ik} les coefficients de la forme métrique fondamentale et de la forme métrique externe de l'hypersurface de base $F_0(X^\mu) = 0$ à quatre dimen-

sions. Nous supposons que cette hypersurface (dont la métrique est hyperbolique normale d'après le théorème du § 7) admet un ds^2 de la forme suivante :

$$(95) \quad ds^2 = -d\tau^2 + \mathbf{P}^2(\tau) [d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\varphi^2 + \sin^2 \varphi d\mu^2)],$$

dans lequel le coefficient de \mathbf{P}^2 est à symétrie sphérique (les coordonnées angulaires orthogonales θ , φ , μ , ayant la signification habituelle). Les univers statique d'Einstein, ceux de De Sitter-Lanczos et de Lemaitre admettent tous des ds^2 qui sont des cas particuliers du ds^2 précédent. Pour qu'une telle hypersurface de base F_0 soit acceptable, il faut qu'elle satisfasse aux équations (19), (25) et (26) du problème. Remarquons que tous les R_{ik} pour $i \neq k$ sont nuls, par suite de la forme du ds^2 . Il en est évidemment de même des T_{ik}^0 correspondants. D'ailleurs, en conséquence de l'homogénéité du ds^2 et de la symétrie sphérique de sa partie elliptique, les T_{ik}^0 non nuls ne peuvent dépendre a priori que de τ et de θ , et nous admettrons (ce qui caractérisera la première approximation) *qu'ils ne dépendent que de τ* . Alors, comme les fonctions propres non arbitraires Ψ_{mn} du laplacien s'annulent nécessairement sur la frontière tridimensionnelle σ du contenant de l'être mathématique non arbitraire, et comme d'autre part nous savons (§ 3) que cet être doit posséder une telle frontière (c'est-à-dire qu'il ne peut avoir un contenant fermé), l'expression (44) montre que les contenus tensoriels T_{ik}^0 s'annulent aussi sur σ . Or, comme nous devons admettre que les T_{ik}^0 ne peuvent dépendre que de τ , on voit qu'en réalité ils doivent s'annuler en chaque point du contenant. Il ne reste donc, dans le système d'équations (19 a), que les deux inconnues $\mathbf{P}(\tau)$ et λ_g^0 . Dans ces conditions, si nous introduisons les R_{ik} formés avec les G_{ik} de (95) dans les équations (19 a), ces équations se réduisent à deux seules équations qu'on peut mettre sous la forme suivante, à la suite de quelques transformations simples :

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2 \mathbf{P}}{d\tau^2} = \frac{\lambda_g^0}{6} \mathbf{P}, \\ \left(\frac{d\mathbf{P}}{d\tau} \right)^2 = \frac{\lambda_g^0}{6} \mathbf{P}^2 - 1. \end{array} \right.$$

On en déduit immédiatement la solution suivante, en désignant par \mathbf{P}_0 la valeur de \mathbf{P} pour $\tau=0$ (valeur minima) :

$$(97) \quad \begin{array}{l} a) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}(\tau) = \mathbf{P}_0 \operatorname{ch} \left(\frac{\tau}{\mathbf{P}_0} \right), \\ b) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_g^0 = \frac{6}{\mathbf{P}_0^2}, \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$

ce qui montre qu'en première approximation le contenant de l'être mathématique non-arbitraire est un espace-temps de De Sitter-Lanczos. Un tel contenant a une courbure moyenne constante et satisfait aux conditions $\Omega_{ik} = \chi G_{ik}$, χ étant la courbure moyenne. On a d'ailleurs

ici $\chi = \frac{1}{P_0} = \sqrt{\frac{\lambda_g^0}{6}}$. D'autre part, les équations (19 b), où l'on pose $\Omega_{ik} = \chi G_{ik}$, c'est-à-dire : $S_{ik}^0 = R_{ik}^0$ et $S^0 = \frac{1}{\chi} R^0$, montrent que l'on a ici $U_{ik}^0 = 0$ et que $\lambda_\omega^0 = \lambda_g^0 / \chi$.

La solution (97) semble donner à λ_g^0 une valeur arbitraire puisqu'elle exprime cette constante en fonction de la constante arbitraire P_0 . Or, comme il est évident que l'intégration effective du système fondamental (19 a)+(19 b)+(24)+(25) ne peut déterminer complètement les inconnues que lorsqu'on a fixé préalablement l'unité de longueur dans l'espace pseudo-euclidien E_5 où l'être mathématique non-arbitraire doit être plongé, il est clair que la relation (97 b) ne doit pas être interprétée en disant que λ_g^0 est une constante arbitraire. Il faut dire, au contraire, que P_0 est une longueur caractéristique de l'être mathématique non-arbitraire, jouant le rôle d'unité naturelle de longueur déterminant la valeur numérique de λ_g^0 . Un changement de P_0 est donc en réalité un changement d'unité de longueur. Dans le cas général de l'intégration du système fondamental sans aucune hypothèse sur la forme du ds^2 , on doit aboutir évidemment à une relation généralisant la relation (97 b) et faisant intervenir aussi une longueur caractéristique, qui jouera le rôle d'unité naturelle de longueur.

Nous savons (§ 3) que le problème posé par le système d'équations (19)+(25)+(26) n'est bien défini que s'il existe une variété tridimensionnelle σ bornant le contenant de l'être mathématique non arbitraire. Nous devons donc limiter l'hypersurface de base F_0 , qui constitue la première approximation dans la solution du système fondamental, par une variété tridimensionnelle σ_0 . D'après les résultats du § 7 cette variété doit d'ailleurs être un lieu de lignes coordonnées « temporelles », et comme la partie elliptique du ds^2 (95) est à symétrie sphérique, nous devons prendre ici une variété frontière ayant pour équation $\theta = \text{const} = \theta_0$. Pour définir complètement notre première approximation il nous reste donc à déterminer la valeur qu'il convient d'adopter pour cette constante θ_0 . Considérons la section de F_0 par l'hyperplan $\tau = 0$. La variété σ_0 limite cette section (Σ_0^0) par une surface sphérique enfermant un volume v_0 qui, ajouté à Σ_0^0 , forme un espace tridimensionnel sphérique fermé dont le rayon est P_0 et dont le volume est $2\pi^2 P_0^3$. En

désignant par δ_0 le diamètre de v_0 , on a $\delta_0 = 2\mathbf{P}_0\theta_0$, l'origine des θ étant le centre de v_0 . Pour les raisons que nous indiquerons plus loin (Chap. III, § 8) on doit poser $\delta_0 = \delta_m$, δ_m étant la plus petite longueur dont la mesure ait un sens. L'espace Σ_0^0 , tout en étant géométriquement ouvert, est donc «physiquement» fermé et illimité, en ce sens qu'aucune mesure ou observation ne pourrait déceler l'existence d'une frontière de Σ_0^0 .

Pour trouver une solution plus approchée des équations de l'être mathématique non arbitraire, nous allons placer en chaque point de l'hypersurface de base F_0 un quadripode géodésique ρ^i orienté tangentiellement aux lignes coordonnées orthogonales $\theta, \varphi, \mu, \tau$ de F_0 . Désignons par $(G_\rho)_{ik}$ les coefficients métriques relatifs à ces quadripodes, c'est-à-dire $(G_\rho)_{ik} = \delta_{ik}$ et considérons la différence entre l'hypersurface F qui correspond à l'être mathématique non-arbitraire et l'hypersurface de base F_0 . D'après les hypothèses caractéristiques de la méthode des perturbations, cette différence peut être considérée comme une déformation infiniment petite de F_0 , à la suite de laquelle les coordonnées $\theta, \varphi, \mu, \tau$ de F_0 se déforment et deviennent des coordonnées générales x^i (que nous avons appelées «coordonnées intrinsèques» dans le § 3). En même temps les quadripodes des ρ^i se déforment aussi et deviennent tangents aux lignes coordonnées x^i , de sorte qu'en désignant par \bar{g}_{ik} les coefficients de la forme métrique interne de F écrite en coordonnées locales ρ^i déformées (que nous désignerons par $\bar{\rho}^i$), on peut poser :

$$(98) \quad \bar{g}_{ik} = \delta_{ik} + \gamma_{ik}; \quad ds^2 = (\delta_{ik} + \gamma_{ik}) d\bar{\rho}^i d\bar{\rho}^k,$$

les γ_{ik} étant des quantités infiniment petites par rapport aux $(G_\rho)_{ik}$. Les g_{ik} de la forme métrique interne de F écrite en coordonnées générales x^i seront donc donnés par la transformation :

$$(99) \quad g_{ik} = g_{jl} \frac{\partial \bar{\rho}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{\rho}^l}{\partial x^k},$$

et l'on a :

$$(100) \quad \frac{\partial \bar{\rho}^j}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho^j}{\partial \theta^i},$$

θ^i étant celle des coordonnées $\theta, \varphi, \mu, \tau$ qui devient x^i à la suite de la déformation de F_0 . Il va de soi que l'on peut aussi considérer sur F des coordonnées $\theta, \varphi, \mu, \tau$ intersections des hypersurfaces $\theta, \varphi, \mu, \tau$ de E_3 avec F . Nous désignerons par \bar{G}_{ik} les coefficients métriques de F

relatifs à ces coordonnées, c'est-à-dire :

$$(101) \quad \bar{G}_{ik} = g_{jl} \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^l}{\partial \theta^k}.$$

En posant $R_{ik} = R_{ik}^0 + R'_{ik}$, R_{ik}^0 étant les composantes du tenseur de Ricci-Einstein pour F_0 , le système (19 a) se scinde en deux systèmes qu'on peut écrire comme suit, grâce à (98) :

$$(102) \quad R_{ik}^0 - \frac{1}{2} (R^0 + \lambda_g^0) \delta_{ik} = 0$$

(ce système est équivalent aux équations (96) déjà étudiées), et :

$$(103) \quad R'_{ik} - \frac{1}{2} [(R^0 + \lambda_g^0) \gamma_{ik} + (R' + \lambda'_g) \delta_{ik}] = \alpha_g T_{ik},$$

λ'_g étant la perturbation de λ_g^0 qui correspond à la déformation de F_0 . En tenant compte de (98) et de (21) ce système se transforme facilement par un calcul bien connu en Relativité et devient

$$(104) \quad \square_0 \gamma_{ik} = 2\alpha_g (T_{ik} - \frac{1}{2} \delta_{ik} T) - \lambda'_g \delta_{ik} - \lambda_g \gamma_{ik},$$

\square_0 étant l'opérateur dalembertien attaché à la forme métrique interne de F_0 .

Considérons maintenant les quadripodes « géodésiques » des q^i (forme métrique externe) et orientons—les aussi, en chaque point de F_0 , tangentiellement aux lignes coordonnées $\theta, \varphi, \mu, \tau$. On sait que l'on a : $\Omega_{ik} = \chi G_{ik}$, de sorte qu'après la déformation infiniment petite de F_0 on peut poser :

$$(105) \quad \bar{\omega}_{ik} = \chi \delta_{ik} + \omega'_{ik}; \quad d\Omega^2 = (\chi \delta_{ik} + \omega'_{ik}) d\bar{\varphi}^i d\bar{\varphi}^k,$$

les ω'_{ik} étant des quantités infiniment petites par rapport aux $\chi \delta_{ik}$. Les ω_{ik} de la forme métrique externe de F écrite en coordonnées générales x^i seront donc donnés par la transformation :

$$(106) \quad \omega_{ik} = \omega_{jl} \frac{\partial \bar{\varphi}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{\varphi}^l}{\partial x^k}$$

et l'on a :

$$(107) \quad \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial x^i} = \frac{\partial q^j}{\partial \theta^i}.$$

De même, en désignant par $\bar{\Omega}_{ik}$ les coefficients métriques externes de F relatifs aux coordonnées $\theta, \varphi, \mu, \tau$, on aura :

$$(108) \quad \bar{\Omega}_{ik} = \omega_{ji} \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^l}{\partial \theta^k}.$$

En posant $S_{ik} = S_{ik}^0 + S'_{ik}$, S_{ik}^0 étant les composantes du tenseur de Ricci-Einstein associé à la forme métrique externe de F_0 , le système (19b) se scinde, comme (19a), en deux systèmes qu'on peut écrire comme suit :

$$(109) \quad S_{ik}^0 - \frac{1}{2} (S^0 + \lambda_\omega^0) \chi \delta_{ik} = 0,$$

et :

$$(110) \quad S'_{ik} - \frac{1}{2} [(S^0 + \lambda_\omega^0) \omega'_{ik} + (S' + \lambda'_\omega) \chi \delta_{ik}] = \lambda_\omega U_{ik}$$

λ'_ω étant la perturbation de λ_ω^0 qui correspond à la déformation de F_0 . Ce dernier système se transforme facilement et prend la forme :

$$(111) \quad \square_\omega^0 \omega'_{ik} = 2\chi \lambda_\omega (U_{ik} - \frac{\chi}{2} \delta_{ik} U) - \lambda'_\omega \chi \delta_{ik} - \lambda_\omega \chi \omega'_{ik}$$

\square_ω^0 étant l'opérateur dalembertien attaché à la forme métrique externe de F_0 .

Aux équations (104) et (111) il faut naturellement ajouter les équations de Gauss et de Codazzi. En tenant compte de (98) et de (105) ainsi que du fait que les ω'_{ik} sont ici des infiniment petits, les équations de Gauss donnent :

$$(112) \quad R'_{ijk} = \chi \delta_{ij} \omega'_{ik} + \chi \delta_{ik} \omega'_{ij} - \chi \delta_{ik} \omega'_{ij} - \chi \delta_{ij} \omega'_{ik},$$

avec :

$$R'_{ijk} \equiv R_{ijk} - R^0_{ijk}.$$

De même, les équations de Codazzi donnent :

$$(113) \quad \frac{\partial \omega'_{ij}}{\partial \varphi^k} - \frac{\partial \omega'_{ik}}{\partial \varphi^j} + \chi \delta_{ik} \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}_{\bar{\varphi}} - \chi \delta_{ij} \left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\}_{\bar{\varphi}} = 0,$$

avec :

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\}_{\bar{\varphi}} = \frac{1}{2} \delta^{lu} \left(\frac{\partial \gamma_{kh}}{\partial \varphi^i} + \frac{\partial \gamma_{ih}}{\partial \varphi^k} - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial \varphi^h} \right).$$

Le système (104)+(111)+(112)+(113) est un système complet de 56 équations à 56 inconnues. Les solutions non-arbitraires de ce système

sont évidemment les seules qui nous intéressent, de sorte que l'on a nécessairement les conditions aux limites suivantes :

$$u=0; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

n étant la normale à la frontière σ du contenant de l'être mathématique non-arbitraire et u l'une quelconque des 40 inconnues γ_{ik} , ω'_{ik} , T_{ik} et U_{ik} .

Les équations (104) et (111) permettent d'exprimer les γ_{ik} et les ω'_{ik} en fonction des T_{ik} et des U_{ik} , ce qui élimine 20 inconnues. En introduisant ces expressions des γ_{ik} et des ω'_{ik} dans les 20 équations de Gauss, celles-ci déterminent les 20 inconnues T_{ik} et U_{ik} sous la forme :

$$\left. \begin{matrix} T_{ik} \\ U_{ik} \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} T_{ik} \\ U_{ik} \end{matrix} \right\} (\theta^u, \sigma, x_0^i, \gamma'_g, \gamma'_\omega, z_g, z_\omega).$$

Finalement, ces expressions des T_{ik} et des U_{ik} , introduites dans les solutions de (104) et de (111), transforment les 16 équations de Codazzi, écrites en coordonnées θ^u , en équations aux dérivées partielles

pour les 16 inconnues $x^i(\theta^u)$, $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta^i}$, x_0^i , γ'_g , γ'_ω , z_g et z_ω . Quatre

des équations de Codazzi, par suite de (108), sont des équations aux dérivées partielles du second ordre déterminant les quatre inconnues $x^i(\theta^u)$, les valeurs aux limites (sur σ) de ces inconnues pouvant d'ail-

leurs être exprimées en fonction des inconnues x_0^i et $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta^i}$, de même que

les valeurs des dérivées normales $\frac{\partial x^i}{\partial n}$ sur σ . La détermination des

$x^i(\theta^u)$ est indispensable parce que la connaissance des γ_{ik} et des ω'_{ik} ne détermine l'hypersurface F de E_5 à un déplacement et à une symétrie près que si l'on connaît aussi les fonctions $x^i(\theta^u)$, puisque les dz^i ne

sont pas intégrables. Ces fonctions $x^i(\theta^u, \frac{\partial \sigma}{\partial \theta^i}, x_0^i, \gamma'_g, \gamma'_\omega, z_g, z_\omega)$, intro-

duites dans quatre autres équations de Codazzi, déterminent alors les

quatre inconnues $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta^i}$, et les autres huit équations de Codazzi donnent

les valeurs qu'il faut attribuer aux huit constantes γ'_g , γ'_ω , z_g , z_ω et x_0^i pour qu'elles soient satisfaites.

Remarques. 1^o. Il est intéressant de remarquer que les équations (104) et (111) deviennent des équations de Laplace-Poisson quand on

peut négliger les variations des γ_{ik} et des ω'_{ik} avec τ ainsi que les termes en λ' et λ . Dans les mêmes conditions leurs solutions deviennent naturellement des «potentiels newtoniens», et des «potentiels newtoniens» attachés à la forme métrique externe de F .

2^o). Quand on a fait la détermination préalable des fonctions propres non-arbitraires des opérateurs \square_0 et \square_ω^0 attachés à F_0 (nous ferons cette détermination dans le § suivant), les inconnues T_{ik} et U_{ik} sont données aussi par les expressions (44) et (55).

3^o). Les calculs de ce § montrent la voie à suivre dans les essais d'intégration du système fondamental (19 a)+(19 b)+(25)+(26) sans aucune hypothèse restrictive sur les inconnues. On peut partir encore de la même hypersurface de base F_0 que précédemment et l'on écrira aussi les relations (98) et (105), mais les γ_{ik} et les ω'_{ik} ne seront plus des quantités infiniment petites par rapport aux quantités correspondantes de F_0 . Les coordonnées $\theta, \varphi, \mu, \tau$ de F_0 définissent encore des coordonnées θ^i dans E_5 et sur F et les systèmes (102) et (109) restent évidemment inchangés. Par contre, il faut remplacer les systèmes (103) et (110) respectivement par :

$$(114) \quad R'_{ik} - \frac{1}{2} [(R^0 + \lambda_g^0) \gamma_{ik} + (R' + \lambda'_g) (\partial_{ik} + \gamma_{ik})] = \alpha_g T_{ik},$$

et :

$$(115) \quad S'_{ik} - \frac{1}{2} [(S^0 + \lambda_\omega^0) \omega'_{ik} + (S' + \lambda'_\omega) (\chi \partial_{ik} + \omega'_{ik})] = \alpha_\omega U_{ik},$$

12. Le spectre et les fonctions propres des opérateurs \square_0 et \square_ω^0 . Le calcul du spectre des opérateurs laplaciens \square et \square_ω dans le cas général, plus exactement la détermination des valeurs des α et des β pour lesquelles les équations (45) et (48) possèdent quatre solutions non-arbitraires et linéairement indépendantes est très difficile quand on ne fait aucune hypothèse simplificatrice sur le contenant de l'être mathématique non-arbitraire. Bien que la véritable solution du problème posé par l'analyse de l'être mathématique non-arbitraire ne puisse être atteinte, par suite de la nature même de la question, dès que l'on introduit des hypothèses simplificatrices arbitraires, il est cependant très important dans l'interprétation physique que nous ferons plus tard des résultats de cette première partie du mémoire, de déterminer le spectre et les fonctions propres des opérateurs \square et \square_ω comme si le contenant de l'être mathématique non-arbitraire était une hypersurface à métrique et forme simples, ou bien, ce qui revient au même, comme si

ce contenant pouvait être approché par une hypersurface simple (point de vue du problème cosmologique de la Relativité).

Nous avons vu, dans le § précédent, que l'être mathématique non-arbitraire est, *en première approximation*, un espace-temps de De Sitter-Lanzos, que nous avons désigné par F_0 . Cherchons donc le spectre et les fonctions propres des opérateurs laplaciens \square et \square_ω attachés à F_0 , plus exactement cherchons les valeurs des α et des β pour lesquelles les équations :

$$(116) \quad \square_0 \Psi_{mn} = \alpha_n \Psi_{mn},$$

et :

$$(117) \quad \square_\omega^0 \Phi_{mn} = \beta_n \Phi_{mn},$$

ont quatre solutions non-arbitraires linéairement indépendantes.

Par suite de la symétrie sphérique des sections \sum_0 de F_0 par les hyperplans $\tau = \text{Const.}$, il faut chercher des solutions de (116) qui ne dépendent que de θ et de τ . En posant $\xi = \frac{\tau}{P_0}$, cette équation devient :

$$(118) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + 2 \cotg \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - (ch^2 \xi) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - 3 (sh \xi) (ch \xi) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \alpha P_0^2 (ch^2 \xi) \Psi$$

par suite des valeurs des G_{ik} de (95) et de la forme de la fonction $\mathbf{P}(\tau)$. Comme on a ici les conditions (61) et (62), c'est-à-dire :

$$G_{44} = -1; \quad G_{ik} = \mathbf{P}^2(\tau) n_{ik}(\theta, \varphi, \mu) \quad \text{pour } i, k = 1, 2, 3,$$

on doit chercher des solutions de la forme :

$$(119) \quad \Psi_n = \sum_l u_n^{(l)}(\tau) v_l(\theta).$$

Le second membre de (118) peut être écrit sous la forme :

$$- P_0^2 \sum_l k_l u_n^{(l)} v_l + \alpha P_0^2 (ch^2 \xi) \Psi + P_0^2 \sum_l k_l u_n^{(l)} v_l$$

de sorte qu'on obtient pour les $v_l(\theta)$ l'équation différentielle :

$$(120) \quad \frac{d^2 v_l}{d\theta^2} + 2 \cotg \theta \frac{dv_l}{d\theta} = - P_0^2 k_l v_l$$

qui est un cas particulier de l'équation aux dérivées partielles (65) du § 7. D'autre part, les $u_n^{(l)}(\tau)$ seront les solutions des équations :

$$(121) \quad \frac{d^2 u_n^{(l)}}{d\xi^2} + 3 th \xi \frac{du_n^{(l)}}{d\xi} = - P_0^2 \frac{k_n ch^2 \xi + k_l}{ch^2 \xi} u_n^{(l)}.$$

Il est nécessaire d'assujettir les $v_l(\theta)$ à la condition aux limites $v_l(\theta)=0$ sur σ_0 . Nous savons, d'après les résultats du § 11, que l'équation de cette frontière est $\theta=\theta_0$, ou bien: $\theta=\delta_0/2\mathbf{P}_0$, de sorte que la condition aux limites s'écrit: $v_l(\theta)=0$ pour $\theta=\theta_0$. Dans le voisinage de l'origine, l'équation (120) est une équation de Bessel:

$$\frac{d^2 v_l}{d\theta^2} + \frac{2}{\theta} \frac{dv_l}{d\theta} = -\mathbf{P}_0^2 k_l v_l$$

dont les solutions bornées non-arbitraires ont la forme:

$$v_l(\theta) = \frac{1}{\theta} \sin(\mathbf{P}_0 \sqrt{k_l} \theta).$$

Les solutions bornées non-arbitraires de (120) sont donc:

$$v_l(\theta) = \frac{w_l(\theta)}{\theta} \sin(\mathbf{P}_0 \sqrt{k_l} \theta)$$

les $w_l(\theta)$ étant des fonctions bornées qui satisfont à la condition $w_l(0)=1$ et que l'on détermine facilement par (120) sous forme d'un développement: $w_l = \sum b_\nu \theta^\nu$. De plus, on doit avoir évidemment:

$$(122) \quad \sqrt{k_l} = \frac{\pi l}{\mathbf{P}_0 \theta_0} \quad (l=1, 2, 3, \dots, \infty)$$

pour que la condition aux limites $v_l(\theta_0)=0$ soit satisfaite.

Les équations (121) ont deux solutions bornées non-arbitraires et linéairement indépendantes pour des valeurs données des indices n et l . En tenant compte de $9-4\mathbf{P}_0^2 k_n < 0$, ainsi que de la condition générale:

$$(123) \quad \alpha_n \Psi_{mn} \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty$$

conséquence de (116) et de (122), on voit immédiatement que les formes asymptotiques (pour $\tau \rightarrow +\infty$ et pour $\tau \rightarrow -\infty$) de ces solutions sont les suivantes:

pour $\tau \rightarrow +\infty$:

$$u_n^{(1)} = \frac{1}{n^3} e^{-\frac{3\tau}{2\mathbf{P}_0}} \sin\left(\frac{\tau}{2\mathbf{P}_0} \sqrt{4\mathbf{P}_0^2 k_n - 9}\right); \quad u_n^{(2)} = \frac{1}{n^3} e^{-\frac{3\tau}{2\mathbf{P}_0}} \cos\left(\frac{\tau}{2\mathbf{P}_0} \sqrt{4\mathbf{P}_0^2 k_n - 9}\right),$$

pour $\tau \rightarrow -\infty$:

$$u_n^{(1)} = \frac{1}{n^3} e^{\frac{3\tau}{2P_0}} \sin\left(\frac{\tau}{2P_0} \sqrt{4P_0^2 k_n - 9}\right); \quad u_n^{(2)} = \frac{1}{n^3} e^{\frac{3\tau}{2P_0}} \cos\left(\frac{\tau}{2P_0} \sqrt{4P_0^2 k_n - 9}\right).$$

D'autre part, dans le voisinage de l'origine ($\tau=0$) l'équation (121) prend la forme :

$$\frac{d^2 u_n^{(l)}}{d\xi^2} + 3\xi \frac{du_n^{(l)}}{d\xi} = -P_0^2 (k_n + k_l) u_n^{(l)},$$

et ses deux solutions bornées, non-arbitraires et linéairement indépendantes sont les deux séries :

$$u_n^{(1)} = \frac{1}{n^3} \sum_0^\infty (a_{\nu})_n^{(1)} \frac{\tau^\nu}{P_0^\nu}; \quad u_n^{(2)} = \frac{1}{n^3} \sum_0^\infty (a_{\nu})_n^{(2)} \frac{\tau^\nu}{P_0^\nu},$$

avec :

$$a_{\nu+2} = -\frac{P_0^2 (k_n + k_l) + 3\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} a_\nu$$

et les conditions :

$$\begin{cases} (a_0)_n^{(1)} = 0, & (a_0)_n^{(2)} = 1, \\ (a_1)_n^{(1)} = P_0 \sqrt{k_n + k_l}, & (a_1)_n^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Nous avons d'après (68) les expressions suivantes des quatre fonctions propres linéairement indépendantes et non-arbitraires du laplacien attaché à l'hypersurface de base F_0 et qui correspondent à chaque valeur propre (positive) de l'opérateur $-\Delta_3^0$:

$$(124) \quad \begin{cases} \Psi_{1n} = \sum_l u_n^{(1)}(\tau) \frac{w_l(\theta)}{\theta} \sin(P_0 \sqrt{k_l} \theta); & \Psi_{2n} = \sum_l u_n^{(2)}(\tau) \frac{w_l(\theta)}{\theta} \sin(P_0 \sqrt{k_l} \theta) \\ \Psi_{3n} = u_n^{(n1)}(\tau) \frac{w_n(\theta)}{\theta} \sin(P_0 \sqrt{k_n} \theta); & \Psi_{4n} = u_n^{(n2)}(\tau) \frac{w_n(\theta)}{\theta} \sin(P_0 \sqrt{k_n} \theta). \end{cases}$$

Les valeurs propres α_n du laplacien qui correspondent à ces fonctions propres, se déduisent de (122) et sont évidemment données par la relation :

$$(125) \quad \alpha_n = \frac{4\pi^2 n^2}{\delta_0^2} \quad (n=1, 2, \dots, \infty)$$

(avec $\delta_0 = 2P_0 \theta_0$), puisque $\alpha_l \equiv k_l$.

La détermination des valeurs et fonctions propres (β_n et Φ_{mn}) de l'opérateur \square_ω^0 est maintenant immédiate. En effet, par suite des rela-

tions $\Omega_{ik} = \chi G_{ik}$, qui sont valables pour F_0 , on a évidemment :

$$(126) \quad \Phi_{mn} = \Psi_{mn}$$

et :

$$(127) \quad \beta_n = \frac{1}{\chi} \alpha_n = P_0 \alpha_n = \sqrt{\frac{6}{\lambda_g^0}} \alpha_n = \frac{\lambda_{\omega}^0}{\lambda_g^0} \alpha_n.$$

Nous ferons plus loin (Chap. III, § 8) d'importantes applications de ces relations dans l'interprétation physique de la théorie.

III — LE PROBLÈME COSMOLOGIQUE GÉNÉRALISÉ

1. Nature du problème. D'après le principe fondamental posé dès le début de ce travail et selon lequel il y a identité entre l'être mathématique non-arbitraire et l'Univers physique, il y a aussi identité entre le problème cosmologique généralisé et le problème de l'intégration complète et effective du système d'équations (19)+(25)+(26). La solution rigoureuse de ce système donnerait donc immédiatement la métrique, la forme, l'équation de la surface frontière et les coordonnées normales du contenant de l'Univers, de même que les fonctions-contenus tensorielles T_{ik} et U_{ik} et les valeurs des constantes absolues α_{ω} , λ_{ω} , α_g et λ_g . D'autre part, la solution approchée de système (19)+(25)++(26) que nous avons développée dans II, § 11 est aussi une solution approchée du problème cosmologique généralisé.

Indépendamment de la recherche de la solution du système fondamental (19)+(25)+(26), le problème cosmologique généralisé comporte aussi, bien entendu, l'importante question de l'interprétation physique des différentes grandeurs qui interviennent dans les équations (19)++(25)+(26) et qui ne sont pas de nature manifestement géométrique comme les g_{ik} et les ω_{ik} , de même que l'interprétation physique des autres résultats de l'analyse de l'être mathématique non-arbitraire. Il faut cependant souligner que cette interprétation, malgré son importance évidente, est une question en quelque sorte accessoire vis-à-vis de l'intégration du système (19)+(25)+(26) et dont à la rigueur une théorie cosmologique pourrait se passer.

Nous commencerons naturellement par l'interprétation physique des équations (19 a) et (19 b), mais tout d'abord il faut indiquer, d'après le principe de l'identité de l'existence mathématique non-arbitraire et de l'existence physique, les équivalents cosmologiques de quelques propriétés générales de l'être mathématique non-arbitraire :

II, § 3: Le contenant de l'Univers est un espace de Riemann à quatre dimensions et de classe un.

II, §§ 7 et 8: La métrique du contenant de l'Univers est hyperbolique normale. En d'autres termes: ce contenant est un espace-temps (trois dimensions spatiales et une dimension temporelle). La métrique externe du contenant est aussi hyperbolique normale.

La frontière de l'espace-temps est un lieu de lignes coordonnées temporelles orthogonales à des variétés spatiales (tridimensionnelles à métrique interne et externe elliptique) de cet espace-temps.

L'espace-temps est illimité dans les deux sens le long des lignes coordonnées temporelles.

II, § 11: L'espace-temps réel est, en première approximation, un espace-temps de De Sitter-Lanzos à courbure moyenne constante.

2. Gravitation et « matière ». L'interprétation physique du système (19 a) ne peut faire aucun doute si on le compare au système des équations d'Einstein du champ de gravitation. La forme des équations d'Einstein est en effet la même que celle des équations (19 a). Il y a cependant entre les équations d'Einstein et les équations (19 a) une différence essentielle: c'est que dans les premières les composantes du tenseur T_{ik} d'énergie-quantité de mouvement doivent être considérées comme des données à priori du problème cosmologique parce que les équations d'Einstein ne forment pas un système complet, en ce sens qu'elles ne permettent pas de déterminer la métrique et la forme du contenant de l'Univers ainsi que son contenu T_{ik} . Par contre, dans nos équations (19 a), qui ne sont qu'une partie du système complet (19 a) + (19 b) + (25) + (26), les composantes du tenseur T_{ik} peuvent et doivent être considérées comme des inconnues du problème, au même titre que les g_{ik} et les ω_{ik} . Cependant, l'interprétation physique du système (19 a) est évidente. Le tenseur T_{ik} qui figure dans ces équations est forcément le tenseur d'énergie-quantité de mouvement, tandis que les g_{ik} déterminent, comme en Relativité générale, le champ de gravitation. De même, la constante κ_g ne peut être que la constante de la gravitation et λ_g la constante cosmologique d'Einstein. Leurs valeurs ne sont pas arbitraires et résultent de l'intégration des équations (19 a, b) + (25) + (26).

Nous ne développerons pas ici les conséquences des équations (19 a) qu'on trouve dans tout traité sur la Relativité générale. Nous nous bornerons à remarquer que les relations de conservation:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0,$$

auxquelles satisfait le tenseur d'énergie-quantité de mouvement, expriment d'une part la conservation de l'énergie (en posant $i=4$ dans les relations précédentes) et d'autre part la conservation de la quantité de mouvement (Impulsion) (en posant $i=1, 2, 3$) Nous savons d'ailleurs (II, § 6) que le tenseur d'énergie-quantité de mouvement peut être exprimé en fonction de certaines fonctions-contenus de base Ψ_{mn} qui sont les fonctions propres de l'opérateur laplacien. On peut donc soupçonner qu'il doit y avoir un rapport étroit entre les valeurs propres α_n de cet opérateur et l'énergie. Pour préciser ce rapport, considérons la contribution des fonctions propres d'indice n (relatives à la valeur propre α_n du laplacien) à la somme des composantes diagonales de T_{ik} :

$$\frac{1}{2} \sum_j^4 T_{jj} = \Psi_{mn}^+ \epsilon_n^j \frac{\partial \Psi_n^m}{\partial \varphi^j} - \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi^j} \epsilon_n^j \Psi_n^m,$$

ce qui peut s'écrire comme suit, grâce aux équations (38) et (43):

$$\frac{1}{2} \sum_j^4 T_{jj} = -\sqrt{\alpha_n} (I_1)_n,$$

$(I_1)_n$ étant l'invariant défini dans le tableau (79). Étant donnée la signification de $\sum T^{ij}$ on voit que $-\sqrt{\alpha_n} (I_1)_n$ est la contribution de la valeur propre α_n du laplacien à la densité d'énergie en un point de l'Univers. Nous verrons d'ailleurs plus tard que les $\sqrt{\alpha_n}$ sont (à un facteur constant près que nous apprendrons à déterminer) les masses propres cosmologiques des corpuscules élémentaires de l'Univers.

Considérons maintenant les vecteurs V_n^i définis aussi dans le tableau (79). On sait que ces vecteurs sont conservatifs:

$$\frac{\partial V_n^i}{\partial \varphi^i} = 0.$$

Comme nous avons déjà une relation de conservation pour l'énergie, il faut interpréter la relation précédente en disant qu'elle est une équation de continuité généralisée, de sorte que $\sqrt{\alpha_n} V_n^i$ est la contribution de la valeur propre α_n du laplacien au courant de «masse cosmologique» (cf. les résultats du § 8 de ce Chapitre).

Pour trouver aussi la signification physique du vecteur W_n^i , remarquons que l'on a:

$$\frac{\partial W_n^i}{\partial \varphi^i} = -2\sqrt{\alpha_n} (I_2)_n.$$

Cette relation est analogue (en coordonnées φ^i) à la relation d'Uhlenbeck et Laporte sur la divergence du vecteur densité de spin dans la mécanique de Dirac. On doit donc interpréter W_n^i comme la contribution de la valeur propre α_n du laplacien au vecteur spin généralisé $W_i = \sum_n W_n^i$ et la fonction $-2\sqrt{\alpha_n}(I_2)_n$ est donc la contribution de α_n à l'intensité des sources du vecteur spin généralisé.

En ce qui concerne le tenseur antisymétrique M_n^{ik} , nous lui accordons la signification d'un tenseur des moments de «rotation» et de «translation»¹ et en déduisons deux vecteurs d'espace $\vec{\pi}_n$ et $\vec{\mu}_n$ en posant:

$$(128) \quad \begin{cases} \pi_n^1 = \frac{1}{2} M_n^{23}; & \pi_n^2 = \frac{1}{2} M_n^{31}; & \pi_n^3 = \frac{1}{2} M_n^{12}, \\ \mu_n^1 = \frac{1}{2} M_n^{14}; & \mu_n^2 = \frac{1}{2} M_n^{24}; & \mu_n^3 = \frac{1}{2} M_n^{34}. \end{cases}$$

Affectons d'un indice s les opérateurs d'espace, désignons par une flèche les vecteurs d'espace et posons :

$$(129) \quad \begin{cases} P_n^k = \frac{i}{2} \left(\frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi^k} \Psi_n^m - \Psi_{mn}^+ \frac{\partial \Psi_n^m}{\partial \varphi^k} \right) \\ \vec{\Lambda}_n = B_n^{231} \vec{u}^1 + B_n^{314} \vec{u}^2 + B_n^{124} \vec{u}^3; & \Lambda_n^4 = B_n^{123} \end{cases}$$

$\vec{u}^1, \vec{u}^2, \vec{u}^3$ étant les vecteurs unitaires des axes $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$. Les relations (84) et (88) s'écrivent alors comme suit:

$$(130) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{\mu}_n}{\partial \varphi^4} - \text{rot}_s \vec{\pi}_n = i\sqrt{\alpha_n} \vec{V}_n - \vec{P}_n; & \text{div}_s \vec{\mu}_n = i\sqrt{\alpha_n} V_n^4 - P_n^4, \\ \frac{\partial \vec{\pi}_n}{\partial \varphi^4} + \text{rot}_s \vec{\mu}_n = \vec{\Lambda}_n; & \text{div}_s \vec{\pi}_n = \Lambda_n^4, \end{cases}$$

et les relations (90) prennent la forme :

$$(131) \quad \begin{cases} \vec{\mu}_n = \text{grad}_s A_n^4 - \frac{\partial \vec{A}_n}{\partial \varphi^4} + \vec{B}_n^4 \\ \vec{\pi}_n = \text{rot}_s \vec{A}_n + \vec{B}_n \end{cases}$$

avec :

$$(132) \quad \begin{cases} \vec{B}_n = B_n^{23} \vec{u}^1 + B_n^{31} \vec{u}^2 + B_n^{12} \vec{u}^3 \\ \vec{B}_n^4 = B_n^{14} \vec{u}^1 + B_n^{24} \vec{u}^2 + B_n^{34} \vec{u}^3 \end{cases}$$

¹ On peut aussi interpréter M_n^{ik} comme étant les tenseurs du «champ mésique» (forces nucléaires). Nous développerons de point ce vue dans un travail en préparation.

Il va de soi que l'on peut assujettir le vecteur d'Univers A_n^i (vecteur «potentiel des moments») à la condition (92 a) qui s'écrit avec les notations actuelles :

$$(133) \quad \frac{\partial A_n^i}{\partial \varphi^i} + \operatorname{div}_s \vec{A}_n = 0,$$

et l'on a aussi la relation (93).

Le système (130)+(131)+(133) est formellement égal au système des équations électromagnétiques pour un milieu diélectrique, mais il est essentiel de remarquer que toutes les grandeurs qui interviennent dans ces équations (130), (131) et (133) sont formées avec les fonctions propres de l'opérateur laplacien dont les valeurs propres sont, comme nous le montrerons plus loin, les masses propres des corpuscules élémentaires de l'Univers. Le véritable système d'équations électromagnétiques doit donc être formé avec d'autres fonctions-contenus de l'être mathématique non-arbitraire.

3. Le champ électromagnétique. Pour les raisons que nous indiquerons un peu plus loin, nous interprétons le tenseur symétrique qui figure aux seconds membres des équations (19 b) comme étant un tenseur d'énergie-quantité de mouvement électromagnétique, qu'il ne faut cependant pas confondre avec un tenseur de Maxwell généralisé. Dans ces conditions, les équations (19 b), qui sont le «pendant» des équations (19 a) du champ de gravitation, expriment l'influence des contenus électromagnétiques de l'Univers sur sa *forme* (c'est-à-dire sur sa métrique externe rapportée à l'espace pseudo euclidien à cinq dimensions où l'Univers peut être plongé), de même que les équations (19 a) expriment l'influence des contenus «matériels» de l'Univers sur sa métrique interne.

Comme les g_{ik} de la forme métrique interne décrivent le champ de gravitation, on doit admettre que les ω_{ik} de la forme métrique externe décrivent les «forces électromagnétiques». Considérons un corpuscule électrisé se déplaçant sous l'action d'un champ électromagnétique. L'équation de sa ligne d'Univers sera donc l'équation des lignes «géodésiques» qui correspondent à la forme métrique externe (7), c'est-à-dire :

$$(134) \quad \frac{d^2 x^i}{d\Omega^2} = - \left[\begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right]_{\Omega} \frac{dx^j}{d\Omega} \frac{dx^k}{d\Omega}.$$

Considérons le calcul bien connu qui permet de déduire, comme une première approximation, les équations newtoniennes du mouvement et

l'équation de Laplace-Poisson des équations du champ de gravitation d'Einstein (ou, ce qui revient au même, des équations (19 a)). Si la métrique externe est quasi-statique, ce calcul peut être appliqué sans changement aux équations (19 b) et aux équations (134) et donne les résultats suivants :

1°. Les équations des géodésiques de la forme métrique externe deviennent :

$$(a) \quad \frac{d^2 q^i}{dt^2} = - \frac{c^2}{2} \frac{\partial \omega_{44}}{\partial q^i}, \quad (x^4 = ct)$$

2°. Les équations (19 b) donnent :

$$(b) \quad \frac{\partial^2 \omega_{44}}{\partial q^{12}} + \frac{\partial^2 \omega_{44}}{\partial q^{22}} + \frac{\partial^2 \omega_{44}}{\partial q^{32}} = \chi \varkappa_{\omega} U - \lambda_{\omega} \chi$$

puisque l'on a ici $\omega_{ik} = \chi g_{ik} + \omega'_{ik}$, χ étant une constante convenablement choisie et ω'_{ik} des petites quantités par rapport aux ω_{ik} . Il faut remarquer que ces équations sont écrites en coordonnées géodésiques locales q^i relatives à la métrique externe. Elles ne deviennent donc comparables aux équations classiques pour le champ électrostatique que si l'on a :

$$(135) \quad \omega_{ik} = \chi g_{ik}, \quad \text{pour } i, k = 1, 2, 3$$

car alors (b) devient :

$$(136) \quad \frac{\partial^2 \omega_{44}}{\partial \zeta^{12}} + \frac{\partial^2 \omega_{44}}{\partial \zeta^{22}} + \frac{\partial^2 \omega_{44}}{\partial \zeta^{32}} = \chi^2 \varkappa_{\omega} U - \lambda_{\omega} \chi^2$$

et les (a) prennent la forme :

$$(137) \quad \frac{d^2 \zeta^i}{dt^2} = - \frac{c^2}{2\chi} \frac{\partial \omega_{44}}{\partial \zeta^i}$$

Les équations (136) sont les équations du mouvement du corpuscule électrisé sous l'action du champ électrostatique pur dont le potentiel

est $\frac{c^2 \omega_{44}}{2\chi}$; l'équation (136) est l'équation de Laplace-Poisson pour ce

champ de Coulomb. Le fait que le champ électrostatique satisfait aux équations (136) et (137) prouve que la métrique externe de l'espace-temps satisfait presque rigoureusement aux conditions (135), de sorte que les lignes de courbure des variétés tridimensionnelles V_3 à métrique interne et externe elliptique sont «presque indéterminées». Remarquons

que la constante α_ω des équations (19 b) est, d'après l'équation (136), la « constante de Coulomb » du champ électrostatique, tandis que $\chi \alpha_\omega U$ représente, dans les limites de l'approximation qui permet de passer de (19 b) à (136), la densité de charge électrique, en un point des V_ω , multipliée par un facteur constant que nous apprendrons à déterminer.

Le tenseur U^{ik} satisfait, comme on sait, aux relations de conservation :

$$\frac{\partial U^{ik}}{\partial x^k} = 0.$$

Comme U^{ik} n'est pas le tenseur de Maxwell, nous dirons que les relations précédentes expriment la conservation de l'énergie-quantité de mouvement électromagnétiques externes. Nous savons d'ailleurs (II, § 6) que le tenseur U^{ik} peut être exprimé en fonction de certaines fonctions-contenus de base Φ^{mn} qui sont les fonctions propres de l'opérateur laplacien Δ_ω relatif à la forme métrique externe. Il doit donc y avoir un rapport étroit entre les valeurs propres β_n de cet opérateur et l'énergie électrique qui intervient dans U^{ik} . Pour préciser ce rapport, considérons la contribution des fonctions propres d'indice n (relative à la valeur propre β_n de Δ_ω) à la somme des composantes diagonales de U_n^{ik} :

$$\frac{1}{2} \sum_1^4 U_n^{jj} = \Phi_{mn}^+ \epsilon_{nq}^j \frac{\partial \Phi_n^m}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q_j} \epsilon_{nq}^j \Phi_n^m,$$

ce qui peut s'écrire comme suit, grâce aux équations (50) et (54) :

$$\frac{1}{4} \sum_1^4 U_n^{jj} = -\sqrt{\beta_n} (I_1^\omega)_n,$$

$(I_1^\omega)_n$ étant l'invariant défini dans le tableau (80). Étant donnée la signification de $\sum U^{jj}$ on voit que $-\sqrt{\beta_n} (I_1^\omega)_n$ est la contribution de la valeur propre β_n de Δ_ω à la densité d'énergie électromagnétique externe en un point de l'Univers. Nous verrons d'ailleurs que les $\sqrt{\beta_n}$ sont (à un facteur constant près que nous déterminerons) les charges propres (cosmologiques) des corpuscules élémentaires de l'Univers.

Considérons maintenant les vecteurs $(V_\omega)_n^i$ définis dans (80). On sait que ces vecteurs sont conservatifs :

$$\frac{\partial (V_\omega)_n^i}{\partial q^i} = 0.$$

Comme nous avons déjà une relation pour la conservation de l'énergie électromagnétique externe, il faut interpréter ce résultat en disant qu'il s'agit d'une «équation de continuité» généralisée exprimant la conservation de l'électricité, de sorte que $\sqrt{\varepsilon_n}(V_\omega)_n^i$ doit représenter la contribution de la valeur propre β_n de Δ_ω au «courant électrique» total d'Univers. (Voir le § 8 de ce Chapitre).

Quelle sera maintenant la contribution de β_n au tenseur antisymétrique du champ électromagnétique total? Ce ne peut être que le tenseur antisymétrique $(M_\omega)_n^{ik}$ défini dans (80). De ce tenseur nous déduisons donc comme suit deux trivecteurs réels d'espace qui représentent le champ électrique partiel \vec{E}_n et le champ magnétique partiel \vec{H}_n qui correspondent à la valeur propre β_n de Δ_ω :

$$(138) \quad \begin{cases} H_n^1 = -\frac{i}{2}(M_\omega)_n^{23}; & H_n^2 = -\frac{i}{2}(M_\omega)_n^{31}; & H_n^3 = -\frac{i}{2}(M_\omega)_n^{12} \\ E_n^1 = \frac{1}{2}(M_\omega)_n^{14}; & E_n^2 = \frac{1}{2}(M_\omega)_n^{24}; & E_n^3 = \frac{1}{2}(M_\omega)_n^{34}. \end{cases}$$

Les relations (85) et (89) donnent alors avec ces notations :

$$(139) \quad \begin{cases} i \frac{\partial \vec{E}_n}{\partial q^i} - \text{rot}_\omega \vec{H}_n = \sqrt{\varepsilon_n}(\vec{V}_\omega)_n + (\vec{P}_\omega)_n; & \text{div}_\omega \vec{E}_n = i\sqrt{\varepsilon_n}(V_\omega)_n^4 + i(P_\omega)_n^4 \\ i \frac{\partial \vec{H}_n}{\partial q^i} + \text{rot}_\omega \vec{E}_n = (\vec{\Lambda}_\omega)_n; & \text{div}_\omega \vec{H}_n = i(\Lambda_\omega)_n^4, \end{cases}$$

où nous avons désigné par l'indice ω les opérateurs d'espace formés avec les q^i et posé :

$$(140) \quad \begin{cases} (P_\omega)_n^k = -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q^k} \Phi_n^m - \Phi_{mn}^+ \frac{\partial \Phi_n^m}{\partial q^k} \right) \\ (\vec{\Lambda}_\omega)_n = (B_\omega)_n^{234} \vec{u}_q^1 + (B_\omega)_n^{314} \vec{u}_q^2 + (B_\omega)_n^{124} \vec{u}_q^3; & (\Lambda_\omega)_n^4 = -i(B_\omega)_n^{123}, \end{cases}$$

$\vec{u}_q^1, \vec{u}_q^2, \vec{u}_q^3$ étant les vecteurs unitaires des axes q^1, q^2, q^3 . D'autre part, les relations (91) s'écrivent maintenant :

$$(141) \quad \begin{cases} \vec{E}_n = \nabla_\omega (A_\omega)_n^4 - \frac{\partial (\vec{A}_\omega)_n}{\partial q^4} + (\vec{B}_\omega)_n^4 \\ \vec{H}_n = -i[\text{rot}_\omega (\vec{A}_\omega)_n + (\vec{B}_\omega)_n], \end{cases}$$

avec :

$$(\vec{B}_\omega)_n = (B_\omega)_n^{23} \vec{u}_q^1 + (B_\omega)_n^{31} \vec{u}_q^2 + (B_\omega)_n^{12} \vec{u}_q^3; \quad (\vec{B}_\omega)_n^4 = (B_\omega)_n^{44} \vec{u}_q^1 + (B_\omega)_n^{24} \vec{u}_q^2 + (B_\omega)_n^{34} \vec{u}_q^3$$

et il va de soi qu'on peut assujettir le quadrivecteur $(A_\omega)_n^k$ potentiel du champ électromagnétique aux conditions (92 b) et (94) qui s'écrivent avec les notations actuelles :

$$(142 a, b) \quad \frac{\partial (A_\omega)_n^i}{\partial q^4} + \text{div}_\omega (A_\omega)_n = 0; \quad \square_\omega (A_\omega)_n^k = i\sqrt{\beta_n} (V_\omega)_n^k + i(P_\omega)_n^k.$$

Le système (139) + (141) + (142 a), dans lequel toutes les fonctions sont formées avec les fonctions propres Φ^{mn} de l'opérateur laplacien Δ_ω relatif à la forme métrique externe (7), est le système d'équations du champ électromagnétique partiel que correspond à la valeur propre β_n . Le champ électromagnétique total s'obtient naturellement par une simple sommation par rapport à l'indice n .

Les équations électromagnétiques que nous venons de déduire sont écrites en coordonnées q^i . Cependant, comme les relations (135) sont très sensiblement réalisées dans l'espace, on peut, en première approximation, remplacer les opérateurs rot_ω et div_ω par les opérateurs rot_s et div_s . Une comparaison de nos équations électromagnétiques aux équations de Maxwell, montre alors que, conformément à l'interprétation que nous avons donnée plus haut des vecteurs $(V_\omega)_n^i$, $\sqrt{\beta_n} (\vec{V}_\omega)_n$ est bien la contribution de la valeur propre β_n de l'opérateur Δ_ω au courant électrique total d'espace, tandis que $\sqrt{\beta_n} (V_\omega)_n^4$ est la contribution de β_n à la densité de charge électrique en un point de l'espace. D'autre part, on voit que $(\vec{P}_\omega)_n$ et $i(P_\omega)_n^4$ sont la contribution de β_n à la «polarisation électrique» intégrale de l'Univers, tandis que $(\vec{\Lambda}_\omega)_n$ et $i(\Lambda_\omega)_n^4$ doivent être interprétés comme représentant l'«aimantation» intégrale de l'Univers. On déduit d'ailleurs facilement des équations en $\text{rot}_\omega \vec{H}_n$ et $\text{div}_\omega \vec{E}_n$, grâce à (83), la relation qui exprime la conservation de la polarisation électrique :

$$(143) \quad \frac{\partial (P_\omega)_n^4}{\partial q^4} + \text{div}_\omega (\vec{P}_\omega)_n = 0,$$

tandis que les équations en $\text{rot}_\omega \vec{E}_n$ et $\text{div}_\omega \vec{H}_n$ conduisent immédiatement à la conservation de l'aimantation :

$$(144) \quad \frac{\partial (\Lambda_\omega)_n^4}{\partial q^4} + \text{div}_\omega (\vec{\Lambda}_\omega)_n = 0.$$

Il est intéressant de faire apparaître dans les équations (139) la contribution $(\vec{\mathcal{E}}_e)_n$ de β_n à l'induction électrique $\vec{\mathcal{E}}_e$ ainsi que la contribution $(\vec{\mathcal{E}}_m)_n$ de β_n à l'induction magnétique. Pour cela, il suffit de poser :

$$(145) \quad i \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}_n}{\partial q^4} = -(\vec{P}_\omega)_n; \quad i \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}_n}{\partial q^4} = -(\vec{\Lambda}_\omega)_n.$$

On a alors :

$$(146) \quad (\vec{\mathcal{E}}_e)_n = \vec{E}_n + \vec{\mathcal{P}}_n; \quad (\vec{\mathcal{E}}_m)_n = \vec{H}_n + \vec{\mathcal{A}}_n.$$

et les équations (139) prennent la forme suivante, grâce aux relations (143) et (144) :

$$(147) \quad \begin{cases} i \frac{\partial (\vec{\mathcal{E}}_e)_n}{\partial q^4} - \text{rot}_\omega \vec{H}_n = \sqrt{\varepsilon_n} (\vec{V}_\omega)_n; & \text{div}_\omega (\vec{\mathcal{E}}_e)_n = i \sqrt{\beta_n} (V_\omega)_n^4, \\ i \frac{\partial (\vec{\mathcal{E}}_m)_n}{\partial q^4} + \text{rot}_\omega \vec{E}_n = 0; & \text{div}_\omega (\vec{\mathcal{E}}_m)_n = 0. \end{cases}$$

Nous avons déjà écrit plus haut (équation 142 b)) l'équation de propagation des potentiels $(A_\omega)_n^i$. Un calcul facile donne aussi les équations de propagation des champs \vec{E}_n et \vec{H}_n sous la forme :

$$(148) \quad \begin{cases} \square_\omega \vec{E}_n = i \nabla_\omega [\sqrt{\varepsilon_n} (V_\omega)_n^4 + (P_\omega)_n^4] - \text{rot}_\omega (\vec{\Lambda}_\omega)_n - i \frac{\partial}{\partial q^4} [\sqrt{\beta_n} (\vec{V}_\omega)_n + (\vec{P}_\omega)_n] \\ \square_\omega \vec{H}_n = i \nabla_\omega (\Lambda_\omega)_n^i - i \frac{\partial (\vec{\Lambda}_\omega)_n}{\partial q^4} + \text{rot}_\omega [\sqrt{\varepsilon_n} \vec{V}_\omega)_n + (\vec{P}_\omega)_n] \end{cases}$$

Ces équations se réduisent aux équations habituelles pour le «vide» lorsque le courant électrique, la susceptibilité électrique et l'aimantation sont nuls.

Considérons maintenant les fonctions :

$$\vec{S}_n = \vec{E}_n \times \vec{H}_n; \quad J_n = -\sqrt{\beta_n} \vec{E}_n \cdot (\vec{V}_\omega)_n.$$

(\vec{S}_n est le vecteur de Poynting et J_n la «chaleur de Joule»). Désignons par ξ^j une longueur mesurée sur la géodésique de (7) issue d'un point tangentiellement à q^j , et formons les quantités suivantes :

(149)

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}_n^{44} &= \frac{i}{2} [\vec{E}_n \cdot (\vec{\mathcal{E}}_e)_n + \vec{H}_n \cdot (\vec{\mathcal{E}}_m)_n] + \int_{\xi_0^4}^{\xi_1^4} \left\{ J_n + \right. \\ &+ \frac{i}{2} \left[\vec{E}_n \cdot \frac{\partial (\vec{\mathcal{E}}_e)_n}{\partial q^4} - \frac{\partial \vec{E}_n}{\partial q^4} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_e)_n \right] + \frac{i}{2} \left[\vec{H}_n \cdot \frac{\partial (\vec{\mathcal{E}}_m)_n}{\partial q^4} - \frac{\partial \vec{H}_n}{\partial q^4} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_m)_n \right] \left. \right\} d\xi^4, \\ \mathcal{L}_n^{j4} &= \mathcal{L}_n^{4j} = (\vec{E}_n \times \vec{H}_n)^j = S_n^j \quad (\text{pour } j=1, 2, 3) \\ \mathcal{L}_n^{jj} &= i \left[(E_n^j)^2 + (H_n^j)^2 - \frac{E_n^2 + H_n^2}{2} \right] - i \int_{\xi_0^j}^{\xi_1^j} \left\{ \sqrt{\beta_n} [\vec{E}_n i (V_\omega)_n + \vec{H}_n \times (\vec{V}_\omega)_n] + \right. \\ &+ \left. \vec{E}_n i (P_\omega)_n - \vec{E}_n \times (\vec{\Lambda}_\omega)_n + \vec{H}_n i (\Lambda_\omega)_n + \vec{H} \times (\vec{P}_\omega)_n \right\}^j d\xi^j \quad (\text{pour } j=1, 2, 3) \\ \mathcal{L}_n^{ik} &= \mathcal{L}_n^{ki} = i [E_n^j E_n^k + H_n^j H_n^k] \quad (\text{pour } k, j=1, 2, 3; k \neq j). \end{aligned} \right.$$

Ces fonctions \mathcal{L}_n^{ik} satisfont aux relations de conservation :

$$(150) \quad \frac{\partial \mathcal{L}_n^{ik}}{\partial q^k} = 0,$$

qui expriment, pour $i=4$, la conservation de l'énergie électromagnétique «interne» et pour $i=1, 2, 3$ la conservation de la quantité de mouvement (ou impulsion) électromagnétique «interne». Lorsque les inductions électriques et magnétiques se confondent avec les champs, les \mathcal{L}_n^{ik} se réduisent aux composantes du tenseur électromagnétique de Maxwell pour le «vide».

Considérons finalement la «force de Laplace-Lorentz» \vec{F} qu'on peut mettre sous la forme suivante, en écrivant seulement la contribution de β_n :

$$(151) \quad F_n^i = \sqrt{\beta_n} (V_\omega)_{nk} (M'_\omega)^{ik}, \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$(M'_\omega)^{ik}$ étant le tenseur antisymétrique réel suivant :

$$(152) \quad \left\{ \begin{aligned} (M'_\omega)_n^{14} &= E_n^1; & (M'_\omega)_n^{24} &= E_n^2; & (M'_\omega)_n^{34} &= E_n^3; \\ (M'_\omega)_n^{23} &= -(\mathcal{E}_m)_n^1; & (M'_\omega)_n^{31} &= -(\mathcal{E}_m)_n^2; & (M'_\omega)_n^{12} &= -(\mathcal{E}_m)_n^3. \end{aligned} \right.$$

L'expression (151) de la contribution de β_n à la force de Laplace-Lorentz peut encore s'écrire comme suit :

$$(153) \quad \left\{ \begin{aligned} F_n^4 &= -\sqrt{\beta_n} (\vec{V}_\omega)_n \cdot \vec{E}_n = J_n \\ \vec{F}_n &= \sqrt{\beta_n} (V_\omega)_n^i \vec{E}_n - \sqrt{\beta_n} (\vec{V}_\omega)_n \times (\vec{\mathcal{E}}_m)_n. \end{aligned} \right.$$

Les valeurs propres β_n de l'opérateur Δ_ω tendent vers l'infini quand n augmente indéfiniment; par contre, les fonctions propres Φ^{mn} tendent vers zéro quand $n \rightarrow \infty$ plus vite que les β_n ne tendent vers 0. Toutes les fonctions précédentes, que nous avons formé avec les Φ_{mn} , tendent donc vers zéro quand $n \rightarrow \infty$; ce sont donc seulement les premiers β_n du spectre de l'opérateur Δ_ω qui contribuent d'une manière sensible à la valeur d'une fonction formée avec les Φ^{mn} et comportant une sommation par rapporte à l'indice n (valeurs totales). Les Φ^{mn} , pour des valeurs même relativement petites de n , n'ont donc que très peu d'influence, aussi bien sur la métrique externe de l'Univers (c'est-à-dire sur sa forme relativement à l'espace pseudo-euclidien à cinq dimensions où il peut être plongé) que sur le champ électrique et le champ magnétique. On peut répéter ces remarques au sujet des fonctions propres Ψ^{mn} du laplacien, qui tendent aussi vers zéro quand $n \rightarrow \infty$. Le champ de gravitation (et la métrique interne de l'Univers) dépendent donc presque seulement des premiers termes spectraux de l'opérateur laplacien. Ce sont là des circonstances qu'il est essentiel de ne pas perdre de vue pour bien comprendre la signification des formules de notre théorie cosmologique.

4. Les masses propres des corpuscules élémentaires. Considérons un opérateur complet. Nous avons expliqué dans II, § 10 que ses valeurs propres sont des propriétés intrinsèques de points singuliers du contenant de l'être mathématique non-arbitraire, les points singuliers étant précisément ceux auxquels doivent être attachés les valeurs propres des opérateurs complets. Nous interprétons physiquement les points singuliers en disant qu'ils sont *les corpuscules élémentaires de l'Univers*. Deux importantes questions se posent alors immédiatement :

1°. Quel est l'opérateur complet dont les valeurs propres représentent la propriété intrinsèque la plus importante des corpuscules élémentaires, c'est-à-dire leur masse propre ?

2°. Quelle est la condition analytique nécessaire et suffisante pour déterminer a priori les points de l'espace-temps où se trouvent les corpuscules élémentaires ?

Occupons-nous d'abord de la première question. Considérons l'équation d'onde du second ordre que la mécanique ondulatoire déduit pour tous les corpuscules élémentaires libres. Cette équation s'écrit avec nos notations :

$$(154) \quad \square \Psi_{mn} = \frac{4\pi^2 c^2}{h^2} (m_0)_n^2 \Psi_{mn},$$

c étant le rapport des unités électromagnétique et électrostatique de charge électrique, h la constante de Planck et $(m_0)_n$ la masse propre d'un corpuscule élémentaire. Comparons cette équation à notre équation (56) :

$$(56) \quad \square \Psi_{mn} = \alpha_n \Psi_{mn}$$

On voit donc immédiatement qu'on est en droit de poser :

$$(155) \quad \alpha_n = \frac{4\pi^2 c^2}{h^2} (m_0)_n^2,$$

c'est-à-dire :

$$(156) \quad (m_0)_n = \frac{h}{2\pi c} \sqrt{\alpha_n},$$

dans la théorie cosmologique s'il est possible d'introduire dans cette théorie, d'une manière absolument non-arbitraire, les deux constantes c et h . Or, nous verrons un peu plus loin (§ 7) que cela est possible en effet.

D'après (156) les masses propres des corpuscules élémentaires sont proportionnelles aux racines des valeurs propres de l'opérateur laplacien relatif à la métrique interne (2) de l'Univers. Or, nous savons (§ 7, chap II) qu'il y a une infinité dénombrable de valeurs propres du laplacien pour chacune desquelles il existe quatre fonctions propres linéairement indépendantes. *Les corpuscules élémentaires de l'Univers ont donc une infinité dénombrable de masses propres, entièrement déterminées par la métrique interne et la forme de la frontière de l'espace-temps*, d'après les résultats fondamentaux du § 7, chap II. Cette importante *liaison « macrocosme-microcosme »* sera développée plus loin (§ 8) jusqu'aux résultats numériques. La relation (156) montre aussi que *les masses propres des corpuscules élémentaires augmentent indéfiniment quand $n \rightarrow \infty$* , puisque α_n tend aussi vers l'infini pour $n \rightarrow \infty$. Cependant, *la contribution des corpuscules élémentaires à la métrique interne de l'Univers et au champ de gravitation diminue et tend très vite vers zéro quand $n \rightarrow \infty$* , puisque tel est le cas des fonctions propres Ψ_{mn} du laplacien dont dépend exclusivement, d'après (44), le tenseur T_{ik} d'énergie-quantité de mouvement des équations (19 a). Cette circonstance est l'une des principales raisons qui expliquent pourquoi les corpuscules élémentaires de grande masse propre sont restés jusqu'ici inaperçus (cf. les résultats du § 8).

Il est utile de remarquer, avant de finir ce paragraphe, qu'en multipliant, d'après (155), les composantes (44) du tenseur d'énergie-quantité

tité de mouvement par le coefficient constant $\frac{hc}{2\pi}$ on obtient une expression de ce tenseur ayant les dimensions physiques d'une énergie. D'autre part, en multipliant les vecteurs V_n^i , étudiés dans les §§ 10 du Chap II et 2 du Chap III, par les coefficients $(m_0)_n c = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\alpha_n}$, on obtient la contribution de $\sqrt{\alpha_n}$ au «courant de masse» avec les dimensions classiques d'une quantité de mouvement.

5. La propagation des actions électromagnétiques et les lignes de «longueur» nulle associées aux formes métriques externe et interne. Considérons les équations de propagation des champs ou des potentiels électromagnétiques déduites dans le § 3, par exemple l'équation (142 b) de propagation des potentiels :

$$\square_{\omega} (A_{\omega})_n^k = i\sqrt{\beta_n} (V_{\omega})_n^k + i(P_{\omega})_n^k.$$

L'équation de propagation des potentiels du champ électromagnétique total dérive de celle-ci par une simple sommation par rapport à l'indice n :

$$(157) \quad \square_{\omega} A_{\omega}^k \equiv \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\omega} \omega^{ij} \frac{\partial A_{\omega}^k}{\partial x^j} \right) = i \sum_1^{\infty} \left[\sqrt{\beta_n} (V_{\omega})_n^k + (P_{\omega})_n^k \right],$$

et un théorème bien connu de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre et du type hyperbolique normal, comme l'équation (157), nous apprend alors que les «rayons» de la propagation des actions électromagnétiques (rayons lumineux, par exemple) sont les bicaractéristiques de Cauchy de l'équation (157) et que ces bicaractéristiques sont les lignes de «longueur» nulle qui correspondent à la forme quadratique :

$$d\Omega^2 = \omega^{ij} dx_i dx_j$$

c'est-à-dire à la forme métrique externe. Contrairement à ce qu'on admet en Relativité générale, les rayons lumineux ne sont pas les lignes de longueur nulle du ds^2 , sauf dans le cas particulier très important où l'on a en chaque point de l'espace-temps :

$$(158) \quad \omega_{ik} = \chi g_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

χ étant un invariant (courbure moyenne en un point de l'espace-temps). Les lignes de courbure de l'espace-temps sont alors indéterminées et la formule de Gauss (25) prend la forme :

$$R_{ijkl} = \chi^2 (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}).$$

Un théorème connu de Schur nous apprend alors que χ est une constante en chaque point de l'espace-temps. On arrive de la sorte au résultat suivant :

Pour que les rayons de la propagation des actions électromagnétiques (les rayons lumineux, par exemple) soient les lignes de longueur nulle du ds^2 (de la forme métrique interne), il faut et il suffit que l'espace-temps soit une hypersurface à courbure moyenne constante.

Nous savons qu'en première approximation l'espace-temps réel est un espace-temps de De Sitter-Lanczos qui satisfait à (158), mais en toute rigueur les rayons lumineux sont les lignes de «longueur» nulle du $d\Omega^2$ et leur marche doit dépendre essentiellement du champ électromagnétique, d'après les résultats du § 3. Refaisons donc, en partant des ω_{ik} de la forme métrique externe, le calcul, aujourd'hui classique, qui donne la formule einsteinienne de la déviation des rayons lumineux par la gravitation des grandes masses, comme le soleil. Pour cela, considérons un champ électrostatique pur à surfaces équipotentielles sphériques. On déduit alors l'équation (136) des équations (19 b), et cette équation (136) donne, en dehors des charges :

$$(159) \quad \omega_{44} = -b_\omega + \frac{a_\omega}{r_\omega},$$

avec :

$$r_\omega = \sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2}$$

(on néglige ici, comme dans le calcul d'Einstein, λ_ω et la courbure des sections spatiales de l'espace-temps, de sorte que les dq^i , pour $i=1, 2, 3$ sont intégrables) et :

$$(160) \quad a_\omega = \frac{K^2}{4\pi} z_\omega \bar{U},$$

\bar{U} étant la «charge électrique» totale qui produit le champ.

Pour les autres ω_{ik} , on obtient la solution suivante à symétrie sphérique :

$$(161) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{ik} = b_\omega \gamma_{ik} + a_\omega \frac{q^i q^k}{r_\omega^3} \\ \omega_{i4} = \omega_{4i} = 0. \end{array} \right. \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Considérons un rayon lumineux venant «de l'infini», appartenant au plan des x^1, x^2 et orienté perpendiculairement à l'axe des x^1 quand il passe le plus près du corps qui produit le champ. La vitesse de la lumière est donnée par l'équation :

$$(162) \quad d\Omega^2 \equiv \omega_{ik} dx^i dx^k = 0.$$

Soit γ le module de cette vitesse, c'est-à-dire :

$$(163) \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dx^4}\right)^2}.$$

On déduit alors de (162), avec une approximation suffisante, pour le rayon défini ci-dessus :

$$\gamma = \sqrt{-\frac{\omega_{44}}{\omega_{22}}},$$

et la courbure totale de ce rayon sera donnée¹, avec une bonne approximation, par :

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial x^1} dx^2,$$

ou bien :

$$(164) \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial q^1} dq^2,$$

par suite des relations (135), qui sont toujours valables, en première approximation, sur les sections spatiales de l'espace-temps dans le cas d'un champ électrostatique pur. Comme b_ω doit s'annuler lorsque l'espace-temps tend vers un hyperplan, il faut poser : $b_\omega = \chi$, de sorte que (164) donne en tenant compte de (159) et (161) :

$$(165) \quad C = \frac{2a_\omega}{\chi \sqrt{\chi} D_m},$$

D_m étant la distance naturelle minima du rayon lumineux au centre du champ.

Considérons maintenant le cas particulier très important où le champ électrostatique à symétrie sphérique est produit par une masse électrisée dont la gravitation est si importante qu'on peut négliger tout-à-fait la gravitation des autres masses. Supposons encore que les surfaces de niveau du champ de gravitation coïncident pratiquement avec les surfaces équipotentielles du champ électrostatique. Tel est le cas du soleil et de toutes les étoiles simples. Dans ces conditions, les potentiels de la gravitation sont donnés, au même degré d'approximation

¹ Cf. A. Einstein: «Les fondements de la théorie de la relativité générale», Hermann, Paris.

que les expressions (159) et (161) des ω_{ik} par les expressions bien connues :

$$(166) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{4i} = -1 + \frac{a}{r} \\ g_{ik} = \delta_{ik} + a \frac{x_i x_k}{r^3} \\ g_{i4} = g_{4i} = 0 \end{array} \right\} \quad i, k = 1, 2, 3.$$

avec :

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2},$$

et :

$$a = \frac{z_e M}{4\pi}, \quad (z_e = \text{constante einsteinienne de la gravitation}).$$

M étant la masse totale qui produit le champ de gravitation. En comparant ces valeurs des g_{ik} aux expressions (150) et (161) des ω_{ik} on voit immédiatement que l'on a ici $\omega_{ik} = \lambda g_{ik}$ pour $i, k = 1, 2, 3, 4$. Dans ces conditions, la formule (165) pour la déviation des rayons lumineux par le champ électrostatique devient identique à la formule einsteinienne de la déviation des rayons lumineux par le champ de gravitation :

$$(167) \quad C_e = \frac{2a}{D_m}.$$

On voit donc que, grâce à la condition (135), la déviation einsteinienne est égale à la déviation (165) dans le cas d'un astre comme le Soleil, bien que cet effet doive être attribué toujours au champ électrostatique. Dans l'espace environnant le Soleil ou toute autre étoile simple, les rayons lumineux sont donc, en première approximation, à la fois les lignes de «longueur nulle» du $d\Omega^2$ (de la forme métrique externe) et les lignes de longueur nulle du ds^2 .

6. Les charges électriques propres des corpuscules élémentaires. Considérons l'équation (48) des fonctions et valeurs propres de l'opérateur laplacien Δ_ω relatif à la métrique externe (7) :

$$(48) \quad \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\omega} \omega^{ik} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x^k} \right) = \beta_n \Phi_{mn}.$$

Comme cet opérateur est complet, ses valeurs propres β_n représentent (voir § 10 du Chap II) des propriétés intrinsèques des corpuscules élémentaires. D'après les équations électromagnétiques (147), il est évi-

dent que les $\sqrt{\beta_n}$ sont, à un facteur constant près que nous allons déterminer, les valeurs absolues des charges électriques propres des corpuscules élémentaires. Considérons par exemple l'équation :

$$(168) \quad \operatorname{div}_\omega (\vec{\mathcal{E}}_e)_n = i\sqrt{\beta_n} (V_\omega)_n^4 = -\sqrt{\beta_n} \Phi_{mn} \epsilon_0^4 \epsilon_{nq} \Phi_n^m .$$

En la comparant à l'équation de Maxwell correspondante, on voit facilement qu'en multipliant ses deux membres par un facteur constant ayant les dimensions $M^{\frac{1}{2}} L^2 T^{-1}$ on obtient au second membre la densité de charge électrique avec les dimensions classiques $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$ (en unités électrostatiques), quand on convient de donner aux Φ_{mn} les dimensions $L^{-\frac{3}{2}}$. Ce facteur constant doit évidemment être formé uniquement avec les constantes fondamentales h , c et δ_0 . En désignant par e_n les valeurs absolues des charges élémentaires, il faut donc poser :

$$(169) \quad e_n^2 = \mathcal{A} \delta_0 h c \beta_n ,$$

c'est-à-dire :

$$(170) \quad e_n = \pm (\sqrt{\mathcal{A} \delta_0 h c}) \sqrt{\beta_n} ,$$

\mathcal{A} étant une constante positive sans dimensions (nombre pur) que nous déterminerons plus loin (§ 8).

La transformation (51) montre que le second membre de (168) peut varier entre la limite inférieure négative $-\sqrt{\beta_n} \sum_1^4 \Phi_{mn}^2$ et la limite supérieure positive $+\sqrt{\beta_n} \sum_1^4 \Phi_{mn}^2$. Il y a donc des charges électriques négatives et des charges électriques positives pour tout β_n , et il est clair qu'à la limite inférieure $-\sqrt{\beta_n} \sum_1^4 \Phi_{mn}^2$ correspond la charge propre élémentaire négative :

$$-e_n = -(\sqrt{\mathcal{A} \delta_0 h c}) \sqrt{\beta_n}$$

et à la limite supérieure $+\sqrt{\beta_n} \sum_1^4 \Phi_{mn}^2$ la charge propre élémentaire positive :

$$+e_n = +(\sqrt{\mathcal{A} \delta_0 h c}) \sqrt{\beta_n} .$$

En d'autres termes : aux corpuscules élémentaires de masse propre $(m_0)_n$ et de charge électrique propre $-e_n$ correspondent toujours des corpus-

cules élémentaires de même masse propre et de charge électrique égale et de signe contraire ($+e_n$). On sait expérimentalement que tel est le cas des électrons, mais la théorie cosmologique montre qu'il en est de même pour tous les corpuscules électrisés véritablement élémentaires.

La relation (170) montre que les charges électriques propres des corpuscules élémentaires tendent vers l'infini avec l'indice de numérotage des valeurs propres des opérateurs Δ et Δ_ω pour lesquelles ces opérateurs ont quatre fonctions propres linéairement indépendantes. Mais les e_n tendent vers l'infini moins vite que les masses propres $(m_0)_n$. Nous devons insister à nouveau sur le fait important que, malgré l'existence de corpuscules élémentaires de charge électrique propre infiniment grande, leur influence sur le champ électromagnétique est nulle. Plus exactement: l'influence des corpuscules élémentaires de charge $\pm e_n$ sur le champ électromagnétique diminue et tend vite vers zéro quand l'indice n tend vers l'infini, puisque tel est le cas des fonctions propres Φ_{mn} dont dépend exclusivement le champ électromagnétique. En rapprochant ce résultat du résultat correspondant de la fin du § 4 sur le champ de gravitation, on comprend maintenant parfaitement pourquoi les corpuscules élémentaires de grande masse propre et de grande charge électrique propre sont restés jusqu'ici rebelles à l'observation et doivent même probablement le rester par suite de leur nature même. En effet, un objet, un phénomène physique, n'est observable que par les actions, en dernière analyse gravifiques et électromagnétiques, qu'il exerce directement ou indirectement sur les sens de l'observateur. Si donc les actions gravifiques et électromagnétiques des corpuscules élémentaires tendent vers zéro quand leurs masses cosmologiques et leurs charges électriques propres tendent vers l'infini, leur «observabilité» (physique) tendra aussi vers zéro dans les mêmes conditions. On peut donc affirmer que notre monde physique habituel, celui qui est facilement accessible à nos sens, aidés ou non d'instruments scientifiques, tout en étant celui qui modèle presque entièrement la métrique et la forme de l'Univers, n'est qu'une toute petite partie, qu'une partie infiniment petite, de l'ensemble des contenus de l'être mathématique non-arbitraire, c'est-à-dire de l'ensemble de ce qui est doué d'existence physique dans l'espace-temps (cf. les résultats du § 8).

La théorie des corpuscules élémentaires comporte évidemment la détermination a priori des points de l'espace-temps où doivent être attachées les masses et les charges électriques propres ainsi que les autres propriétés intrinsèques des corpuscules élémentaires. Mais ce problème de la «position des corpuscules» ne sera traité que plus loin en même temps que d'autres questions qui ont un rapport étroit avec lui.

7. Les constantes c et h . La présence des constantes c et h dans la théorie cosmologique n'est admissible que s'il est possible d'en donner des expressions absolument non-arbitraires dans le cadre de cette théorie. Considérons d'abord la constante c , qui est le rapport de l'unité électrostatique à l'unité électromagnétique de charge électrique et aussi la vitesse de propagation des actions électromagnétiques dans une région où l'effet de la « matière » électrisée sur cette propagation est insensible. Si nous considérons l'expression (163) du module de la vitesse de propagation des actions électromagnétiques, expression qui devient :

$$\sqrt{-\frac{\omega_{44}}{\omega_{22}}}$$

en plaçant l'axe des x^2 parallèlement à la direction de propagation en un point, alors la constante c peut naturellement être considérée comme la limite de γ lorsque les ω_{ik} tendent vers leurs valeurs pour un espace-temps pseudo-euclidien plan, c'est-à-dire lorsque $\omega_{ik} \rightarrow 0$. On a donc :

$$(171) \quad c = \lim_{\omega_{ik} \rightarrow 0} \sqrt{-\frac{\omega_{44}}{\omega_{22}}}$$

en sous-entendant que les axes x^i sont ici des axes orthogonaux et que l'axe des x^2 , par exemple, est tangent à la direction de la propagation. Cette définition de c introduit, sans aucun arbitraire, cette constante dans la théorie cosmologique.

Pour introduire aussi la constante h dans cette théorie, considérons un phénomène (rayonnement) *se propageant à la vitesse des actions électromagnétiques*. Désignons par \vec{n} les vecteurs unitaires des rayons de cette propagation et par l une constante (arbitraire) ayant les dimensions d'une longueur. Posons $\vec{u} = \frac{\vec{n}}{l}$ et formons l'invariant $x^i u_i$, les u_i

étant les composantes covariantes de \vec{u} . On peut alors écrire :

$$(172) \quad \Psi_{mn}(x^i) = \varphi_{mn}(x^i u_i) + f_{mn}(x^i).$$

Posons d'ailleurs $x^4 = ct$ et considérons aussi les composantes contravariantes T^{4i} du tenseur T^{ik} qui forme les seconds membres des équations (19 a). Formons alors les fonctions $\frac{1}{w^i} \int_v T^{4i} dv$, v étant le petit

volume autour de chaque corpuscule (photon) où $T^{4i} \neq 0$ dans le phénomène (rayonnement) décrit par (172). Envisageons les limites de ces

rappports lorsque les fonctions $f_{mn}(x^i)$ de (172) tendent vers zéro et les φ_{mn} vers des fonctions périodiques de l'invariant $x^i u_i$, en même temps que la métrique de l'espace-temps tend vers une métrique pseudo-euclidienne $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - c^2 dt^2$, dans une certaine région de l'Univers. Dans ces conditions, les $\int T^{ii} dv$ tendent vers les composantes d'un vecteur de l'espace-temps pseudo-euclidien et l'on a nécessairement :

(173)

$$\lim_{u_1} \frac{1}{u_1} \int_x T^{ii} dx = \lim_{u_2} \frac{1}{u_2} \int_x T^{ii} dx = \lim_{u_3} \frac{1}{u_3} \int_x T^{ii} dx = \lim_{u_4} \frac{1}{u_4} \int_x T^{ii} dx = h_g,$$

h_g étant une constante universelle et le passage à la limite étant celui qui vient d'être défini. En nous reportant aux formules (177) et (178) du § 8 de ce Chap., on voit que l'on peut écrire :

$$z_g \int_x T^{ii} dx = \frac{8\pi K}{c^2} m,$$

K étant la constante newtonienne de la gravitation et m la masse pesante des photons du rayonnement décrit par (172) avec $f_{mn}(x^i) \rightarrow 0$.

En posant $\nu = \frac{c}{l}$, la dernière relation de (173) donne donc :

$$mc^2 = \frac{h_g}{8\pi} \frac{z_g}{K} c^3 \nu$$

d'où l'on déduit la définition de la constante h :

$$(174) \quad h = \frac{h_g}{8\pi} \frac{z_g}{K} c^3$$

qui est ainsi étroitement reliée à la structure corpusculaire du rayonnement.

8. Masses et charges des corpuscules, gravitation et électromagnétisme dans l'espace-temps. Nous savons (Chap. II, § 11) qu'en première approximation l'espace-temps réel ne diffère que par une petite perturbation d'un espace-temps F_0 de De Sitter-Lanzcos. Les masses et charges propres des corpuscules élémentaires doivent donc être, en première approximation, les masses et charges propres qui correspondent à une petite déformation de F_0 . Dans le § 12 du Chap. II nous

avons déduit que le spectre de l'opérateur laplacien Δ est donné pour un F_0 peu déformé, par la relation :

$$\sqrt{\alpha_n} = \frac{2\pi n}{\partial_0}.$$

En utilisant la relation (156), nous aurons donc le spectre suivant de masses propres des corpuscules élémentaires qui sont compatibles avec une petite déformation de F_0 :

$$(175) \quad (m_0)_n = \frac{h}{c\partial_0} n.$$

Rappelons-nous que ∂_0 est le diamètre ($\partial_0 = 2\mathbf{P}_0 \theta_0$) de la surface frontière σ (d'équation $\theta = \theta_0$) du contenant F_0 . Nous savons (Chap. II, §3) qu'une telle frontière existe nécessairement dans l'être mathématique non-arbitraire au point de vue géométrique. Elle doit cependant être «physiquement» inexistante, en ce sens qu'aucune observation ne doit pouvoir la déceler, car il est clair que seul un espace fermé et illimité est physiquement admissible. Dans ces conditions, ∂_0 doit être la plus petite longueur dont la mesure ait un sens. Cette longueur est la «longueur d'onde de Compton» $\partial_m = h/(m_0)_e c = 2,24 \times 10^{-10}$ cm, $(m_0)_e$ étant la masse propre (pesante ou d'inertie) de l'électron. En remplaçant cette valeur de ∂_0 dans (175), on voit immédiatement que l'électron correspond exactement au premier terme spectral de l'opérateur laplacien Δ_0 de l'espace-temps F_0 , c'est-à-dire $(m_0)_1 = (m_0)_e$. Toutes les autres masses propres des corpuscules élémentaires compatibles avec une petite perturbation de F_0 sont alors données par $(m_0)_n = (m_0)_e n$ et sont donc les multiples entiers de la masse propre de l'électron.

Pour comprendre ces résultats, il est *absolument essentiel* de ne pas confondre la notion de masse propre $(m_0)_n$ des corpuscules élémentaires, que nous avons utilisée jusqu'à présent, avec la notion classique de masse propre pesante (ou d'inertie) des mêmes corpuscules. Considérons en effet l'équation de Laplace-Poisson généralisée qui correspond à (104) lorsque le champ est quasi statique :

$$(176) \quad \Delta_3^0 \gamma_{44} = z_g T - \lambda'_g.$$

On sait, d'après la théorie de la Relativité générale, qu'il faut poser :

$$(177) \quad z_g T = z_e \mu.$$

μ étant la densité de masse pesante ou gravitationnelle et z_e la cons-

tante einsteinienne de la gravitation, qui est reliée à la constante classique (K) newtonienne par la relation :

$$(178) \quad z_e = \frac{8\pi K}{c^2}.$$

On sait d'autre part que $\mu = \mu_{in}$, μ_{in} étant la densité de masse d'inertie. L'équation (176), appliquée *dans le voisinage* d'un corpuscule dont la masse pesante est m_p , donne la valeur suivante du potentiel gravifique propre γ'_{ii} créé par le corpuscule :

$$(179) \quad \gamma'_{ii} = \frac{1}{4\pi} \frac{z_e m_p}{r},$$

r étant la distance entre le centre du corpuscule et le point où l'on détermine le potentiel. La constante λ'_g est, comme nous l'avons dit plus haut (chap II, § 11), la différence entre la constante cosmologique λ_g qui correspond à l'Univers et la constante cosmologique λ'_g qui correspond à l'espace-temps F'_0 . La fonction T est donnée par (44), et il est clair, comme nous l'avons déjà fait ressortir plusieurs fois, que sa valeur ne dépend que des premiers termes du spectre de l'opérateur laplacien, c'est-à-dire des premières masses propres $(m_0)_n$ compatibles avec une petite déformation de F'_0 . Comme T_n tend très vite vers zéro quand $n \rightarrow \infty$, on peut, en première approximation, poser $T \equiv \sum_1^{\infty} T_n = T_1$, ce qui revient à dire qu'en première approximation la masse pesante m_p de (179) est égale à la masse propre de l'ensemble des électrons qui forment le corpuscule m_p , c'est-à-dire : $m_p = \nu_e (m_0)_1 = \nu_e (m_0)_e$, ν_e étant le nombre d'électrons dans m_p . Autrement dit, la masse propre pesante (ou d'inertie) de l'électron est presque identique à sa masse propre $(m_0)_1$ qu'on déduit de notre théorie cosmologique. [Pour ne pas confondre les masses propres $(m_0)_n$ des autres corpuscules avec leurs masses propres pesantes (ou d'inertie) qui, pour $n \rightarrow \infty$, tendent vers zéro alors que les $(m_0)_n$ tendent vers ∞ quand $n \rightarrow \infty$, nous dirons que les masses propres qui ont été et seront désignées par $(m_0)_n$ sont les *masses propres cosmologiques* des corpuscules *véritablement élémentaires* (ponctuels)].

Considérons maintenant *la moitié en contraction* de l'espace-temps de De Sitter-Lanzos, c'est-à-dire, d'après (97), l'hypersurface F'_0 pour $-\infty \leq \tau \leq 0$, et donnons-nous la petite perturbation qui représente la différence entre F'_0 et le contenant F de l'être mathématique non-arbitraire (contenant de l'Univers). A cette perturbation correspondent,

nous l'avons déjà montré, des corpuscules élémentaires dont les masses propres cosmologiques $(m_0)_n$ ne diffèrent que peu des valeurs (175). Par suite de la contraction de F_0 pour $-\infty \leq \tau \leq 0$ et du champ de gravitation créé par les corpuscules élémentaires, ceux-ci doivent nécessairement se rapprocher pendant cette phase en contraction de F_0 et se réunir pour former des corpuscules complexes non-élémentaires. Pour analyser ce processus, dont l'importance est énorme dans l'Univers, remarquons d'abord que, du fait que la contribution T_n des corpuscules élémentaires de masse propre cosmologique $(m_0)_n$ à la fonction T tend très vite vers zéro quand $n \rightarrow \infty$, le champ de gravitation qui existe autour de ces corpuscules tend très vite vers zéro quand la masse propre cosmologique $(m_0)_n$ croît. Il est donc clair que la tendance à la réunion des corpuscules élémentaires pour former des corpuscules lourds non-élémentaires diminue très vite en importance quand $n \rightarrow \infty$. On peut donc se borner, en première approximation, à considérer seulement la formation de corpuscules lourds non-élémentaires par réunion des corpuscules élémentaires qui correspondent aux tous premiers termes du spectre de l'opérateur laplacien (et spécialement par réunion d'électrons, qui sont les seuls corpuscules véritablement élémentaires dont la masse propre pesante ou d'inertie est appréciable). Le processus que nous analysons s'arrête forcément quand le corpuscule non-élémentaire qui résulte de la réunion de corpuscules élémentaires n'a plus autour de lui de champ de gravitation, ce qui arrive lorsque la masse pesante du corpuscule lourd compense la masse fictive qui correspond à la constante cosmologique λ'_g . Nous pouvons admettre que le processus est achevé partout dans l'Univers à la fin de la phase de contraction du F_0 correspondant, c'est-à-dire pour $\tau=0$ (voir la formule (97)). A ce moment là le champ de gravitation γ_{44} est nul

en chaque point de l'espace. Désignons par $\frac{w(r)}{r}$ la solution élémentaire de l'équation de Laplace $\Delta_3^0 \left[\frac{w(r)}{r} \right] = 0$, Δ_3^0 étant l'opérateur laplacien relatif à l'espace Σ_0^0 (section de l'espace-temps F_0 par l'hyperplan $\tau=0$). Alors, de l'équation (176) on déduit, en tenant compte de (177) et (178) :

$$(180) \quad \gamma_{44} = \frac{2K}{c^2} \int_{V_3^0} \mu \frac{w(r)}{r} dV_3^0 - \frac{\lambda'_g}{4\pi} \int_{V_3^0} \frac{w(r)}{r} dV_3^0,$$

V_3^0 étant le volume de Σ_0^0 , c'est-à-dire $V_3^0 = 2\pi^2 P_0^3$. Soit N_0 le nombre d'électrons de l'Univers pour $\tau=0$ et M_0 sa masse pesante totale

pour $\tau=0$. On a donc $M_0 = N_0(m_0)_e$. Remarquons qu'à la valeur de la première intégrale de (180) ne contribuent évidemment que les points où se trouvent les corpuscules, de sorte que l'on a, pour $\tau=0$:

$$\frac{2K}{c^2} \int_{V_3^0} \mu \frac{w(r)}{r} dV_3^0 = \frac{2KM_0}{c^2} \frac{1}{V_3^0} \int_{V_3^0} \frac{w(r)}{r} dV_3^0 = \frac{KM_0}{\pi^2 c^2 \mathbf{P}_0^3} \int_{V_3^0} \frac{w(r)}{r} dV_3^0.$$

Si donc, pour $\tau=0$, il n'y a pas de champ de gravitation, la relation (180) donne immédiatement:

$$\frac{KM_0}{\pi^2 c^2 \mathbf{P}_0^3} = \frac{\lambda'_g}{4\pi}$$

ou bien:

$$(181) \quad M_0 = \frac{\pi c^2 \mathbf{P}_0 a}{4K} \quad (\text{avec: } a = \mathbf{P}_0^2 \lambda'_g).$$

La relation (181) est analogue à la relation d'Einstein pour un Univers sphérique et statique, avec cette différence que la constante cosmologique d'Einstein est ici remplacée par la constante cosmologique qui correspond à la différence entre l'espace-temps réel et l'espace-temps V_0^0 .

Considérons maintenant l'équation électrostatique qui correspond à l'équation (111):

$$(182) \quad \Delta_3^0 \omega'_{44} = \chi^2 z_\omega U - \chi^2 \lambda'_\omega.$$

De cette équation on déduit:

$$(183) \quad \omega'_{44} = \frac{\chi^2 z_\omega}{4\pi} \int_{V_3} U \frac{w(r)}{r} dV_3 - \frac{\chi^2 \lambda'_\omega}{4\pi} \int_{V_3} \frac{w(r)}{r} dV_3.$$

Pour calculer la valeur de la première intégrale, posons:

$$(184) \quad \int_{v_e} U dx_e = \bar{U}_e$$

v_e étant le petit volume sphérique autour de chaque électron où la valeur de U diffère sensiblement de zéro (conception classique de l'électron, globule d'électricité). Écrivons maintenant l'équation classique du mouvement d'un électron de charge e et de masse pesante $(m_0)_e$ sous l'action d'un champ de Coulomb électrostatique pur, créé par une charge égale:

$$(185) \quad \frac{d^2 \vec{\varphi}^i}{dt^2} = \frac{e}{(m_0)_e} \frac{\partial A}{\partial \vec{\varphi}^i} = (K_\omega)_{el} \frac{e}{(m_0)_e} \cdot \frac{e}{r^2} \cos(\vec{r}, \vec{\varphi}^i)$$

A étant le potentiel et $(K_{\omega})_{cl}$ la constante de Coulomb. De l'équation (136) on déduit immédiatement la valeur suivante du potentiel $\frac{\omega_{44} c^2}{2\chi}$ en tenant compte de (184)

$$(186) \quad \frac{\omega_{44} c^2}{2\chi} = \frac{\chi c^2 z_{\omega} \bar{U}_c}{8\pi r}.$$

L'équation (137) du mouvement de l'électron sous l'action du champ de Coulomb pur (c'est-à-dire en faisant abstraction de γ_{ω}) s'écrit donc :

$$(187) \quad \frac{d^2 \xi^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2\chi} \frac{\partial \omega_{44}}{\partial \xi^i} = \frac{\chi c^2}{8\pi} z_{\omega} \frac{\bar{U}_c}{r^2} \cos(\vec{r}, \vec{\xi}^i).$$

En comparant cette équation à (185) on déduit :

$$(188) \quad \frac{\chi z_{\omega} \bar{U}_c}{(K_{\omega})_{cl} e} = 8\pi \frac{e}{(m_0)_c c^2}.$$

Les corpuscules lourds non-élémentaires qui résultent de la réunion des électrons pendant la phase en contraction de F_0 possèdent forcément, ou bien une charge nulle, ou bien une charge e égale à celle de l'électron. En tenant compte de (188) on peut donc écrire comme suit la première intégrale de (183) :

$$(189) \quad \frac{\chi^2 z_{\omega}}{4\pi} \int_{V_3} U \frac{w(r)}{r} dV_3 = \frac{2\chi e^2 (K_{\omega})_{cl}}{(m_0)_c c^2} \sum_1^{N_i} \frac{w(r_i) \delta_i}{r_i},$$

en désignant par N_i le nombre de corpuscules lourds qui existent dans V_3 et δ_i étant égal à zéro ou à ± 1 suivant qu'il s'agit d'un corpuscule neutre, ou positivement ou négativement électrisé. Nous avons vu que lorsque le processus de réunion des électrons pour former les corpuscules lourds est achevé (pour $\tau=0$), il n'y a pas de champ gravifique autour de ces corpuscules, plus exactement $\gamma_{44}=0$ pour $\tau=0$. Nous devons donc admettre aussi que pour $\tau=0$ il n'y a pas non plus de champ électrique, c'est-à-dire qu'il y a compensation entre le champ électrostatique propre des corpuscules et le champ qui correspond à la densité fictive de charge représentée par la constante $\chi^2 \gamma'_{\omega}$. Dans ces conditions, la formule (183) s'applique aussi bien à la totalité du volume V_3^0 qu'à l'une quelconque de ses parties. En posant donc $\omega'_{44}=0$ et en tenant compte de $\gamma'_{\omega} > 0$ et de la relation (188), on voit immédiatement que la charge d'une partie quelconque de V_3^0 doit être toujours positive, la densité de cette charge étant d'ailleurs constante dans V_3^0 .

Ceci signifie que *les corpuscules lourds sont, ou bien positivement électrisés (par la charge élémentaire $+e$), ou bien électriquement neutres*, le pourcentage de corpuscules électrisés étant constant dans V_3^0 . Le symbole δ_i de la formule (189) ne peut donc prendre, pour $\tau=0$, que les valeurs zéro et $+1$. Par suite du champ de Coulomb, les électrons négatifs ont tendance à se réunir aux électrons positifs, de sorte que les corpuscules lourds non élémentaires et positivement chargés sont évidemment *beaucoup moins nombreux* que les corpuscules lourds neutres. D'autre part, le fait d'être neutre ou électrisé pour un corpuscule lourd, *pris au hasard dans l'Univers*, peut évidemment être considéré *statistiquement*. Si nous désignons par N_l^0 le nombre total de corpuscules lourds (dus à la réunion d'électrons) qui se trouvent dans l'Univers pour $\tau=0$, alors (189), traitée statistiquement, devient pour cette valeur de τ :

$$(190) \quad \frac{2\chi e^2 (K_\omega)_{cl}}{(m_0)_e c^2} \left[\frac{w(r_1) \delta_1}{r_1} + \frac{w(r_2) \delta_2}{r_2} + \dots + \frac{w(r_{N_l^0}) \delta_{N_l^0}}{r_{N_l^0}} \right] = \\ = \frac{\chi e^2 (K_\omega)_{cl} \sqrt{N_l^0}}{\pi^2 (m_0)_e c^2 \mathbf{P}_0^3} \int_{V_3^0} \frac{w(r)}{r} dV_3^0.$$

Comme on a $\omega'_{41}=0$ pour $\tau=0$, la relation (183) donne immédiatement, en tenant compte de (190) et pour cette valeur de τ :

$$(191) \quad \frac{\sqrt{N_l^0}}{\mathbf{P}_0} = \frac{\pi \chi'_{\omega} \mathbf{P}_0^2 (m_0)_e c^2}{4 (K_\omega)_{cl} e^2}$$

Mais on a d'une part $\chi = \frac{1}{\mathbf{P}_0}$ et d'autre part $(K_\omega)_{cl}=1$ et $\chi'_\omega = b/\mathbf{P}_0$,

b étant un nombre pur voisin de 1. La relation (191) s'écrit donc :

$$(192) \quad \frac{\sqrt{N_l^0}}{\mathbf{P}_0} = \frac{\pi b}{4} \cdot \frac{(m_0)_e c^2}{e^2},$$

et est donc identique, au facteur constant $\pi b/4$ près qui ne change pas l'ordre de grandeur de N_l^0 , à la célèbre relation d'Eddington. Nous avons donc montré que cette relation est une conséquence de notre théorie cosmologique, ce qui à notre avis est un résultat très important. Un simple coup d'oeil sur la relation (192) montre qu'elle exprime l'égalité de l'énergie de masse et de l'énergie électrique d'un électron placé dans le champ électrostatique propre de l'ensemble des corpuscules lourds de l'Univers pour $\tau=0$.

Désignons par m_p la masse pesante des corpuscules lourds qui résultent de la réunion des électrons. Pour $\tau=0$, on a $M_0=N_0(m_0)_e= N_l^0 m_p$, $(m_0)_e$ étant la masse de l'électron. Appliquons alors les formules précédentes pour calculer les valeurs numériques de M_0 (masse totale de l'Univers pour $\tau=0$), de N_0 , N_l^0 et surtout de l'important rapport $m_p/(m_0)_e$ de la masse des corpuscules lourds non élémentaires à la masse de l'électron. Nous avons, par exemple dans le système d'unités c. g. s., les valeurs numériques suivantes :

$$(193) \quad \left\{ \begin{array}{l} K=6,6 \times 10^{-8} (gr)^{-1} (cm)^3 (sec)^{-2}; \quad c=3 \times 10^{10} (cm) (sec)^{-1} \\ (m_0)_e=9,02 \times 10^{-28} gr; \quad e=4,8 \times 10^{-10} (u. e. s.) [(gr)^{\frac{1}{2}} (cm)^{\frac{3}{2}} (sec)^{-1}]. \end{array} \right.$$

Quant à P_0 , les observations astronomiques et toutes les études cosmologiques d'Einstein, de De Sitter, de Friedmann et de Lemaître, etc., s'accordent pour lui assigner l'ordre de grandeur 10^8-10^9 parsecs, c'est-à-dire 10^{27} cm. Des formules (181) et (192) on déduit immédiatement :

$$(194) \quad \frac{m_p}{(m_0)_e} = \frac{4a}{\pi b^2} \cdot \frac{e^4}{K (m_0)_e^2 c^2 P_0}.$$

En tenant compte des valeurs numériques précédentes on trouve donc :

$$(195) \quad \text{Ordre de grandeur de } \frac{m_p}{(m_0)_e} = \frac{4a}{\pi b^2} \times 10^3.$$

Comme on a $dP/d\tau=0$ pour $\tau=0$, nous admettrons que la masse totale de l'Univers pour $\tau=0$ est égale à la masse totale d'un Univers sphérique et statique d'Einstein de même rayon P_0 . La relation (181) donne alors $a=1$. On connaît par ailleurs la relation ($\gamma'_\omega=\gamma'_g/\gamma$), de sorte que $\gamma'_\omega \equiv b/P_0 = a/P_0 \gamma$, d'où : $b=a=1$. Alors (195) donne :

$$(196) \quad \text{Ordre de grandeur de } \frac{m_p}{(m_0)_e} = 10^3,$$

et pour obtenir la valeur expérimentale exacte $m_p/(m_0)_e=1847$, il suffit de poser dans (194) la valeur parfaitement admissible :

$$(197) \quad P_0=530 \times 10^6 \text{ parsecs} = 1,6 \times 10^{27} \text{ cm}.$$

Les mêmes valeurs numériques donnent d'ailleurs pour N_0 (nombre total d'électrons de l'Univers pour $\tau=0$) et pour N_l^0 (nombre total de corpuscules lourds non élémentaires de l'Univers pour $\tau=0$) en utili-

sant la formule (181) avec $a=1$ et les relations $M_0=N_0(m_0)_e=N_l^0 m_p$:

$$(198) \quad N_0 = \frac{\pi c^2 P_0}{4K(m_0)_e} = 6 \times 10^{82}; \quad N_l^0 = \frac{\pi c^2 P_0}{4K m_p} = 3,2 \times 10^{79}$$

nombres dont l'ordre de grandeur est précisément celui que l'on admet généralement.

Nous avons ainsi démontré par notre théorie cosmologique :

1° *que des corpuscules lourds comme les protons, les neutrons et les atomes d'hydrogène (ceux-ci n'étant en somme que des neutrons de plus grandes dimensions) existent nécessairement dans l'Univers ;*

2° *que ces corpuscules lourds ont précisément une masse théorique égale à la masse expérimentale des protons, neutrons et atomes d'hydrogène et doivent être identifiés avec eux.*

3° *que les protons, neutrons (et atomes d'hydrogène) ne sont pas des corpuscules véritablement élémentaires (ponctuels) et sont formés par des électrons réunis intimement.*

4° *qu'il n'y a pas des protons ayant une charge électrique négative, ou du moins qu'il n'y en avait pas pour $\tau=0$, c'est-à-dire lorsque $\mathbf{P}(\tau)$ était égal à \mathbf{P}_0 .*

On voit que l'existence des protons, neutrons et atomes d'hydrogène est essentiellement conditionnée par l'existence des deux constantes cosmologiques λ_g et λ_ω des équations fondamentales (19 a) et (19 b). La constante cosmologique einsteinienne λ_g est d'ailleurs insuffisante pour démontrer l'existence et les propriétés des corpuscules lourds ; il faut lui associer l'autre constante cosmologique λ_ω que la Relativité n'envisage pas, parce qu'elle n'étudie que les propriétés de la métrique interne. Ce fait est à mon avis une raison suffisante pour ajouter le système (19 b) au système einsteinien (19 a), indépendamment même de notre principe fondamental sur l'identité de l'existence physique et de l'existence mathématique non-arbitraire, dont la traduction mathématique est précisément le système d'équations (19 a)+(19 b).

La masse des protons, neutrons et atomes d'hydrogène, que nous avons déduit théoriquement, est, d'après le raisonnement même qui démontre l'existence de ces corpuscules, une limite supérieure pour la masse pesante des corpuscules lourds non-élémentaires qui peuvent exister dans l'Univers. En parlant de corpuscules lourds non-élémentaires nous ne pensons évidemment pas aux noyaux des atomes, qui ne sont que des ensembles de protons et de neutrons, réunis par l'inter-

action d'échange (de mésons) entre protons et neutrons. Si à chaque moment du temps cosmique le processus de réunion d'électrons qui donne lieu aux corpuscules lourds (protons et neutrons) était complètement achevé comme pour $\tau=0$, alors il n'y aurait jamais dans l'Univers des corpuscules de masse pesante intermédiaire entre celle de l'électron et celle des protons et neutrons. L'existence, expérimentalement bien établie, des « électrons lourds » (appelés aussi mésons), prouve justement que le processus fondamental dont il est question n'était pas complètement achevé pour $\tau=0$ (c'est-à-dire lorsque $\mathbf{P}=\mathbf{P}_0$), ou bien qu'il ne l'est plus. Les mésons rentrent donc facilement dans notre théorie et doivent nécessairement être interprétés *comme des protons et neutrons incomplets, très probablement en voie de désagrégation (perdant donc peu à peu leurs électrons constituants)*.

Nous ne voulons pas développer dans ce mémoire les conséquences cosmogoniques des résultats de ce paragraphe et passons à la détermination de la valeur du coefficient \mathfrak{A} de la relation (169) entre les charges propres des corpuscules véritablement élémentaires et les valeurs propres de l'opérateur laplacien associé à la forme métrique externe de l'Univers. Pour faire cette détermination, il suffit d'utiliser la relation (192) et de se rappeler que l'on a (175) dans F_0 et $\beta_n = \mathbf{P}_0 \alpha_n$. On obtient alors immédiatement :

$$(199) \quad \mathfrak{A} = \frac{b}{16 \pi \sqrt{N_l^0}}$$

ou bien si on pose $b=1$ comme précédemment :

$$(200) \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{16 \pi \sqrt{N_l^0}}.$$

Il va de soi qu'il ne faut pas confondre les charges électriques propres des corpuscules élémentaires, données par (170), avec les charges électriques au sens classique, de même qu'il est essentiel de ne pas confondre les masses propres cosmologiques $(m_0)_n$ avec les masses pesantes (ou d'inertie) classiques. Les charges électriques au sens classique $[(e_n)_{cl}]$ des corpuscules élémentaires sont reliées à la fonction U (appelée énergie électromagnétique externe dans le § 3) par la formule :

$$(201) \quad \frac{1}{8\pi} \left| \frac{\chi \omega \bar{U}_n}{(K\omega)_{cl} (e_n)_{cl}} \right| = \frac{|e|}{(m_0)_e c^2}$$

qui est une généralisation immédiate de (188) et où e et $(m_0)_e$ représentent comme toujours la charge et la masse (au sens classique) de

l'électron. On voit donc que les charges au sens classique tendent rapidement vers zéro quand $n \rightarrow \infty$, puisque tel est le cas pour U_n , contribution de e_n à la valeur de U . Les charges e_n (qu'on peut appeler charges propres élémentaires cosmologiques) tendent au contraire vers l'infini quand $n \rightarrow \infty$. Comme les masses propres cosmologiques, les charges électriques au sens classique $(e_n)_{cl}$ ne sont sensibles que pour les toutes premières valeurs de l'indice de numérotage des valeurs propres (α_n, β_n) des opérateurs laplaciens, et spécialement pour $n=1$, qui correspond à l'électron. C'est donc seulement pour l'électron que la charge au sens classique, donnée, d'après (201), par :

$$(e_n)_{cl} = \gamma \chi_{\omega} (m_0)_c c^2 \bar{U}_n \frac{1}{8\pi |e|}$$

se confond pratiquement avec la charge propre cosmologique; c'est-à-dire :

$$e \equiv (e_1)_{cl} \approx e_1$$

et nous avons d'ailleurs posé $e = e_1$ dans la détermination du coefficient \mathcal{A} de (170).

Avant de finir ce paragraphe il est intéressant de calculer le pourcentage (constant dans l'espace pour $\tau=0$) de protons, c'est-à-dire le rapport $\frac{N_p^0}{N_l^0}$, N_p^0 étant le nombre total de protons dans l'Univers pour $\tau=0$. De la relation (181) et de l'équation (183) dans laquelle on pose $\omega'_{ii} = 0$, puisque $\tau=0$, on déduit immédiatement :

$$\frac{N_p^0}{N_l^0} = \frac{1}{N_l^0} \pi \mathbf{P}_0^3 \gamma \chi_{\omega} (m_0)_c c^2 = \frac{\pi b}{4N_l^0} \mathbf{P}_0 \frac{(m_0)_c c^2}{e^2},$$

et la relation (192) donne alors ($a=b=1$) :

$$(202) \quad \frac{N_p^0}{N_l^0} = \frac{1}{\sqrt{N_l^0}}$$

c'est-à-dire la valeur numérique suivante pour N_p^0/N_l^0 :

$$(203) \quad \frac{N_p^0}{N_l^0} = 1,7 \times 10^{-10}.$$

Il y avait donc environ 1 proton pour $0,6 \times 10^{10}$ corpuscules lourds (neutrons + atomes d'hydrogène + protons) dans l'Univers au début de sa phase expansive.

IV — MÉCANIQUE ONDULATOIRE COSMOLOGIQUE

1. Ondes et corpuscules. Principes fondamentaux de la mécanique ondulatoire cosmologique. La dualité ondes-corpuscules, qui est fondamentale pour la mécanique ondulatoire «classique», se retrouve dans notre théorie cosmologique et permet d'en déduire une mécanique ondulatoire relativiste et cosmologique en accord avec la relativité générale. On doit remarquer dès maintenant qu'il y a dans la théorie cosmologique deux sortes de fonctions ondulatoires pour «un corpuscule» de masse propre $(m_0)_n$ et de charge électrique propre $\pm e_n$ (ce sont d'une part les fonctions propres Ψ_{mn} de l'opérateur laplacien Δ qui correspond à la métrique interne et à $(m_0)_n$, et d'autre part les fonctions propres Φ_{mn} de l'opérateur laplacien Δ_ω qui correspond à la métrique externe et à $\pm e_n$), tandis que la mécanique ondulatoire classique ne considère que des fonctions d'onde d'une seule sorte.

Les Ψ_{mn} et Φ_{mn} satisfont, comme on sait, aux équations (38) et (50). Les équations (38) peuvent évidemment être interprétées comme des «équations de Dirac» généralisées, compatibles avec la relativité générale, tandis que les équations (50) sont des «équations de Dirac» généralisées relatives à la forme métrique externe, d'où nous avons déduit toutes les grandeurs électromagnétiques.

Il faut attirer ensuite l'attention sur un autre point essentiel, à savoir : tandis que l'introduction des quatre fonctions d'onde qui satisfont aux équations de Dirac dans la mécanique ondulatoire «classique» de l'électron est arbitraire et ne se justifie que par ses conséquences, l'existence de quatre fonctions d'onde linéairement indépendantes satisfaisant à des équations de Dirac généralisées, pour chaque valeur propre α_n du laplacien ou β_n de l'opérateur Δ_ω , est un des points fondamentaux de la théorie cosmologique et fait l'objet de l'un de ses théorèmes.

Comme les fonctions d'onde Ψ_{mn} et Φ_{mn} sont des fonctions propres non-arbitraires des opérateurs Δ et Δ_ω , toute opération de normalisation qu'on ferait subir à ces fonctions leur ferait perdre évidemment leur caractère absolument non-arbitraire (c'est-à-dire ferait en sorte que leur valeur en chaque point ne pourrait plus être entièrement déterminée par la métrique, interne ou externe, de l'espace-temps et par la connaissance de la surface frontière de l'espace-temps). Les fonctions d'onde ne pouvant être soumises à des opérations de normalisation, il est impossible de leur accorder, comme aux fonctions d'onde de la mécanique ondulatoire classique, le caractère de fonctions de probabilité de présence des masses élémentaires $(m_0)_n$ ou des charges

électriques élémentaires $\pm e_n$). Ceci est tout-à-fait naturel, puisqu'on ne voit pas comment pourraient intervenir des fonctions de probabilité pour décrire les phénomènes essentiels dans un Univers que la théorie cosmologique identifie complètement à l'être mathématique non-arbitraire. Il serait absurde d'accorder aux Ψ_{mn} et aux Φ_{mn} la signification de fonctions de probabilité, alors qu'on forme avec les Ψ_{mn} le tenseur T_{ik} d'énergie-quantité de mouvement et avec les Φ_{mn} le tenseur électromagnétique U_{ik} des équations fondamentales (19 a) et (19 b) de l'être mathématique non-arbitraire.

Nous avons appris (voir les §§ 6 et 10 du chap. II et tout le chap. III) à déduire des Ψ_{mn} et des Φ_{mn} d'importantes grandeurs scalaires, vectorielles, tensorielles, dont nous avons donné l'interprétation physique. En particulier, toutes les grandeurs électromagnétiques sont formées uniquement avec les Φ_{mn} et les valeurs propres correspondantes β_n (charges électriques propres). Mais nous devons maintenant chercher à déterminer la signification des fonctions d'onde Ψ_{mn} et Φ_{mn} au point de vue de la présence des corpuscules élémentaires dans un élément de volume de l'Univers. La réponse à cette question va résoudre non seulement la question de l'interprétation physique des fonctions d'onde en elles-mêmes, mais encore le problème de la «position des corpuscules».

Pour résoudre ce problème, il faut d'abord indiquer les équivalents cosmologiques des deux principes fondamentaux de la mécanique ondulatoire ¹:

Premier principe. Les valeurs que peut prendre une grandeur (propriété intrinsèque ou extrinsèque) attachée à un corpuscule élémentaire sont les valeurs propres de l'opérateur linéaire et hermitique correspondant.

Remarque. Il faut distinguer, comme nous l'avons déjà dit, entre opérateurs complets (ou spatio-temporels) et opérateurs incomplets. Dans le premier cas, les valeurs propres correspondantes représentent des propriétés intrinsèques des corpuscules élémentaires; dans l'autre cas, les valeurs propres correspondantes représentent des propriétés extrinsèques des corpuscules élémentaires.

Comme exemples de propriétés intrinsèques, on peut citer les deux plus importantes: la masse propre $(m_0)_n$ et la charge électrique propre $(\pm e_n)$ qui correspondent respectivement aux opérateurs Δ et Δ_ω

¹ Cf. par exemple les ouvrages de L. de Broglie, surtout «L'électron magnétique», pag. 209 et suivantes, Hermann, Paris, 1934.

et que nous avons étudié en détail. Comme exemples de propriétés extrinsèques, on peut citer la position des corpuscules élémentaires, leur quantité de mouvement, leur spin, les fréquences propres de leurs vibrations dans un système, etc., chaque propriété correspondant à un opérateur incomplet que nous déterminerons.

Avant d'énoncer le second principe fondamental de la mécanique ondulatoire cosmologique, il est nécessaire de définir l'intensité des différentes valeurs possibles d'une grandeur «attachée» à un corpuscule. Considérons par exemple le spectre de raies de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire le spectre des valeurs propres de l'opérateur qui correspond à la grandeur «fréquences propres de vibration de l'électron» dans un système formé par un électron négatif et un proton. Pour caractériser complètement le spectre, il faut connaître non seulement la fréquence des raies mais aussi leur intensité, ceci en faisant abstraction de leur largeur. On peut donc dire qu'à chaque terme du spectre des valeurs propres de l'opérateur «fréquence des vibrations de l'électron dans l'atome d'hydrogène» est attaché un nombre (ou une fonction) qui est l'intensité de chaque valeur propre de l'opérateur fréquence. Ce fait est général, et on peut dire qu'à chaque valeur possible d'une grandeur attachée à un corpuscule élémentaire, et qui correspond à un certain opérateur, est associé un nombre (ou une fonction) qui représente l'intensité des différentes valeurs possibles de la grandeur, c'est-à-dire l'intensité des différents termes du spectre (discontinu et continu) des valeurs propres de l'opérateur correspondant.

Considérons maintenant les quatre fonctions propres Ψ_{mn} relatives à la valeur propre α_n du laplacien. Ces fonctions peuvent s'écrire : $\Psi_{mn} = \Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m)$, m étant au second membre une variable discontinue pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3, 4. Soit O un opérateur complet ou incomplet dont nous désignons par a les valeurs propres et qui peut agir non seulement sur les variables spatio-temporelles, mais encore sur la variable discontinue m . Supposons que Ψ_n admet un développement suivant les fonctions propres φ de O . En désignant par ξ l'ensemble des variables continues et discontinues que O fait intervenir, et par τ l'ensemble des variables que O ne fait pas intervenir, le développement en question peut s'écrire :

$$(204) \quad \Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = \sum_{\mu, \nu} c_{\mu\nu}^n(\tau) \varphi_{\mu\nu}(\xi) + \sum_{\delta a, \nu} c_{\nu}^n(a, \tau) \left[\frac{1}{\delta a} \int_a^{a+\delta a} \varphi_{\nu}(a, \xi) da \right] \delta a,$$

l'intégrale se rapportant au spectre continu, l'indice μ servant à numé-

roter les valeurs propres du spectre discontinu de O et l'indice ν les fonctions propres linéairement indépendantes de O pour chacune de ses valeurs propres. De même, nous pourrons écrire comme suit le développement des quatre fonctions propres Φ_{mn} de l'opérateur Δ_ω suivant les fonctions propres de O :

$$(205) \quad \Phi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = \sum_{\mu, \nu} (c_\omega^\mu)_{\mu\nu} [\eta] \varphi_{\mu\nu}(\xi) + \sum_{\delta a, \nu} (c_\omega^\nu)_\nu [a, \eta] \left[\frac{1}{\delta a} \int_a^{a+\delta a} \varphi_\nu(a, \xi) da \right] \delta a.$$

Convenons maintenant de représenter par $\int dm$ une sommation par rapport à l'indice m lorsque n comprend cette variable discontinue, c'est-à-dire lorsque O n'agit pas sur m . Ceci étant dit, le second principe de la mécanique ondulatoire cosmologique s'énonce comme suit, pour les corpuscules élémentaires de fonctions d'onde Ψ_{mn} et Φ_{mn} :

Second principe. 1^o). Dans le spectre discontinu d'un opérateur linéaire et hermitique O qui correspond à une grandeur non électromagnétique (grandeur mécanique) attachée aux corpuscules, l'intensité de l'une quelconque des valeurs possibles de cette grandeur est la somme $\int \sum_\nu |c_{\mu\nu}^\nu(\eta)|^2 dm$ des carrés des modules des coefficients de $\varphi_{\mu\nu}$ dans le développement de Ψ_n suivant les fonctions propres de O . Dans le spectre continu, l'intensité des valeurs de la grandeur, comprises entre a et $a + \delta a$, est la quantité $\int \sum_\nu |c_\nu^\nu(a, \eta)|^2 \delta a dm$.

2^o). Dans le spectre discontinu d'un opérateur linéaire et hermitique O_ω qui correspond à une grandeur électromagnétique attachée aux corpuscules, l'intensité de l'une quelconque des valeurs possibles de cette grandeur est la somme $\int \sum_\nu |(c_\omega^\nu)_{\mu\nu} [\eta]|^2 dm$ des carrés des modules des coefficients de $\varphi_{\mu\nu}$ dans le développement de Φ_n suivant les fonctions propres de O_ω . Dans le spectre continu, l'intensité des valeurs de la grandeur, comprises entre a et $a + \delta a$, est la quantité $\int \sum_\nu |(c_\omega^\nu)_\nu [a, \eta]|^2 \delta a dm$.

Considérons, par exemple, l'intensité des masses propres des corpuscules élémentaires, c'est-à-dire l'intensité des valeurs propres du laplacien. Dans ce cas, le développement (204) se réduit à:

$$\Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = \Psi_{mn}(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

et l'on a pour expression de l'intensité de la masse propre $(m_0)_n$ dans le spectre des masses propres :

$$\int \sum_m |c_{mn}^n|^2 dm = 4.$$

De même l'intensité de la charge électrique propre e_n dans le spectre des charges électriques propres (opérateur Δ_ω) est donnée par :

$$\int \sum_m |(e_\omega)_{mn}^n|^2 dm = 4.$$

Nous pouvons maintenant traiter le problème de la «*position des corpuscules*». Cherchons d'abord les valeurs propres de l'opérateur qui correspond à la grandeur extrinsèque «*coordonnée x^i d'une masse propre élémentaire $(m_0)_n$* ». Cet opérateur n'est autre que la coordonnée x^i elle-même et l'équation de ses fonctions et valeurs propres s'écrit :

$$x^i \varphi = a^i \varphi.$$

La solution est la fonction de Dirac $\delta(x^i - a^i)$ dont on connaît les propriétés. L'opérateur x^i a donc un spectre purement continu (ce qui est évident, puisque les masses propres élémentaires peuvent prendre toutes les positions), et comme les «*différentielles propres*» :

$$\frac{1}{\delta a^i} \int_{a^i}^{a^i + \delta a^i} \delta(x^i - a^i) da^i$$

forment un système de fonctions orthonormales complet, on peut écrire

$$\Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = \Psi_n(a^i, \eta) = c^n(a^i, \eta)$$

D'après le second principe, l'intensité des valeurs de la coordonnée x^i des masses élémentaires $(m_0)_n$, comprises entre a^i et $a^i + \delta a^i$, est alors donnée par :

$$\int |c^n(a^i, \eta)|^2 \delta a^i dm \equiv \sum_m |c^n(a^i, \eta)|^2 \delta a^i = \sum_m |\Psi_n(a^i, \eta)|^2 \delta a^i = \sum_m \Psi_{mn}^2 \delta a^i.$$

Cette quantité est donc l'intensité de la présence d'un corpuscule élémentaire (de masse propre $(m_0)_n$) entre $x^i = a^i$ et $x^i = a^i + \delta a^i$. L'intensité de la présence d'un corpuscule élémentaire de masse propre $(m_0)_n$ dans l'élément de volume d'espace $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3$ autour du point $P(x^1, x^2, x^3, x^4)$ est donc la quantité $\sum_m \Psi_{mn}^2(x^1, x^2, x^3, x^4) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3$ et l'on peut dire que $\sum_m \Psi_{mn}^2$ est la densité d'intensité de présence d'un corpuscule élémentaire.

taire de masse propre $(m_0)_n$. Il est alors évident que les points des sections spatiales de l'espace-temps qui sont effectivement occupés, pour une certaine valeur de x^4 , par les corpuscules élémentaires de masse propre $(m_0)_n$ sont les points où la densité d'intensité de présence $\sum_m \Psi_{mn}^2$ est maxima. Ces points engendrent, dans l'espace-temps, des lignes, qui sont les lignes d'Univers ou trajectoires d'espace-temps des corpuscules élémentaires de masse propre $(m_0)_n$.

Le raisonnement précédent peut être répété sans changement avec les fonctions propres Φ_{mn} pour arriver à la notion de *densité d'intensité de présence des corpuscules élémentaires de charge électrique propre* $\pm e_n$. Cette densité est évidemment la fonction $\sum_m \Phi_{mn}^2$, de sorte que les points des sections spatiales de l'espace-temps qui sont effectivement occupés, pour une certaine valeur de x^4 , par les corpuscules élémentaires de charge électrique propre $\pm e_n$ sont les points où la fonction $\sum_m \Phi_{mn}^2$ est maxima. Ces points engendrent donc, dans l'espace-temps, les lignes d'Univers des corpuscules élémentaires de charge électrique propre $\pm e_n$.

Du fait que les maxima de $\sum_m \Phi_{mn}^2$ ne coïncident que fortuitement avec les maxima de $\sum_m \Psi_{mn}^2$ sur les sections spatiales de l'espace-temps, on peut déduire de ce qui précède un très important résultat: *les points des sections spatiales de l'espace-temps où se trouvent les masses propres élémentaires $(m_0)_n$ ne coïncident que fortuitement avec les points où se trouvent les charges électriques élémentaires $\pm e_n$* . En d'autres termes, le corpuscule «élémentaire» électrisé classique, doué d'une certaine masse propre non-nulle et d'une charge électrique propre est toujours en réalité *un couple* de corpuscules ponctuels véritablement élémentaires, l'un avec une masse propre $(m_0)_n$ et sans charge électrique, l'autre avec une charge électrique $\pm e_n$ et sans masse propre, ces deux corpuscules ne coïncidant qu'accidentellement mais restant en général très rapprochés l'un de l'autre, comme nous allons le voir immédiatement. Considérons les deux équations (45) et (48) des fonctions propres des opérateurs Δ et Δ_ω :

$$(45) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial x^k} \right) = \alpha_n \Psi_{mn},$$

et:

$$(48) \quad \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{\omega} \omega^{ik} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x^k} \right) = \beta_n \Phi_{mn}.$$

On sait que les α_n sont proportionnels aux carrés des masses propres élémentaires et que les β_n sont proportionnels aux carrés des charges propres élémentaires. Supposons que l'espace-temps satisfait à la condition (158) : $\omega_{ik} = \gamma g_{ik}$. L'équation (48) devient.

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x^k} \right) = \chi_i \beta_n \Phi_{mn},$$

de sorte que ses fonctions propres deviennent identiques aux fonctions propres de l'équation (45) et d'autre part $\alpha_n = \gamma \beta_n$. Dans ce cas, la densité d'intensité de présence des masses propres élémentaires est égale en chaque point de l'espace-temps à la densité d'intensité des charges électriques élémentaires. En d'autres termes, tout corpuscule élémentaire de masse propre $(m_0)_n$ et sans charge coïncide alors constamment avec un corpuscule élémentaire sans masse propre et de charge électrique propre $\pm e_n$ (pour la même valeur de n), de sorte que la notion de corpuscule élémentaire électrisé classique se confond, dans ces conditions, avec la conception de corpuscule élémentaire qui découle de la théorie cosmologique. Or, on sait que l'espace-temps satisfait effectivement, en première approximation, à la condition $\omega_{ik} = \gamma g_{ik}$, ce qui permet d'affirmer qu'en général à un point où se trouve un corpuscule neutre de masse $(m_0)_n$ correspond un point très rapproché où se trouve un corpuscule sans masse et de charge $\pm e_n$ (pour la même valeur de n), l'éloignement de ces deux points étant d'ailleurs d'autant plus grand que les variations de la courbure moyenne de l'espace-temps sont plus grandes.

Pour compléter l'étude de la position des corpuscules élémentaires, il faut déterminer quels sont, parmi les maxima de la densité d'intensité de présence $\sum_m \Phi_{mn}^2$ des charges électriques élémentaires, ceux qui sont occupés par des corpuscules élémentaires de charge négative $-e_n$ et ceux qui, par contre, sont occupés par des corpuscules élémentaires de charge $+e_n$ (égale et de signe contraire). Considérons à nouveau l'équation électromagnétique (168). La densité de charge électrique étant, d'après cette équation, égale, à un facteur constant positif près, à la quantité $-\sqrt{\beta_n} \Phi_{mn} \epsilon_0^4 \epsilon_{nq}^4 \Phi_n^m$, on voit immédiatement qu'un maximum de la densité d'intensité de présence des charges élémentaires est occupé par un corpuscule à charge négative lorsque la fonction $\Phi_{mn} \epsilon_0^4 \epsilon_{nq}^4 \Phi_n^m$ est positive et inversement. Prenons les axes «géodésiques» locaux q^1, q^2, q^3 dans leur orientation principale relative à la valeur propre β_n de l'opérateur Δ_ω ; les supports des axes locaux q^1 et q^4 sont alors en coïncidence et nous dirigerons q^1 vers les «temps propres» croissants

des charges. Dans ces conditions, la fonction $\Phi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_{nq}^i \Phi_n^m$ devient égale en valeur absolue à la densité d'intensité de présence $\sum_m \Phi_{mn}^2$ des corpuscules, car on a maintenant $\epsilon_0^i \epsilon_{nq}^i = \pm 1$, ou bien, d'après la transformation (51): $\frac{\partial q^i}{\partial q_n^i} = \pm 1$. Un maximum de la densité d'intensité de présence des charges est donc occupé par un corpuscule élémentaire de charge $-e_n$ (ou $+e_n$) si l'on a en ce maximum $\frac{\partial q^i}{\partial q_n^i} = +1$ (ou $\frac{\partial q^i}{\partial q_n^i} = -1$).

Remarquons qu'avec cette orientation des axes locaux q^i , la contribution des corpuscules à la densité partielle (U_n^{4i}) d'énergie électromagnétique «externe» est nulle, d'après l'expression (55) du tenseur U^{ik} , mais il y a forcément autour des corpuscules, et dans leur voisinage immédiat, une surface fermée, presque sphérique, où U_n^{4i} est maximum. Il y a donc autour des corpuscules une sorte de «barrière» d'énergie marquant la limite de ce que la conception classique désigne par corpuscule élémentaire, alors que le véritable corpuscule élémentaire doit être considéré comme rigoureusement ponctuel.

D'après l'équation (168), l'espace-temps peut être divisé en régions occupées par des charges négatives et en régions occupées par des charges positives. Cette distribution continue de charges est en quelque sorte l'«écho» de la présence des charges des corpuscules élémentaires, mais n'est pas une fonction ou grandeur «attachée» aux corpuscules, au même titre que les charges propres $\pm e_n$ (Voir § 2).

Il en est de même pour les masses propres $(m_0)_n$. Si nous considérons en effet l'équation de continuité des masses (82), qu'on peut écrire comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial \rho^i} (\sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^i \Psi_n^m) = -\text{div}_s (\sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^i \Psi_n^m)$$

on voit immédiatement que tout se passe comme si des masses de densité égale, à un facteur constant positif près, à $\sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^i \Psi_n^m$ se trouvaient répandues d'une manière continue dans l'espace-temps. On peut du reste, d'après (39), admettre que certains maxima de la densité d'intensité de présence des masses propres (ceux pour lesquels on a $\Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^i \Psi_n^m > 0$) sont occupés par des corpuscules élémentaires de masse propre positive $+(m_0)_n$, tandis que d'autres maxima (ceux pour lesquels on a $\Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^i \Psi_n^m < 0$) sont occupés par des corpuscules élémentaires de masse propre négative $-(m_0)_n$. D'une manière analogue à ce que nous avons fait pour les corpuscules d'électricité, prenons

les axes géodésiques locaux $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ dans leur orientation principale $\varphi_n^1, \varphi_n^2, \varphi_n^3$ relative à la valeur propre α_n du laplacien ; les supports des axes locaux φ^i et φ^n sont alors en coïncidence et nous dirigerons φ^4 vers les « temps propres » croissants des masses. Dans ces conditions, la fonction $\Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^m \Psi_n^m$ devient égale, en valeur absolue, à la densité d'intensité de présence $\sum_m \Psi_{mn}^2$ des corpuscules, car on a maintenant $\epsilon_0^i \epsilon_n^i = \pm 1$,

ou bien, d'après (39) : $\frac{\partial \varphi^4}{\partial \varphi_n^4} = \pm 1$. Un maximum de la densité d'intensité

de présence des masses élémentaires est donc occupé par un corpuscule de masse propre $+(m_0)_n$ (ou $-(m_0)_n$) si l'on a en ce maximum $\frac{\partial \varphi^4}{\partial \varphi_n^4} = +1$ (ou $\frac{\partial \varphi^4}{\partial \varphi_n^4} = -1$). Remarquons aussi qu'avec cette orientation

des axes locaux φ^i , la contribution des masses propres à la densité partielle (T_n^{44}) d'énergie est nulle sur les corpuscules, d'après l'expression (44) du tenseur T^{ik} , mais il y a forcément autour des corpuscules et dans leur voisinage immédiat une « barrière » d'énergie (surface fermée sur laquelle T_n^{44} est maximum).

Les équations (130) montrent que la densité de masse (positive et négative) joue par rapport au champ des « moments de rotation et de translation des masses » le même rôle que la densité de charge par rapport au champ électromagnétique. L'existence de masses propres positives et négatives permet seule d'ailleurs de comprendre le phénomène, expérimentalement bien établi, de l'apparition et de la disparition par paires de corpuscules de même masse (absolue) et de charges électriques contraires.

La solution que nous venons de donner du problème de la position des corpuscules assigne à chaque corpuscule élémentaire une position et une vitesse bien définies à chaque instant. Ce fait est cependant parfaitement compatible, comme nous le verrons plus loin, avec les relations d'Heisenberg sur les incertitudes inévitables dans les *mesures simultanées* de la position et de la vitesse d'un corpuscule élémentaire. Il faut enfin souligner le fait que la théorie cosmologique établit une distinction radicale entre masse et électricité. Il n'y a pas de corpuscule élémentaire ayant à la fois une masse et une charge électrique, sauf si l'espace-temps satisfaisait rigoureusement à $\omega_{ik} = \gamma g_{ik}$ ($\gamma = \text{constante}$), mais même alors il faudrait plutôt dire que les corpuscules élémentaires neutres et de masse propre non nulle occuperaient les mêmes points de l'espace-temps que les corpuscules élémentaires dénués de masse et de charge électrique non nulle.

2. Grandeurs attachées aux corpuscules élémentaires et champs d'espace-temps correspondants. Dans le paragraphe précédent, nous avons déjà rencontré deux champs d'espace-temps qui correspondent aux masses propres et deux autres champs qui correspondent aux charges propres. Il s'agit des densités d'intensité de présence $\sum_m \Psi_{mn}^2$ et $\sum_m \Phi_{mn}^2$ des masses et des charges et des densités de masse $\sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^i \Psi_{mn}^m$ et de charge électrique $\sqrt{\beta_n} \Phi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^i \Phi_{mn}^m$. Ce fait est général. A chaque opérateur dont les valeurs propres sont, d'après le premier principe de la mécanique ondulatoire cosmologique, les valeurs possibles d'une propriété ou grandeur attachée aux corpuscules, correspondent des champs d'espace-temps (densités de valeur moyenne). Soit O l'opérateur qui correspond à la propriété mécanique α des corpuscules et appliquons l'opération (76) aux quatre fonctions propres $\Psi_n = \Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m)$ de l'opérateur laplacien (fonctions d'onde des masses élémentaires $(m_0)_n$). Il vient :

$$(206) \quad \bar{O}(\Psi_n) = \int_V \Psi_{mn} \cdot O \cdot \Psi_n^m dv,$$

avec une sommation par rapport à l'indice muet m . Nous dirons alors que les fonctions $\Psi_{mn} \cdot O \cdot \Psi_n^m$ sont les champs d'espace-temps qui correspondent à la grandeur mécanique α . De même, soit O_ω l'opérateur qui correspond à une grandeur électromagnétique a_ω attachée aux corpuscules et dont les valeurs possibles sont les valeurs propres de O_ω . Appliquons alors l'opération (76) aux quatre fonctions propres $\Phi_n = \Phi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m)$ de l'opérateur Δ_ω (fonctions d'onde des charges élémentaires); il vient :

$$(207) \quad \bar{O}_\omega(\Phi_n) = \int_V \Phi_{mn} \cdot O \cdot \Phi_n^m dv,$$

avec une sommation par rapport à l'indice muet m . Nous dirons que les fonctions $\Phi_{mn} \cdot O_\omega \cdot \Phi_n^m$ sont les champs d'espace-temps qui correspondent à la grandeur électromagnétique a_ω attachée aux corpuscules.

Considérons par exemple les opérateurs $\sqrt{\alpha_n} \epsilon_0^i \epsilon_n^i = \sqrt{\alpha_n} \cdot I$ et $\sqrt{\beta_n} \epsilon_0^i \epsilon_n^i = \sqrt{\beta_n} \cdot I$. Les champs correspondants ($\sqrt{\alpha_n} \sum_m \Psi_{mn}^2$ et $\sqrt{\beta_n} \sum_m \Phi_{mn}^2$) ne sont autres, aux facteurs constants $\sqrt{\alpha_n}$ et $\sqrt{\beta_n}$ près, que les densités d'intensité de présence des masses et des charges élémentaires. De même, aux opérateurs $i\sqrt{\alpha_n} \epsilon_0^i \epsilon_n^k$ et $i\sqrt{\beta_n} \epsilon_0^i \epsilon_n^k$ qui sont, d'après les équations (38) et (50), identiques respectivement aux opérateurs $-i\epsilon_0^i \epsilon_n^k \epsilon_n^j \frac{\partial}{\partial x^j}$

et $-i\epsilon_0^i \epsilon_{nq}^k \epsilon_{ng}^j \frac{\partial}{\partial q^j}$, correspondent les champs d'espace-temps $i\sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^m$

et $i\sqrt{\beta_n} \Phi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_{nq}^k \Phi_n^m$ qui sont, à des facteurs positifs constants près, les densités des courants de masse et de charge électrique dont il a été question dans les §§ précédents.

3. Impulsion d'Univers, spin et «magnétisme propre» des corpuscules élémentaires. Nous allons chercher quels sont les opérateurs qui correspondent à ces différentes grandeurs intrinsèques et extrinsèques attachées aux corpuscules. Considérons d'abord l'impulsion d'Univers. Si on désigne par Y^k les coordonnées cartésiennes de Minkowski de l'espace-temps pseudo-euclidien, l'opérateur *covariant* de la mécanique ondulatoire classique qui correspond à l'impulsion d'Univers attachée à un corpuscule élémentaire a l'expression :

$$p_k = \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial Y^k}.$$

Comme dans la théorie cosmologique ce sont les axes locaux φ^k qui jouent le rôle des variables Y^k , l'opérateur «Impulsion d'Univers» de la mécanique ondulatoire cosmologique sera le suivant :

$$(208) \quad p_k = \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi^k}.$$

D'une manière générale, à tout opérateur de la mécanique ondulatoire classique construit avec les Y^k correspond un opérateur de la mécanique ondulatoire cosmologique obtenu en remplaçant les Y^k par les φ^k . Ainsi, par exemple, en associant les opérateurs p_k aux opérateurs $\partial \varphi^k$ (qui représentent de petites longueurs mesurées, à partir de l'origine, sur les φ^k , de sorte que $\frac{\partial \partial \varphi^k}{\partial \varphi^k} = 1$), on obtient l'équivalent cosmologique d'une importante relation opératorielle de la mécanique ondulatoire classique :

$$(209 a) \quad \partial_{\varphi^k} p_k - p_k \partial_{\varphi^k} = \frac{h}{2\pi}.$$

Considérons maintenant l'opérateur tensoriel :

$$(210 a) \quad i\epsilon_0^i \left(\epsilon_n^i \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \varphi_k} + \epsilon_n^k \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \varphi_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \varphi_k} \epsilon_n^i - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \varphi_i} \epsilon_n^k \right)$$

dans lequel les \rightarrow indiquent les fonctions auxquelles les opérateurs $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$ sont appliqués. Les champs d'espace-temps correspondants sont les tenseurs T_n^{ik} d'énergie-quantité de mouvement que figurent dans les équations fondamentales (19 a).

Il y a lieu de rappeler ici que la mécanique ondulatoire classique ne fait intervenir que les fonctions d'onde des corpuscules de masse (introduites d'ailleurs a priori), tandis que la mécanique ondulatoire cosmologique dispose des fonctions d'onde non-arbitraires Ψ_{mn} des masses élémentaires et Φ_{mn} des charges électriques élémentaires. On peut alors faire correspondre à chaque opérateur mécanique construit avec les ξ^k un opérateur électromagnétique construit avec les q^k . Ainsi, par exemple, à côté de l'opérateur « Impulsion mécanique d'Univers » il y a lieu de considérer un opérateur « Impulsion électromagnétique » dont l'expression est évidemment :

$$(208 b) \quad (p_\omega)_k = \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial q^k},$$

et dont les valeurs propres sont les valeurs possibles de l'impulsion électromagnétique d'Univers attachée à une charge élémentaire $\pm e_n$. Le champ d'espace-temps correspondant :

$$\frac{h}{2\pi} \Phi_{mn} \frac{\partial}{\partial q_k} \Phi_n^m,$$

est la densité d'impulsion électromagnétique d'Univers répandue dans l'espace-temps. De même, à l'opérateur (210 a) on peut faire correspondre l'opérateur :

$$(210 b) \quad i \epsilon_n^i \left(\epsilon_{nq}^i \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_k} + \epsilon_{nq}^k \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_k} \epsilon_{nq}^i - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_i} \epsilon_{nq}^k \right)$$

dont les champs d'espace-temps sont les tenseurs électromagnétiques U_n^{ik} qui figurent dans les équations fondamentales (19 b). Enfin, l'analogie électromagnétique de la relation opératorielle (209 a) s'écrit comme suit,

$$(209 b) \quad \partial q^k (p_\omega)_k - (p_\omega)_k \partial q^k = \frac{h}{2\pi}.$$

Il est intéressant de remarquer que les expressions (208) et (208 b) des opérateurs p_k et $(p_\omega)_k$ permettent d'écrire comme suit les équations (38) et (50) en tenant compte de (156) e (170) :

$$-\frac{1}{c} \epsilon_n^j p_j \Psi_{mn} = (m_0)_n \Psi_{mn},$$

et :

$$-2\pi \sqrt{\frac{\partial c \delta_0}{h}} \epsilon_{nq}^j (p_\omega)_j \Phi_{mn} = e_n \Phi_{mn},$$

On voit donc que ce sont les opérateurs $\frac{1}{c} \epsilon_n^j p_j$ et $-2\pi \sqrt{\frac{\partial c \delta_0}{h}} \epsilon_{nq}^j (p_\omega)_j$ qui correspondent, sans coefficients constants, aux masses propres et aux charges électriques propres des corpuscules élémentaires.

Il est utile de remarquer que, du fait que les dz^i et les dq^i ne sont pas intégrables, la détermination des fonctions propres des opérateurs qui font intervenir les z^i et les q^i ne peut être faite qu'après avoir écrit ces opérateurs en coordonnées générales x^i . C'est ce que nous avons fait avec les opérateurs laplacien Δ et Δ_ω (opérateur laplacien de la forme métrique externe), en passant des équations (45) et (47) aux équations (56) et (48).

Considérons maintenant les opérateurs $\epsilon_0^i \gamma_n^{ijk}$ dont les valeurs propres sont ± 1 . Affectons ces opérateurs du coefficient constant $\frac{h}{4\pi}$ (la raison de ce coefficient apparaîtra plus tard) et formons les opérateurs suivants :

$$(211) \quad \mathfrak{L}_n = \partial_{z^i} p_j - \partial_{z^j} p_i - \frac{h}{4\pi} \epsilon_0^i \gamma_n^{ijk}.$$

Ces opérateurs correspondent au «moment de rotation total» des corpuscules élémentaires, qui est égal à la somme du «moment de rotation orbital» (rapporté ici à un point infiniment voisin du corpuscule) et du «moment de rotation propre» ou «spin» des corpuscules (opérateurs $-\frac{h}{4\pi} i \epsilon_0^i \gamma_n^{ijk}$). Les champs d'espace-temps qui correspondent au spin ont l'expression $-\frac{h}{4\pi} \Psi_{mn}^* i \epsilon_0^i \gamma_n^{ijk} \Psi_m$, de sorte qu'ils sont égaux (au facteur $-\frac{h}{4\pi}$ près) aux vecteurs d'espace-temps W_n^i de densité de spin, que nous avons défini plus haut (tableau (79)) et qui satisfont aux relations (86). On a en effet :

$$W_n^i = \Psi_{mn}^+ \gamma_n^{ijk} \Psi_m = i \Psi_{mn}^* \epsilon_0^i \gamma_n^{ijk} \Psi_m,$$

et d'autre part (86) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z^i} \left(\frac{h}{4\pi} W_n^i \right) = -[(m_0)_n c] (I_2)_n.$$

Il est très intéressant de calculer les développements de

$$\Psi_n = \Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m)$$

suivant les fonctions propres des opérateurs qui interviennent dans ces valeurs des composantes de la densité de spin. Considérons, par exemple, l'opérateur $-i\epsilon_0^4 \epsilon_0^2 \epsilon_0^3 \epsilon_0^1$ relatif à la composante de la densité de spin suivant φ_n^1 et cherchons d'abord ses fonctions propres, qui sont les solutions $\varphi_{\mu\nu}(m)$ de l'équation :

$$-(i\epsilon_0^4 \epsilon_0^2 \epsilon_0^3 \epsilon_0^1) \varphi_{\mu\nu}(m) = a_{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}(m) = -(i\epsilon_0^2 \epsilon_0^3) \varphi_{\mu\nu}(m).$$

En tenant compte des valeurs (36) des éléments des matrices ϵ_0^2 et ϵ_0^3 on trouve :

$$\begin{cases} i\varphi(3) = a\varphi(1); & -i\varphi(4) = a\varphi(2) \\ -i\varphi(1) = a\varphi(3); & i\varphi(2) = a\varphi(4) \end{cases}$$

d'où l'on déduit qu'il n'y a que les deux valeurs propres ± 1 et qu'il existe, pour chacune de ces valeurs propres, deux fonctions propres $\varphi_{\mu 1}$ et $\varphi_{\mu 2}$ définies par :

$$(212) \quad \begin{array}{l} \mu=1 \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{11}(1) = -1; \quad \varphi_{11}(2) = -1; \quad \varphi_{11}(3) = -i; \quad \varphi_{11}(4) = i \\ \varphi_{12}(1) = -i; \quad \varphi_{12}(2) = i; \quad \varphi_{12}(3) = 1; \quad \varphi_{12}(4) = 1 \end{array} \right. \\ (a_{\mu} = -1) \left\{ \begin{array}{l} \mu=2 \quad \left\{ \begin{array}{l} \varphi_{21}(1) = 1; \quad \varphi_{21}(2) = -i; \quad \varphi_{21}(3) = -i; \quad \varphi_{21}(4) = 1 \\ \varphi_{22}(1) = -i; \quad \varphi_{22}(2) = 1; \quad \varphi_{22}(3) = -1; \quad \varphi_{22}(4) = i. \end{array} \right. \\ (a_{\mu} = +1) \left\{ \end{array} \right. \end{array}$$

Ces fonctions sont normées et orthogonales, car on a :

$$\int \varphi_{\mu\nu}^*(m) \varphi_{\mu'\nu'}(m) dm \equiv \sum_m \varphi_{\mu\nu}^*(m) \varphi_{\mu'\nu'}(m) = \begin{cases} 4 & \text{pour } \mu = \mu'; \nu = \nu' \\ 0 & \text{pour } \mu \neq \mu'; \nu \neq \nu' \end{cases}$$

D'après (204) le développement de $\Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m)$ suivant les $\varphi_{\mu\nu}$ s'écrit :

$$\Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = c_{11}^n(\eta) \varphi_{11}(m) + c_{12}^n(\eta) \varphi_{12}(m) + c_{21}^n(\eta) \varphi_{21}(m) + c_{22}^n(\eta) \varphi_{22}(m).$$

d'où l'on déduit, grâce à (212) :

$$\begin{cases} -4ic_{12}^n = (\Psi_{1n} - i\Psi_{3n}) - (\Psi_{2n} + i\Psi_{4n}); & -4c_{11}^n = (\Psi_{1n} - i\Psi_{3n}) + (\Psi_{2n} + i\Psi_{4n}), \\ 4ic_{22}^n = (\Psi_{4n} + i\Psi_{2n}) - (\Psi_{1n} + i\Psi_{3n}); & 4c_{21}^n = (\Psi_{4n} + i\Psi_{2n}) + (\Psi_{1n} + i\Psi_{3n}), \end{cases}$$

En appliquant le second principe fondamental de la mécanique ondulatoire cosmologique, on voit immédiatement que :

$$|c_{21}|^2 + |c_{22}|^2 = \frac{1}{16} \{ |\Psi_{1n} + \Psi_{4n}|^2 + |\Psi_{1n} - \Psi_{4n}|^2 + |\Psi_{2n} + \Psi_{3n}|^2 + |\Psi_{2n} - \Psi_{3n}|^2 \}$$

est l'intensité des valeurs positives ($+h/4\pi$) de la composante du spin suivant q_n^1 (axe local q^1 dans son orientation principale) tandis que :

$$|c_{11}|^2 + |c_{12}|^2 = \frac{1}{16} \{ |\Psi_{1n} + \Psi_{2n}|^2 + |\Psi_{1n} - \Psi_{2n}|^2 + |\Psi_{3n} + \Psi_{4n}|^2 + |\Psi_{3n} - \Psi_{4n}|^2 \}$$

est l'intensité des valeurs négatives ($-h/4\pi$) de la même composante du spin pour les corpuscules élémentaires de masse propre cosmologique $(m_0)_n$. Ces résultats, et ceux que l'on peut obtenir facilement en répétant le calcul précédent pour les autres composantes du spin, précisent la signification physique des fonctions d'onde non-arbitraires Ψ_{mn} des corpuscules élémentaires.

Aux opérateurs mécaniques (211) on peut faire correspondre les opérateurs électromagnétiques :

$$(213) \quad (\mathcal{W}_\omega)_n = \partial q^i (p_\omega)^j - \partial q^j (p_\omega)^i - \frac{h}{4\pi} i \epsilon_0^4 \gamma_{nq}^{ijk},$$

qui définissent un «moment de rotation électromagnétique total» des corpuscules élémentaires d'électricité, somme d'un «moment orbital de rotation» (rapporté ici à un point dans le voisinage du corpuscule) et d'un «moment de rotation électromagnétique propre» ou «spin électromagnétique» des corpuscules d'électricité (opérateurs $i \epsilon_0^4 \gamma_{nq}^{ijk}$). Les champs d'espace-temps qui correspondent au spin électromagnétique

ont pour expression $-\frac{h}{4\pi} \Phi_{mn}^* i \epsilon_0^4 \gamma_{nq}^{ijk} \Phi_n^m$, de sorte qu'ils sont égaux, au facteur $\frac{h}{4\pi}$ près, aux vecteurs d'espace-temps $(W_\omega)_n^i$ de densité de spin

électromagnétique, que nous avons définis plus haut (tableau 80) et qui satisfont aux relations (87).

En plaçant les axes locaux q^i dans leur orientation principale en chaque point (pour une certaine valeur de l'indice n) alors on a, par suite des relations (28) et en tenant compte de $\epsilon_{nq}^i = \epsilon_0^i$ pour $q^i = q_n^i$:

$$\begin{aligned} (W_\omega)_n^1 &= i \Phi_{mn}^* \epsilon_0^2 \epsilon_0^3 \Phi_n^m, & (W_\omega)_n^3 &= i \Phi_{mn}^* \epsilon_0^1 \epsilon_0^2 \Phi_n^m, \\ (W_\omega)_n^2 &= i \Phi_{mn}^* \epsilon_0^3 \epsilon_0^1 \Phi_n^m, & (W_\omega)_n^4 &= i \Phi_{mn}^* \epsilon_0^4 \epsilon_0^2 \epsilon_0^1 \epsilon_0^3 \Phi_n^{*m}. \end{aligned}$$

Telles sont, pour $q^i = q_n^i$, les composantes de la densité de spin qui correspond aux corpuscules élémentaires d'électricité de charge propre cosmologique $\pm e_n$. En répétant le calcul fait plus haut, on voit que

$$\frac{1}{16} \{ |\Phi_{1n} + \Phi_{4n}|^2 + |\Phi_{1n} - \Phi_{4n}|^2 + |\Phi_{2n} + \Phi_{3n}|^2 + |\Phi_{2n} - \Phi_{3n}|^2 \}$$

est l'intensité des valeurs positives ($+h/4\pi$) tandis que :

$$\frac{1}{16} \{ |\Phi_{1n} + \Phi_{2n}|^2 + |\Phi_{1n} - \Phi_{2n}|^2 + |\Phi_{3n} + \Phi_{4n}|^2 + |\Phi_{3n} - \Phi_{4n}|^2 \}$$

est l'intensité des valeurs négatives ($-h/4\pi$) de la composante, suivant q_n^1 , du spin électromagnétique. Ces résultats, et les résultats analogues pour les autres composantes, précisent la signification physique des fonctions d'onde non-arbitraires Φ_{mn} des corpuscules élémentaires d'électricité.

Il nous reste à déterminer les moments magnétique et électrique des corpuscules d'électricité. Nous avons étudié, dans les paragraphes 2 et 3 du Chap. III, les tenseurs antisymétriques M_n^{ik} et $(M_\omega)_n^{ik}$, et nous avons vu qu'il faut attribuer aux M_n^{ik} la signification de tenseurs des moments de rotation et de translation qui correspondent aux corpuscules élémentaires sans charge et de masse propre $(m_0)_n$, tandis que les $(M_\omega)_n^{ik}$ sont les tenseurs des champs électromagnétiques partiels qui correspondent aux corpuscules élémentaires d'électricité de charge $\pm e_n$. Ni les M_n^{ik} , ni les $(M_\omega)_n^{ik}$ ne peuvent donc représenter les moments magnétique et électrique des corpuscules d'électricité, quels que soient d'ailleurs les facteurs constants dont on les affecte. Pour représenter les moments magnétique et électrique il reste donc une seule possibilité, qui consiste à former les tenseurs électromagnétiques $(\mathcal{N}_\omega)_n^{ik} = \Phi_{mn}^+ \gamma_n^{ik} \Phi_n^m =$
 $= \frac{i}{2} \Phi_{mn}^+ (\epsilon_n^i \epsilon_n^k - \epsilon_n^k \epsilon_n^i) \Phi_n^m$. Les composantes de ces tenseurs, lorsqu'on

place les axes ζ^i dans leur orientation principale, dépendent uniquement des fonctions contenus de base Φ_{mn} et sont donc des grandeurs électromagnétiques. En les multipliant par les facteurs constants $e_n h/4\pi (m_0)_n c$ (magnétons élémentaires de Bohr pour des corpuscules de charge e_n), on obtient les tenseurs qui, dans la mécanique ondulatoire cosmologique, généralisent le tenseur des moments magnétique et électrique de la mécanique ondulatoire de l'électron de Dirac. Les opérateurs correspondants $\frac{ie_n h}{8\pi (m_0)_n c} (\epsilon_n^j \epsilon_n^k - \epsilon_n^k \epsilon_n^j)$ n'ont que les deux valeurs propres $\pm e_n h/4\pi (m_0)_n c$.

Il est essentiel de remarquer que ces valeurs propres, de même que celles des spins mécanique et électromagnétique, n'ont pas d'existence physique réelle, puisqu'elles sont les valeurs propres d'opérateurs dont les fonctions propres ne sont pas des fonctions-contenus de l'être mathématique non-arbitraire. Il s'agit donc là de grandeurs purement mathématiques « attachées » aux corpuscules élémentaires, qu'il faut cependant

introduire dans la théorie cosmologique parce que les champs d'espace-temps et les intensités correspondantes sont doués d'existence physique et jouent d'ailleurs un rôle important dans l'Univers.

4. Grandeurs simultanément et non simultanément mesurables. Considérons les opérateurs linéaires et hermitiques dont les fonctions propres sont des fonctions-contenus de l'être mathématique non-arbitraire. Les valeurs propres des ces opérateurs sont alors doués d'existence physique et représentent les valeurs que peuvent prendre les propriétés intrinsèques ou extrinsèques réelles des corpuscules élémentaires. Ces grandeurs sont en principe *mesurables*, en entendant par *mesure précise d'une grandeur attachée à un corpuscule* une opération qui permet de déterminer la valeur propre de l'opérateur correspondant qui est effectivement réalisée sur le corpuscule en un point de sa ligne d'Univers. Ainsi donc, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure précise d'une grandeur soit possible en un point de la ligne d'Univers d'un corpuscule et donne pour cette grandeur la valeur a_μ est que l'intensité de toutes les autres valeurs propres (différentes de a_μ) de l'opérateur qui correspond à cette grandeur soient nulles. C'est seulement en de tels points que l'on peut dire que l'une des valeurs propres est effectivement réalisée. Pour tous les autres points de la ligne d'Univers du corpuscule, toutes les valeurs propres existent simultanément, quoique d'une manière en quelque sorte virtuelle. Soit O_1 l'opérateur qui correspond à une grandeur a_1 attachée aux corpuscules. En un point de l'espace-temps où la mesure précise de a_1 est possible, on a évidemment un développement de Ψ_n se réduisant à :

$$(214) \quad \Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = c_{\mu\nu}^{n1}(\eta)(\varphi_1)_{\mu\nu}(\xi)$$

$(\varphi_1)_{\mu\nu}$ étant les fonctions propres de O_1 , s'il s'agit d'un corpuscule dénué de charge électrique et de masse propre $(m_0)_n$, ou bien un développement de Φ_n se réduisant à :

$$(215) \quad \Phi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = b_{\mu\nu}^{n1}(\eta)(\varphi_1)_{\mu\nu}(\xi),$$

s'il s'agit d'un corpuscule d'électricité dénué de masse et de charge propre $\pm e_n$. Soit d'autre part O_2 l'opérateur qui correspond à une autre grandeur a_2 attachée aux corpuscules. En un point de l'espace-temps où la mesure précise de a_2 est possible, on a le développement suivant :

$$(216) \quad \Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = c_{\mu\nu}^{n2}(\eta)(\varphi_2)_{\mu\nu}(\xi),$$

s'il s'agit des corpuscules dénués de charge et de masse propre $(m_0)_n$, et:

$$(217) \quad \Phi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = b_{\mu\nu}^{n2}(\tau) (\varphi_2)_{\omega\nu}(\xi),$$

s'il s'agit au contraire des corpuscules d'électricité de charge propre $\pm e_n$. Si la mesure simultanée, au même point de l'espace-temps, des grandeurs a_1 et a_2 est possible, on doit donc avoir en ce point:

$$\Psi_n = c_{\mu\nu}^{n1}(\tau) (\varphi_1)_{\mu\nu}(\xi) = c_{\mu\nu}^{n2}(\tau) (\varphi_2)_{\mu\nu}(\xi)$$

pour les corpuscules de masse propre $(m_0)_n$, et:

$$\Phi_n = b_{\mu\nu}^{n1}(\tau) (\varphi_1)_{\mu\nu}(\xi) = b_{\mu\nu}^{n2}(\tau) (\varphi_2)_{\mu\nu}(\xi),$$

pour les corpuscules d'électricité de charge $\pm e_n$. En tenant compte des équations $O_1(\varphi_1)_{\mu\nu} = (a_1)_{\mu}(\varphi_1)_{\mu\nu}$ et $O_2(\varphi_2)_{\mu\nu} = (a_2)_{\nu}(\varphi_2)_{\mu\nu}$, des fonctions et valeurs propres des opérateurs O_1 et O_2 , on déduit immédiatement de (214) et de (216) la condition:

$$O_1 O_2 = O_2 O_1.$$

Donc, pour que deux grandeurs soient simultanément mesurables (en un point de l'espace-temps), il faut et il suffit: 1° que les développements des fonctions d'onde suivant les fonctions propres des opérateurs correspondants se réduisent à (214) et (216) [ou (215) et (217)]; 2° que ces opérateurs soient permutables.

Les relations opératorielles (209 a) et (209 b) montrent donc que la position et la quantité de mouvement des corpuscules ne sont pas des grandeurs simultanément mesurables. La mesure simultanée de ces grandeurs comporte toujours des incertitudes, et l'on déduit de (209 a) les relations d'Heisenberg:

$$(218 a) \quad \delta p^i \delta p^i \geq h$$

qui ne sont applicables en toute rigueur qu'aux corpuscules dénués de charge électrique et de masse propre $(m_0)_n$, tandis qu'à (209 b) correspondent les relations:

$$(218 b) \quad \delta q^i \delta (p_\omega)^i \geq h,$$

applicables aux corpuscules élémentaires dénués de masse et de charge électrique propre $\pm e_n$. Si l'on avait exactement $\omega_{ik} = \gamma g_{ik}$, alors les relations (218 b) se confondraient avec les relations (218 a). On sait d'ailleurs que dans ce cas les corpuscules élémentaires de masse occuperaient constamment les mêmes points de l'espace-temps que les corpuscules élémentaires d'électricité.

La conception de mesure précise d'une grandeur introduite dans ce § appelle certaines remarques importantes. La théorie classique fait une distinction radicale entre observateur et processus observé, entre observateur et « monde extérieur », c'est-à-dire en somme entre sujet et objet. Dans la théorie cosmologique aucune distinction de ce genre n'est permise et n'a de sens. En effet, les fonctions-contenus fondamentales Ψ_{mn} et Φ_{mn} de l'Univers, qui interviennent dans tout le développement de cette théorie, sont les fonctions d'onde de *tous* les corpuscules élémentaires de l'espace-temps et représentent les contenus de l'Univers, y compris tous ses observateurs et instruments de mesure. L'observation et la mesure précise d'une grandeur quelconque n'est pas une opération arbitraire agissant arbitrairement sur l'Univers; c'est au contraire un événement comme tous les autres événements qui se réalise en chaque point des lignes d'Univers des corpuscules élémentaires où les développements des fonctions d'onde non-arbitraires Ψ_{mn} (ou Φ_{mn} s'il s'agit d'une grandeur électromagnétique) prennent la forme (214) ou (215).

5. Mécanique ondulatoire cosmologique des systèmes de corpuscules. Les équations fondamentales de la mécanique ondulatoire classique ne peuvent être écrites facilement que dans le cas d'un système formé par un seul corpuscule (le champ électromagnétique agissant sur le corpuscule jouant le rôle d'une donnée). Le problème se complique énormément dans le cas général des ensembles de corpuscules et il faut alors avoir recours à des artifices (introduction d'espaces de configuration, etc.) peu conformes à la réalité et jusqu'ici rebelles aux exigences de la Relativité. Rien de semblable n'arrive dans la Physique cosmologique parce que les fonctions-contenus de base Ψ_{mn} et Φ_{mn} , invariants et absolument non-arbitraires, *sont les fonctions d'onde de l'ensemble des corpuscules élémentaires de l'Univers*. Il n'y a aucune distinction à faire ici entre le problème d'un corpuscule et le problème d'un ensemble de corpuscules; plus exactement, il n'y a ici, en toute rigueur, que le problème de l'ensemble des corpuscules élémentaires de l'Univers. En admettant que l'on a résolu préalablement le problème de l'intégration du système fondamental des équations (19 a) + (19 b) + (25) + (26) de l'être mathématique non-arbitraire et déterminé ensuite les solutions non-arbitraires des équations (45) et (48), tout problème que l'on peut se poser sur un système « matériel » quelconque ou sur ses rayonnements électromagnétiques et gravifiques se trouve par cela même résolu. Considérons par exemple un système quelconque d'atomes complexes émettant un rayonnement analysé par le

«spectrographe», qui détermine l'énergie du rayonnement en fonction de sa fréquence. La détermination théorique de cette fonction est immédiate si l'on a préalablement résolu le problème (cosmologique) de la détermination des fonctions propres non-arbitraires Φ_{mn} de l'opérateur laplacien Δ_ω attaché à la forme métrique externe de l'Univers. En effet, si l'on connaît les Φ_{mn} dans la région occupée par le système d'atomes dont il s'agit de déterminer le rayonnement, alors on connaît aussi dans cette région le tenseur électromagnétique du champ total M_ω^{jk} qui, d'après (80), est donné par :

$$M_\omega^{jk} = \frac{i}{2} \sum_1^\infty \Phi_{mn}^+ (\epsilon_{nq}^j \epsilon_{nq}^k - \epsilon_{nq}^k \epsilon_{nq}^j) \Phi^{mn},$$

d'où l'on déduit, par les relations (138), les composantes des champs électrique et magnétique. De la décomposition des M_ω^{jk} en intégrale de Fourier, qui correspond à la décomposition du rayonnement par le spectrographe, et qui s'écrit :

$$M_\omega^{jk} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_\omega^{jk}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$$

avec :

$$\mu_\omega^{jk}(\nu) = \int_0^{+\infty} M_\omega^{jk} e^{-2\pi i \nu t} dt$$

on déduit l'énergie du rayonnement en fonction de la fréquence ν , car cette intensité est, d'après des résultats classiques, la fonction :

$$\frac{\overline{E}^2 + \overline{H}^2}{2}$$

où les barres indiquent des moyennes prises sur un grand nombre de périodes.

Pour ne pas allonger démesurément ce mémoire, nous devons arrêter ici l'exposé de la mécanique ondulatoire cosmologique. Nous espérons pouvoir reprendre sous peu cet exposé avec quelques questions importantes qui n'ont pu être traitées dans ce travail.

Décembre 1944.

TABLE DES MATIÈRES

I — PRÉLIMINAIRES

1. Les êtres mathématiques complets	1
2. Les êtres mathématiques arbitraires	2
3. Les êtres mathématiques non-arbitraires	3
4. L'existence physique	4

II — ANALYSE DE L'ÊTRE MATHÉMATIQUE NON-ARBITRAIRE

1. Définitions	5
2. Équations de l'être mathématique non-arbitraire	9
3. Théorème: Le contenant d'un être mathématique non-arbitraire est un espace de Riemann à quatre dimensions et de classe un	11
4. Il n'existe qu'un seul être mathématique non-arbitraire dans l'ensemble E_n	12
5. Tableau des inconnues du problème de l'être mathématique non-arbitraire	13
6. Détermination des fonctions-contenus tensorielles T_{ik} et U_{ik}	13
7. Les fonctions propres de l'opérateur laplacien et le caractère de la métrique du contenant	19
8. Les fonctions propres de l'opérateur Δ_ω et le caractère de la métrique externe du contenant	25
9. Le principe variationnel qui correspond aux équations (19 a, b), (38, 43) et (50, 54)	25
10. Les fonctions-contenus et les nombres-contenus de l'être mathématique non-arbitraire	27
11. Solution approchée des équations de l'être mathématique non-arbitraire	35
12. Le spectre et les fonctions propres des opérateurs \square_0 et \square_ω^0	42

III — LE PROBLÈME COSMOLOGIQUE GÉNÉRALISÉ

1. Nature du problème.	46
2. Gravitation et «matière».	47
3. Le champ électromagnétique	50
4. Les masses propres des corpuscules élémentaires	57
5. La propagation des actions électromagnétiques et les lignes de «longueur» nulle associées aux formes métriques externe et interne	59

6. Les charges électriques propres des corpuscules élémentaires	63
7. Les constantes c et h	65
8. Masses et charges des corpuscules, gravitation et électromagnétisme dans l'espace-temps.	66

IV — MÉCANIQUE ONDULATOIRE COSMOLOGIQUE

1. Ondes et corpuscules	77
2. Grandeurs attachées aux corpuscules élémentaires et champs d'espace-temps correspondants.	86
3. Impulsion d'Univers, spin et «magnétisme» propre des corpuscules élémentaires	87
4. Grandeurs simultanément et non simultanément observables	93
5. Mécanique ondulatoire cosmologique des systèmes de corpuscules	95