PORTUGALIAE PHYSICA
Vol. 2—Fasc. 1—1946

SUR L'EXPRESSION $\lambda = h/mv$ DE LA LONGUEUR DES ONDES DE DE BROGLIE ASSOCIÉES AUX CORPUSCULES EN MOUVEMENT *

par Rodrigo Sarmento de Beires (à Pôrto)

(Reçu le 31 Janvier 1946)

C'est à Louis de Broglie qui revient le mérite d'avoir réussi le premier à associer utilement un «paquet d'ondes» à un corpuscule en mouvement. Parti des relations définissant une transformation particulière de Lorenz, Louis de Broglie a été amené à fixer pour la longueur λ de l'onde associée à un corpuscule de masse m, en mouvement rectiligne de vitesse v, la valeur

$$\lambda = \frac{h}{mv} \tag{1}$$

h représentant la constante de Planck.

Peu de temps àprès, Erwin Schrödinger est arrivé au même résultat par une toute autre voie et — ce qui a dû surprendre les physiciens de l'époque — indépendamment de la théorie de la relativité sur laquelle De Broglie avait fondé ses raisonnements.

En lisant les ouvrages sur la Mécanique Ondulatoire on a pourtant l'impression (nous l'avons eue du moins) qu'il aurait été possible de fixer pour λ une expression autre que celle choisie par Louis de Broglie.

Le but de la présente note c'est précisément de montrer que la relation de De Broglie donne la valeur de λ la seule possible, si l'on consent d'admettre les trois hypothèses suivantes qui, à l'époque, étaient à la base même de la Mécanique Ondulatoire :

a) l'énergie du corpuscule doit être un multiple entier du quantum de Planck (quantification sous sa forme primitive),

b) le «paquet d'ondes» associé au corpuscule possède une vitesse de groupe égale à la vitesse du corpuscule (principe de l'onde pilote),

* Je remercie Mr. le professeur Mira Fernandes d'une très interessante remarque qu'il a bien voulu me faire sur la conclusion de cette note.

c) les principes de Fermat (ou du chemin optique minimum) et de Maupertuis (ou de la moindre action pour des mouvement isoénergétiques) sont équivalents au sens que nous indiquerons plus loin.

Désignons par E l'énergie du corpuscule; l'hypothèse *a)* nous permet d'écrire

$$E = nh\nu \tag{2}$$

avec n entier, ν étant la fréquence.

L'hypothése *b)* donne, d'autre part

$$\frac{1}{v} = \frac{d}{d\nu}\left(\frac{\nu}{u(\nu)}\right) \tag{3}$$

car v est la vitesse du corpuscule, $u(\nu)$ représente celle de propagation et le second membre de (3) est l'expression de la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes (Lord Rayleigh).

Supposons enfin que le rapport des intégrales de Maupertuis et de Fermat, *au lieu d'être constant,* dépend de la fréquence. S'il en est ainsi, en effet, l'annulation de la variation de l'un entraîne encore celle de l'autre et les deux principes seront équivalents (hypothèse *c)*).

Désignons, alors, par $F(\nu)$ une fonction inconnue de la fréquence, par $2T$ la force vive du corpuscule et par s l'arc de la trajéctoire sur laquelle nous avons fixé deux points d'abscisses s_0 et s_1 correspondants aux instants t_0 et t_1, d'ailleurs quelconques. Nous aurons, d'après ce que nous venons de dire:

$$\int_{t_0}^{t_1} 2T \cdot dt = m \int_{s_0}^{s_1} v \,.\, ds = mF(\nu) \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{u}$$

et par suite

$$\int_{s_0}^{s_1} m\left(v - \frac{F(\nu)}{u}\right) ds = 0,$$

quel que soit le trajet, d'où:

$$uv = F(\nu). \tag{4}$$

Posons

$$F(\nu) = \frac{\nu}{G(\nu)}$$

$G(\nu)$ étant, tout comme $F(\nu)$, une fonction à déterminer.

De (3) et (4) on tire, sucessivement,

$$\frac{d}{d\nu}\left(\frac{\nu}{u}\right) = \frac{d}{d\nu}(v\mathrm{G}(\nu)) = \frac{1}{v} \qquad v\mathrm{G}(\nu)\frac{dv}{d\nu} + v^2\frac{d\mathrm{G}}{d\nu} = 1$$

ou

$$\frac{1}{2}\mathrm{G}(\nu)\frac{d(v^2)}{d\nu} + v^2\frac{d\mathrm{G}}{d\nu} = 1\,.$$

Or,

$$mv^2 = 2(\mathrm{E}(\nu) - \mathrm{U})\,,$$

—U étant la fonction des forces correspondante à la sollicitation du corpuscule ; par conséquent :

$$\frac{1}{m}\mathrm{G}(\nu)\frac{d\mathrm{E}}{d\nu} + 2\frac{\mathrm{E}(\nu)-\mathrm{U}}{m}\frac{d\mathrm{G}}{d\nu} = 1\,.$$

Mais $\mathrm{E} = nh\nu$, donc :

$$nh\,\mathrm{G}(\nu) + 2(nh\nu - \mathrm{U})\frac{d\mathrm{G}}{d\nu} = m\,,$$

d'ou :

$$\frac{d\mathrm{G}}{m - nh\mathrm{G}} = \frac{d\nu}{2(nh\nu - \mathrm{U})}\,.$$

En intégrant on obtient

$$\mathrm{G}(\nu) = \frac{1}{nh}\left(m - \sqrt{\frac{\mathrm{C}}{nh\nu - \mathrm{U}}}\right)$$

ou bien, en éliminant U :

$$\mathrm{G}(\nu) = \frac{1}{nh}\left(m - \frac{1}{v}\sqrt{\frac{2\mathrm{C}}{m}}\right).$$

La longueur d'onde étant donnée par

$$\lambda = \frac{u}{\nu}$$

il en résulte, pour $n = 1$,

$$\lambda = \frac{h}{mv - \sqrt{\dfrac{2\mathrm{C}}{m}}}\,.$$

Si, v tendant vers zéro, λ doit croître au delà de toute limite, la constante C est nulle et nous arrivons à la relation de Louis de Broglie.