PORTUGALIAE PHYSICA
Vol. 2—Fasc. 3—1947

LE PROBLÈME ATMOSPHÉRIQUE D'APRÈS LA THÉORIE DES PERTURBATIONS SPONTANÉES

par ANTONIO GIÃO

(Reçu le 13 Déc. 1946)

1. Le système d'équations de la théorie des perturbations. J'ai exposé récemment[1] l'état actuel de la théorie des perturbations spontanées et montré que ses théorèmes fondamentaux conduisent à une explication rationnelle des principaux phénomènes de l'hydrodynamique solaire. Il s'agit maintenant d'appliquer la même théorie à l'important problème des perturbations atmosphériques, dont elle donne, comme nous le verrons, une solution complète, susceptible d'être traduite en pratique par une méthode simple de prévision mathématique du temps à courte échéance ($\leqq 48$ heures).

La théorie des perturbations spontanées peut être résumée par un système de trois équations aux dérivées partielles du premier ordre (une équation vectorielle et deux scalaires), dont la solution est équivalente à la solution générale du problème du mouvement d'un milieu fluide quand l'effet hydrodynamique direct des actions extérieures qui agissent sur ce milieu est considéré comme une donnée[2].

Soit U^* une propriété quelconque du fluide. Sa valeur totale (valeur réelle ou observable) peut être décomposée, d'après la théorie des perturbations, en deux parties :

$$U^* = U + u \,, \tag{1}$$

[1] *«Nouvelles recherches sur les perturbations spontanées du mouvement des fluides avec des applications à l'hydrodynamique solaire»*. Bulletin de la Société de Géographie de Lisbonne, 1943, Sept.-Dec. et 1944, Janv.-Avril.

[2] Pour tout ce qui concerne la déduction des équations fondamentales nous renvoyons le lecteur à notre mémoire cité (première partie).

où U représente le *champ entretenu* qui correspond au *mouvement entretenu* dans le fluide par les actions extérieures (ce mouvement étant l'équivalent hydrodynamique direct de ces actions) et u le champ de perturbation spontanée[1]. Nous appliquerons très souvent aux grandeurs une opération de moyenne temporelle :

$$\frac{1}{\tau}\int_{t-\tau}^{t} dt\,, \tag{2}$$

à laquelle correspond la décomposition suivante des valeurs totales :

$$U^* = U_m^* + u'\,, \tag{3}$$

U_m^* étant la moyenne temporelle, à l'instant t, relative à l'intervalle de temps τ (résultat de l'application de (2) aux valeurs U^*). S'il s'agit d'une valeur U du champ entretenu, alors nous poserons :

$$U = U_m + U' \tag{4}$$

Nous utiliserons les notations suivantes :

x, y, z : coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point A quelconque du fluide dont le rayon-vecteur est $\vec{r}(x, y, z)$.

$\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z$: vecteurs unitaires des axes x, y, z.

λ, φ, η : longitude, latitude et géopotentiel.

ξ : longueurs mesurées sur les verticales ascendantes (trajectoires orthogonales des surfaces $\eta = \mathrm{C^{te}}$).

r : Distance d'un point au centre de la Terre (centre du géoïde).

σ : Surface du géoïde.

t : Temps.

∇ : Opérateur de Hamilton ou opérateur gradient ($\nabla \cdot \equiv \mathrm{div}$).

∇_h : Opérateur gradient horizontal.

$\frac{\partial}{\partial t}$: Opérateur des variations locales en un point quelconque.

$\vec{V}^*$: Vitesse des particules du fluide.

[1] Les valeurs totales des propriétés du fluide sont désignées par un astérisque, celles qui correspondent aux champs entretenus par des majuscules et celles des champs de perturbation par des minuscules.

$\frac{d}{dt}$: Opérateur des variations individuelles (sur une particule quelconque: $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}^* \cdot \nabla$).

$\vec{\Omega}$: Vitesse angulaire absolue (galiléenne) du référentiel principal du fluide [axes par rapport auxquels la vitesse et le moment angulaire moyens (moyennes «massiques» relatives à tout le fluide) sont constamment nuls].

$\frac{d_a V_R}{d_a t}$: Accélération absolue (galiléenne) du mouvement de translation du référentiel principal.

P^*: Pression.

S^*: Volume spécifique ($\Psi^* = \frac{1}{S^*}$ = densité).

T^*: Température (θ = perturbation de température).

R: Constante des gaz pour l'air ($P^* S^* = RT^*$).

g^*: Accélération de la pesanteur.

E_g^*: Énergie potentielle de la pesanteur (par unité de masse).

E: Énergie hydromécanique du mouvement entretenu (par unité de masse), définie par la fonction: $E \equiv SP + \frac{1}{2} V^2 + E_g = RT + \frac{1}{2} V^2 + E_g$.

Désignons maintenant par D le déterminant suivant:

$$(5) \qquad D = \begin{vmatrix} A_{11} = \frac{\partial V_x}{\partial x} & A_{12} = \frac{\partial V_x}{\partial y} - 2\Omega_z & A_{13} = \frac{\partial V_x}{\partial z} + 2\Omega_y \\ A_{21} = \frac{\partial V_y}{\partial x} + 2\Omega_z & A_{22} = \frac{\partial V_y}{\partial y} & A_{23} = \frac{\partial V_y}{\partial z} - 2\Omega_x \\ A_{31} = \frac{\partial V_z}{\partial x} - 2\Omega_y & A_{32} = \frac{\partial V_z}{\partial y} + 2\Omega_x & A_{33} = \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Soit χ_{ij} le mineur de D relatif à l'élément $A_{ij}\,(x^1 = x, x^2 = y, x^3 = z)$ affecté du signe $(-1)^{i+j}$, c'est-à-dire:

$$(6) \qquad \chi_{ij} = \frac{\partial D}{\partial A_{ij}}.$$

En posant :

$$(7) \qquad \vec{J} = -\frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} - \frac{d_a \vec{V}_R}{d_a t},$$

et :

$$(8) \qquad \chi = \sum_{ij} \chi_{ij} \vec{k}_i \vec{k}_j,$$

on peut définir une importante fonction des champs entretenus de vitesse et d'énergie (à laquelle nous donnerons le nom de *vecteur de prévision*) par la relation :

$$(9) \qquad \vec{H} = \frac{1}{D} \chi \cdot (\nabla E - \vec{J}).$$

Les mineurs réduits $\frac{\chi_{ij}}{D}$ forment un tenseur contravariant du second ordre, qui est symétrique lorsque la vitesse entretenue $\vec{V}$ est irrotationnelle (rot $\vec{V}=0$) et $\vec{\Omega}=0$. On a en effet :

$$(10) \qquad A_{ij} - A_{ji} = \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \frac{\partial V_j}{\partial x^i} = -\,\mathrm{rot}_i \vec{V}.$$

Le système d'équations qui résume la théorie des perturbations spontanées peut alors s'écrire comme suit :

$$(11) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{\partial P^*}{\partial t} = -\vec{H} \cdot \nabla P^* - P^* \operatorname{div} \vec{V}^* + \frac{1}{S^*} \vec{H} \cdot \left(\vec{g}^* + \vec{J} - \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) + \\ &\qquad + \frac{1}{S^*} \frac{\partial}{\partial t} (E - E_g^*), \\ &\vec{V}^* = -\frac{1}{D} \left(S^* \nabla P^* - \vec{g}^* - \vec{J} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) \cdot \chi, \\ &\frac{\partial S^*}{\partial t} + \vec{V}^* \cdot \nabla S^* = S^* \operatorname{div} \vec{V}^*. \end{aligned} \right.$$

La solution de ce système de trois (cinq) équations à trois (cinq) inconnues P^*, S^*, $\vec{V}^* (V_x^*, V_y^*, V_z^*)$ qui satisfait aux conditions initiales $P^*(x, y, z, t = t_0) = P_0^*(x, y, z)$; $S^*(x, y, z, t = t_0) = (S_0^*(x, y, z)$; $\vec{V}^*(x, y, z, t = t_0) = \vec{V}_0^*(x, y, z)$ et à certaines conditions aux limites (que nous indiquerons plus loin), résoud le problème général du mouvement du fluide quand les champs entretenus de pression $P(x, y, z, t)$, de volume spécifique $S(x, y, z, t)$ et de vitesse $\vec{V}(x, y, z, t)$ peuvent *être considérés comme des données.*

2. Le problème atmosphérique. Au point de vue des équations de la théorie des perturbations spontanées, ce problème est caractérisé par les trois conditions suivantes:

1°. On a en chaque point de l'atmosphère:

$$\vec{g}^* = \vec{g}\,; \quad \frac{\partial E_g^*}{\partial t} = 0. \tag{12}$$

2°. Le référentiel principal de l'atmosphère a une vitesse angulaire $(\vec{\Omega})$ et une vitesse de translation $(\vec{V}_R)$ constantes, c'est-à-dire d'après (7):

$$\vec{J} = 0\,. \tag{13}$$

3°. Il règne un équilibre quasi-statique le long des verticales, ce qui permet d'écrire:

$$-\vec{H}\cdot\nabla P^* + \frac{1}{S^*}\vec{g}\cdot\vec{H} = -\vec{H}\cdot\nabla_h P^* \tag{14}$$

Les équations de base (11) deviennent donc, grâce à ces conditions:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial P^*}{\partial t} = -\vec{H}\cdot\nabla P^* - P^*\operatorname{div}\vec{V}^* + \frac{1}{S^*}\left(\frac{\partial E}{\partial t} - \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right),\\
&\vec{V}^* = -\frac{1}{D}\left(S^*\nabla P^* - \vec{g} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right)\cdot\chi\,,\\
&\frac{\partial S^*}{\partial t} + \vec{V}^*\cdot\nabla S^* = S^*\operatorname{div}\vec{V}^*.
\end{aligned}\right. \tag{15}$$

Appliquons maintenant à ces équations l'opération de moyenne relative à un intervale de temps τ. En tenant de compte de (3) et de (4), le système fondamental précédent donne d'une part:

$$\left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial P_m^*}{\partial t} = -(\vec{H}\cdot\nabla_h P^*)_m - (P^*\operatorname{div}\vec{V}^*)_m + \left[\frac{1}{S^*}\left(\frac{\partial E}{\partial t} - \vec{H}\cdot\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right)\right]_m,\\
&\vec{V}_m^* = -\left[S^*\nabla P^*\cdot\left(\frac{\chi}{D}\right)\right]_m + \vec{g}\cdot\left(\frac{\chi}{D}\right)_m - \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\cdot\left(\frac{\chi}{D}\right)\right]_m,\\
&\frac{\partial S_m^*}{\partial t} + (\vec{V}^*\cdot\nabla S^*)_m = (S^*\operatorname{div}\vec{V}^*)_m\,,
\end{aligned}\right. \tag{16}$$

et d'autre part :

$$
(17)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\frac{\partial p'}{\partial t} = - \vec{H}_m \bullet \nabla_h p' - \vec{H}' \bullet \nabla_h p' - \vec{H}' \bullet \nabla_h P^*_m - \\
&\quad - [\vec{H}_m \bullet \nabla_h P^*_m - (\vec{H} \bullet \nabla_h P^*)_m] - P^*_m \operatorname{div} \vec{v}' - \\
&\quad - p' \operatorname{div} \vec{V}^*_m - p' \operatorname{div} \vec{v}' - [P^*_m \operatorname{div} \vec{V}^*_m - (P^* \operatorname{div} \vec{V}^*)_m] + \\
&\quad + \left\{ \frac{1}{S^*}\left(\frac{\partial E}{\partial t} - \vec{H} \bullet \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right) - \left[\frac{1}{S^*}\left(\frac{\partial E}{\partial t} - \vec{H} \bullet \frac{\partial \vec{V}}{\partial t}\right)\right]_m \right\}, \\
&\vec{v}' = - S^*_m \nabla p' \bullet \left(\frac{\chi}{D}\right) - s' \nabla P^*_m \bullet \left(\frac{\chi}{D}\right) - s' \nabla p' \bullet \left(\frac{\chi}{D}\right) - \\
&\quad - S^*_m \nabla P^*_m \bullet \left(\frac{\chi}{D}\right) + \left[S^* \nabla P^* \bullet \left(\frac{\chi}{D}\right)\right]_m + \vec{g} \bullet \left(\frac{\chi}{D}\right)' - \\
&\quad - \frac{\partial \vec{V}^*_m}{\partial t} \bullet \left(\frac{\chi}{D}\right)' - \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} \bullet \left(\frac{\chi}{D}\right) - \left\{ \frac{\partial \vec{V}_m}{\partial t} \bullet \left(\frac{\chi}{D}\right)_m - \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \bullet \left(\frac{\chi}{D}\right)\right]_m \right\}, \\
&\frac{\partial s'}{\partial t} + \vec{V}^*_m \bullet \nabla s' + \vec{v}' \bullet \nabla S^*_m + \vec{v}' \bullet \nabla s' + \\
&\quad + [\vec{V}^*_m \bullet \nabla S^*_m - (\vec{V}^*_m \bullet \nabla S^*)_m] = S^*_m \operatorname{div} \vec{v}' + \\
&\quad + s' \operatorname{div} \vec{V}^*_m + s' \operatorname{div} \vec{v}' + [S^*_m \operatorname{div} \vec{V}^*_m - (S^* \operatorname{div} \vec{V}^*)_m].
\end{aligned}
\right.
$$

3. Les équations des perturbations atmosphériques. Pour étudier les perturbations atmosphériques, il est indispensable d'éliminer les variations lentes (qui proviennent du champ entretenu) en prenant un intervalle de temps τ tel que les variations temporelles locales des moyennes correspondantes :

$$
(18)\qquad \frac{\partial U^*_m}{\partial t} = \frac{1}{\tau}[U^*(t) - U^*(t-\tau)],
$$

soient négligeables par rapport aux variations totales $\partial U^*/\partial t$. En météorologie dynamique et dans la prévision à courte échéance (≤ 48 heures) il faut admettre que ceci a lieu lorsque :

$$
(19)\qquad \left|\frac{\partial U^*_m}{\partial t}\right| \leq \frac{1}{10}\left|\frac{\partial U^*}{\partial t}\right|.
$$

Pour satisfaire à cette condition pour les trois inconnues P^*, S^* et V^*, *il suffit*, d'après (18), *que τ soit de l'ordre de grandeur de 10 jours.* Etant donné, par ailleurs, l'ordre de grandeur des variations temporelles locales de éléments du champ entretenu de l'atmosphère, les équations (16) se simplifient beaucoup et deviennent:

$$(20) \qquad \begin{cases} -\vec{H}\cdot\nabla_h P^*_m = P^*_m \operatorname{div}\vec{V}^*_m\,, \\ \vec{V}^*_m = -\dfrac{1}{D}(S^*_m\nabla P^*_m - \vec{g})\cdot\chi\,, \\ \vec{V}^*_m\cdot\nabla S^*_m = S^*_m\operatorname{div}\vec{V}^*_m\,. \end{cases}$$

tandis que le système (17) prend la forme simple:

$$(21) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p'}{\partial t} = -\vec{H}\cdot\nabla p' - P^*_m \operatorname{div}\vec{v}'\,, \\ \vec{v}' = -S^*_m\nabla p'\cdot\left(\dfrac{\chi}{D}\right) - s'\nabla P^*_m\cdot\left(\dfrac{\chi}{D}\right), \\ \dfrac{\partial s'}{\partial t} + \vec{V}^*_m\cdot\nabla s' + \vec{v}'\cdot\nabla S^*_m + \vec{v}'\cdot\nabla s' = S^*_m\operatorname{div}\vec{v}'\,. \end{cases}$$

ou bien, en remplaçant ∇P^*_m par sa valeur déduite de la deuxième équation (20):

$$(22) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial p'}{\partial t} = -\vec{H}\cdot\nabla_h p' - P^*_m \operatorname{div}\vec{v}' \\ \vec{v}' = -S^*_m\nabla p'\cdot\dfrac{\chi}{D} - \dfrac{s'}{S^*_m}\left(\vec{V}^*_m - \vec{g}\cdot\dfrac{\chi}{D}\right) \\ \dfrac{\partial s'}{\partial t} + \vec{V}^*_m\cdot\nabla s' + \vec{v}'\cdot\nabla S^*_m + \vec{v}'\cdot\nabla s' = S^*_m\operatorname{div}\vec{v}' \end{cases}$$

Ce sont les équations fondamentales des perturbations atmosphériques, tandis que le système (20) traduit les propriétés du champ des valeurs moyennes lorsque $\tau \geqq 10$ jours.

Le problème des perturbations atmosphériques, dans la théorie des perturbations spontanées, se confond donc avec le problème de l'intégration du système (22) précédent de cinq équations aux dérivées partielles du premier ordre pour les cinq inconnues v'_x, v'_y, v'_z, p' et s'. Il s'agit donc de trouver deux fonctions scalaires $p'(x, y, z, t)$, $s'(x, y, z, t)$ et une fonction vectorielle $\vec{v}'(x, y, z, t)$ satisfaisant aux équations (22) ainsi qu'aux conditions initiales:

$$(23) \qquad \begin{cases} p'(x, y, z, t=t_0) = p'_0(x, y, z)\,, \\ s'(x, y, z, t=t_0) = s'_0(x, y, z)\,, \\ \vec{v}'(x, y, z, t=t_0) = \vec{v}'_0(x, y, z)\,, \end{cases}$$

(p'_0, s'_0 et $\vec{v}'_0$ étant des fonctions données) et aux conditions aux limites suivantes:

1°. Conditions aux limites extérieures de l'atmosphère:

$$\lim_{r\to\infty} p'=0\,;\quad \lim_{r\to\infty} s'=0\,;\quad \lim_{r\to\infty} \vec{v}'=0\,. \tag{24}$$

2°. Condition cinématique sur la surface (σ) du géoïde:

$$(v'_\zeta)_\sigma=0\,. \tag{25}$$

Cette condition peut être exprimée, comme nous allons le voir, par une relation remarquable sur le champ de pression à la surface du géoïde. De la deuxième équation de (22) on déduit en effet, en tenant compte de (25) et de la condition cinématique $[(\overset{*}{V}_m)_\zeta]_\sigma=0$ pour le mouvement moyen:

$$S^*_m\left[(\nabla_h p'_\sigma \bullet \chi)_\zeta+\chi_{\zeta\zeta}\left(\frac{\partial p'}{\partial \zeta}\right)_\sigma\right]-\frac{s'}{S^*_m}\chi_{\zeta\zeta}g=0. \tag{26}$$

Par suite de la relation:

$$\frac{\partial p'}{\partial \zeta}=-g\psi' \tag{27}$$

qui exprime l'équilibre quasi-statique le long des verticales et de $s'=-S^{*2}_m\psi'$, la relation précédente (26) devient:

$$S^*_m\nabla_h p'_\sigma\bullet\chi+2g\,\chi_{\zeta\zeta}\,\frac{s'}{S^*_m}=0\,, \tag{28}$$

ce qu'on peut écrire en coordonnées sphériques φ, λ, r:

$$\frac{\chi_{x\zeta}}{\cos\varphi}\frac{\partial p'_\sigma}{\partial\lambda}+\chi_{y\zeta}\frac{\partial p'_\sigma}{\partial\varphi}=-2gr_\sigma\chi_{\zeta\zeta}\frac{s'_\sigma}{S^{*2}_m}. \tag{28 bis}$$

Remarquons que cette expression de la condition cinématique aux limites permet de déduire immédiatement quelques propriétés importantes des centres de perturbation de pression sur la surface du géoïde. En un tel centre on a $\nabla_h p'_\sigma=0$ et (28) donne alors la condition:

$$(\chi_{\zeta\zeta}\,s'_\sigma)_c=0\,, \tag{29}$$

l'indice c désignant la position d'un centre. On doit donc avoir, soit $(s'_\sigma)_c=0$, soit $(\chi_{\zeta\zeta})_c=0$, en chaque point de la trajectoire d'un centre de pression. Mais on peut écrire presque rigoureusement:

$$\frac{s'}{S^*_m}=\frac{\theta'}{T^*_m}-\frac{p'}{P^*_m} \tag{30}$$

de sorte que la condition $(s'_\sigma)_c = 0$ est presque equivalente à la condition

$$(\theta'_\sigma)_c = \frac{T^*_m}{P^*_m}(p'_\sigma)_c\,.$$

Considérons, en particulier, les centres de basse pression pour lesquels on a $(p'_\sigma)_c < 0$; alors $(\theta'_\sigma)_c < 0$. Autrement dit, un centre de basses pressions (de perturbation) à la surface du géoïde est toujours un centre «froid» si $\chi_{\zeta\zeta} \neq 0$ sur sa trajectoire. Sur la trajectoire de tout centre «chaud» $[(\theta'_\sigma)_c > 0]$ de basses pressions (de perturbation) on a donc forcément $\chi_{\zeta\zeta} = 0$.

4. Equation spatio-temporelle du champ de pression sur la surface du géoïde. La partie de beaucoup la plus importante du problème météorologique est la prévision des inconnues p', s' et $\vec{v}'$ sur la surface du géoïde, indépendamment de leurs valeurs dans tout le reste de l'atmosphère. Avant de traiter l'intégration du système général (22) dans toute l'atmosphère, il est donc extrêmement intéressant de déduire une équation aux dérivées partielles spatio-temporelles pour la fonction p' à la surface du géoïde.

Supposons que l'atmosphère libre est en contact avec la surface du géoïde par une couche limite mince, à la Prandtl, adhérant à cette surface, et pouvant être considérée, s'il y a lieu, comme une couche fictive auxiliaire. Cette hypothèse est toujours permise et ne diminue en rien la généralité des résultats, car d'une part on peut toujours admettre que la pression et le volume spécifique sur la surface du géoïde ont les mêmes valeurs avec ou sans couche limite et quelle que soit l'épaisseur et la structure de celle-ci ; et d'autre part, malgré l'adhérence, le vent à une hauteur arbitrairement petite au dessus de la surface du géoïde peut toujours être supposé égal au vent effectivement observé.

L'effet de l'adhérence sur le champ du vecteur $\vec{v}'$ se traduit par l'évanouissement de ses composantes horizontales sur la surface du géoïde. En tenant compte de la condition cinématique aux limites $(v'_\zeta)_\sigma = 0$, on a donc sur cette surface σ :

$$\vec{v}'_\sigma = 0\,. \tag{31}$$

D'autre part les mêmes conditions (cinématique et d'adhérence) donnent aussi évidemment :

$$(\vec{V}^*_m)_\sigma = 0\,. \tag{32}$$

Grâce à ces conditions, la troisième équation de (22) devient sur la surface σ du géoïde :

$$\frac{\partial s'_\sigma}{\partial t} = (S^*_m \operatorname{div} \vec{v}')_\sigma ,$$

d'où l'on déduit, par suite de l'expression (28) de la condition cinématique sur σ :

$$(\operatorname{div} v')_\sigma = -\frac{(S^*_m)_\sigma}{2g} \frac{1}{(\chi_{\zeta\zeta})_\sigma} \nabla_h \left(\frac{\partial p'_\sigma}{\partial t}\right) \cdot \chi_\sigma .$$

La première équation de (22) devient alors sur la surface du géoïde :

$$\text{(33)} \qquad \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} = -\vec{H} \cdot \nabla_h p'_\sigma + \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h \left(\frac{\partial p'_\sigma}{\partial t}\right),$$

où nous avons posé :

$$\text{(34)} \qquad \vec{\Lambda} = \frac{(P^*_m S^*_m)_\sigma}{2g} \left(\frac{\chi_{x\zeta}}{\chi_{\zeta\zeta}}\right)_\sigma \vec{k}_x + \frac{(P_m S^*_m)_\sigma}{2g} \left(\frac{\chi_{y\zeta}}{\chi_{\zeta\zeta}}\right)_\sigma \vec{k}_y ,$$

$\vec{k}_x , \vec{k}_y$ étant ici les vecteurs unitaires d'axes rectangulaires x , y *horizontaux.* On peut écrire (34) sous la forme plus simple :

$$\text{(35)} \qquad \vec{\Lambda} = \frac{RT^*_m}{2g} \left(\frac{\chi_{x\zeta}}{\chi_{\zeta\zeta}}\right)_\sigma \vec{k}_x + \frac{RT^*_m}{2g} \left(\frac{\chi_{y\zeta}}{\chi_{\zeta\zeta}}\right)_\sigma \vec{k}_y .$$

L'équation (33) est l'équation cherchée pour le champ de p' à la surface du géoïde. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles spatio-temporelles, du second ordre et dont les coefficients sont des fonctions simples des champs entretenus de vitesse et de la température moyenne T^*_m. L'importance de cette équation est très grande, parce qu'elle forme la base de la seule méthode de prévision mathématique du temps *réellement applicable* dans la pratique qu'on peut déduire de la mécanique des fluides.

Avant de résoudre l'équation (33), il est intéressant de remarquer qu'elle montre que la variation de pression à la surface de la Terre se compose de deux parties :

1° — une variation due à un *transport horizontal* (avec *déformation*) dans le champ du vecteur de prévision $\vec{H}$ (terme $-\vec{H} \cdot \nabla_h p'_\sigma$).

2° — une variation $\left[\text{terme } \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h \left(\frac{\partial p'_\sigma}{\partial t}\right) \right]$ indépendante du gradient de

p'_σ est qui n'est autre que le *creusement* (ou *comblement*) du champ de pression à la surface de la Terre.

L'équation (33) présente donc la variation de pression en parfait accord avec l'idée de l'existence de deux variations de nature différente, idée qui est fortement suggérée par l'analyse des cartes du temps. Elle précise complètement les notions familières de variation par transport et de variation par creusement (ou comblement). C'est là une circonstance très intéressante et très utile.

On peut déduire facilement de l'équation (33) la vitesse de déplacement d'un «front» à la surface de la Terre en assimilant celui-ci à une discontinuité des dérivées premières de p'_σ. La vitesse du «front» $(W_f)_l$, mesurée dans une direction l, est alors donnée par la formule[1]:

$$(W_f)_l = -\frac{\triangle\left(\dfrac{\partial p'_\sigma}{\partial t}\right)}{\triangle\left(\dfrac{\partial p'_\sigma}{\partial l}\right)},$$

l'opérateur $\triangle$ désignant ici la discontinuité frontale de la quantité à laquelle il est appliqué. De l'équation (33) on déduit alors:

$$(W_f)_l = H_l + \vec{\Lambda} \cdot \frac{\triangle\left[\nabla_h\left(\dfrac{\partial p'_\sigma}{\partial t}\right)\right]}{\triangle\left(\dfrac{\partial p'_\sigma}{\partial l}\right)}$$

On voit donc que le «front» est entrainé par le vecteur de prévision $[(W_f)_l = H_l]$ quand il n'y a pas de discontinuité du gradient isallobarique instantané.

Finalement, la formule:

$$(W_i)_l = -\frac{\dfrac{\partial p'_\sigma}{\partial t}}{\dfrac{\partial p'_\sigma}{\partial l}},$$

de la vitesse $(W_i)_l$ de déplacement d'une isobare de p'_σ le long d'une direction l devient, grâce à (33):

$$(W_i)_l = H_l + \frac{1}{\dfrac{\partial p'_\sigma}{\partial l}} \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h\left(\frac{\partial p'_\sigma}{\partial t}\right).$$

[1] Voir le mémoire de l'auteur: «*La Mécanique différentielle des Fronts et du Champ isallobarique*» — Mémorial de l'Office Nat. Météor. de France, n.° 20, Paris, 1929.

L'isobare de p'_σ sera donc entrainée par le vecteur $\vec{H}$ partout où le gradient isallobarique instantané est nul.

5. Solution du problème atmosphérique sur la surface du géoïde par l'équation (33). La solution complète de cette équation, c'est-à-dire la détermination de la fonction $p'_\sigma(\varphi, \lambda, t)$ qui satisfait à la condition initiale $p'_\sigma(\varphi, \lambda, t=t_0)=(p'_\sigma)_0(\varphi, \lambda)$ — il n'y a pas ici de conditions aux limites puisque la surface du géoïde est une surface fermée —, doit être cherchée sous forme de développement en série correspondant, soit à des approximations successives, soit à la superposition des vibrations propres physiquement possibles de p'_σ.

A — Méthode des approximations successives. Soit $\eth/\eth t$ l'opérateur des variations observées en un point se déplaçant constamment avec la vitesse $\vec{H}_h$ (particules $\vec{H}$ horizontales), c'est-à-dire :

$$\frac{\eth}{\eth t}=\frac{\partial}{\partial t}+\vec{H}\bullet\nabla_h$$

L'équation (33) prend alors la forme :

$$\frac{\eth p'_\sigma}{\eth t}=\vec{\Lambda}\bullet\nabla_h\left(\frac{\partial p'_\sigma}{\partial t}\right). \tag{36}$$

Nous poserons :

$$p'_\sigma(\varphi, \lambda, t)=\sum_0^\infty{}_n\, \pi_n(\varphi, \lambda, t), \tag{37}$$

et définirons les approximations successives π_n par les équations :

$$\frac{\eth \pi_n}{\eth t}=\vec{\Lambda}\bullet\nabla_h\left(\frac{\partial \pi_{n-1}}{\partial t}\right), \qquad (\text{avec } \pi_{-1}=0), \tag{38}$$

et les conditions :

$$\begin{cases}\pi_0(\varphi, \lambda, t=t_0)=p'_\sigma(\varphi, \lambda, t=t_0)=(p'_\sigma)_0, \\ \pi_n(\varphi, \lambda, t=t_0)=0, \qquad \text{pour} \quad n\geqq 1.\end{cases} \tag{39}$$

Les lignes de flux de $\vec{H}$ et leurs trajectoires orthogonales forment, sur la surface σ du géoïde, un système de coordonnées de Gauss qu'on peut caractériser par des paramètres l et α, l étant par exemple une longueur mesurée sur une ligne de flux arbitraire à partir d'une trajectoire orthogonale arbitraire et α un paramètre de numérotage des lignes de flux. Soient l_0 et α_0 les valeurs des coordonnées l, α des particules $\vec{H}$ horizontales à l'instant initial $t=t_0$. La solution générale de la première équation (38) pour $n=0$, s'écrit alors en coordonnées de Lagrange l_0, α_0, t:

$$\pi_0(l_0, \alpha_0, t) = (p'_\sigma)_0(l_0, \alpha_0). \tag{40}$$

L'approximation d'ordre zéro est donc simplement le champ initial transporté sans creusement ni comblement en chaque point de σ avec une vitesse égale à la projection horizontale du vecteur de prévision $\vec{H}$. Ce transport comporte cependant évidemment une *déformation transversale* (due aux variations de H suivant les normales à ses lignes de flux) et une *déformation longitudinale* (due aux variations de $\vec{H}$ le long de ses lignes de flux).

Pour déterminer les approximations π_n $(n \geqq 1)$ qui sont en quelque sorte des creusements (ou comblements) d'ordre de plus en plus élevé, il faut déterminer la variation locale $\partial\pi_0/\partial t$ de l'approximation d'ordre zéro. Il faut donc exprimer (40) en coordonnées «eulériennes» l, α. On a:

$$\begin{cases} l = l_0 + \int_{t_0}^{t} H_l(l_0, \alpha_0, t)\,\partial t, \\ \alpha = \alpha, \end{cases} \tag{41}$$

l'opération $\int_{t_0}^{t} \partial t$ se rapportant ici à une même particule $\vec{H}$ horizontale. Des relations précédentes on déduit:

$$\begin{cases} l_0 = l_0(l, \alpha, t), \\ \alpha_0 = \alpha_0, \end{cases} \tag{42}$$

et la solution (40) prend alors la forme eulérienne cherchée:

$$\pi_0(l, \alpha, t) = (p'_\sigma)_0[l_0(l, \alpha, t), \alpha],$$

d'ou l'on déduit le champ de $\partial\pi_0/\partial t$:

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\{(p'_\sigma)_0[l_0(l, \alpha, t), \alpha]\}.$$

L'équation de l'approximation π_1 s'écrit:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial t} = \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h\left(\frac{\partial \pi_0}{\partial t}\right),$$

et sa solution, compte tenu des conditions (39), aura la forme suivante en coordonnées «lagrangiennes» l_0, α_0, t:

$$\pi_1(l_0, \alpha_0, t) = \int_{t_0}^{t} \left[\vec{\Lambda} \bullet \nabla_h \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial t} \right) \right] (l_0, \alpha_0, t) \partial t .$$

De la solution correspondante en coordonnées eulériennes

$$\pi_1(l, \alpha, t) = \int_{t_0}^{t} \left[\vec{\Lambda} \bullet \nabla_h \left(\frac{\partial \pi_0}{\partial t} \right) \right] [l_0(l, \alpha, t), \alpha, t] \, dt$$

on déduit $\partial\pi_1/\partial t$ qu'on introduit dans l'équation de l'approximation π_2 et ainsi de suite.

Pour trouver pratiquement la fonction $l_0(l, \alpha, t)$ de (42) dont la connaissance permet le calcul effectif des approximations successives on peut utiliser par exemple la relation :

$$\int_{l_0}^{l} \frac{\partial l}{H} = t - t_0 .$$

B. Méthode des vibrations propres. L'équation (33) étant linéaire admet évidemment des solutions de la forme :

$$(p'_\sigma)_n = a_n(l, \alpha) \sin[\omega_n(\alpha)\, t] + b_n(l, \alpha) \cos[\omega_n(\alpha)\, t] , \tag{43}$$

d'une *vibration harmonique généralisée* de fréquence $\omega_n(\alpha)$.

La vibration (43), introduite dans l'équation (33), donne alors les équations qui déterminent les amplitudes a_n et b_n :

$$\begin{cases} \omega_n a_n + \vec{H} \bullet \nabla_h b_n - \vec{\Lambda} \bullet \nabla_h (a_n \omega_n) = 0 \\ \omega_n b_n - \vec{H} \bullet \nabla_h a_n - \vec{\Lambda} \bullet \nabla_h (b_n \omega_n) = 0 , \end{cases} \tag{44}$$

qu'on peut écrire comme suit en faisant apparaître l'opérateur $\partial/\partial t$ et en remarquant que $\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial b}{\partial t} = 0$:

$$\begin{cases} \omega_n a_n + \dfrac{\partial b_n}{\partial t} - \vec{\Lambda} \bullet \nabla_h (\omega_n a_n) = 0 \\ \omega_n b_n - \dfrac{\partial a_n}{\partial t} - \vec{\Lambda} \bullet \nabla_h (\omega_n b_n) = 0 . \end{cases}$$

De ces équations on déduit :

$$(44')\quad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 a_n}{\partial t^2} + \omega_n^2 a_n = \omega_n \vec{\Lambda} \bullet \nabla_h (\omega_n a_n) - \dfrac{\partial}{\partial t}[\vec{\Lambda} \bullet \nabla_h (\omega_n b_n)] = f_n^a(\alpha, l_0, t) \\ \dfrac{\partial^2 b_n}{\partial t^2} + \omega_n^2 b_n = \omega_n \vec{\Lambda} \bullet \nabla_h (\omega_n b_n) + \dfrac{\partial}{\partial t}[\vec{\Lambda} \bullet \nabla_h (\omega_n a_n)] = f_n^a(\alpha, l_0, t). \end{cases}$$

Considérons les intégrales générales de ces équations (en coordonnées lagrangiennes l_0, α_0, t):

$$(44'')\quad \begin{cases} a_n(\alpha, l_0, t) = a_1^n \sin[\omega_n(\alpha) t] + a_2^n \cos[\omega_n(\alpha) t] + \\ + \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^t f_n^a(\alpha, l_0, t') \sin[\omega_n(\alpha)(t-t')]\, dt', \\ b_n(\alpha, l_0, t) = b_1^n \sin[\omega_n(\alpha) t] + b_2^n \cos[\omega_n(\alpha) t] + \\ + \dfrac{1}{\omega}\displaystyle\int_0^t f_n^b(\alpha, l_0, t') \sin[\omega_n(\alpha)(t-t')]\, dt', \end{cases}$$

a_1^n, a_2^n, b_2^n et b_2^n étant des constantes. Il faut distinguer deux cas:

1°. *les lignes de flux du vecteur $\vec{H}$ sont des courbes fermées sur la surface du géoïde.* Alors, les valeurs des fonctions a_n et b_n *sur les particules* $\vec{H}$ sont évidemment des fonctions périodiques de t. En désignant par $L(\alpha)$ la longueur des lignes de flux (fermées) du vecteur H, on déduit immédiatement des intégrales (44″) que le spectre des fréquences est discontinu (dénombrable) et qu'il est donné par la relation:

$$(45)\qquad \omega_n(\alpha) = \frac{2\pi n}{\displaystyle\int_0^{L(\alpha)} \frac{dl}{H(\alpha, l)}} \quad (n = 1, 2, \cdots),$$

on arrive ainsi à l'important résultat suivant:

Pour qu'il existe sur la surface du géoïde des vibrations harmoniques simples de p'_σ (c'est-à-dire pour que les ω_n soient constants en chaque point de cette surface), quand les lignes de flux du vecteur $\vec{H}$ sont des courbes fermées, il faut et il suffit que l'intégrale:

$$\int_0^{L(\alpha)} \frac{dl}{H(l, \alpha)}$$

soit constante pour chaque ligne de flux. En d'autres termes, il faut et il suffit que toutes les lignes de flux de $\vec{H}$ soient parcourues par les «particules $\vec{H}$» dans le même temps.

Si, comme il est naturel de le supposer, la fonction p'_σ peut être développée suivant les vibrations propres généralisées (43), on aura donc la série de Fourier suivante, dans le cas où les lignes de flux de $\vec{H}$ sont fermées :

(46)
$$p'_\sigma(\alpha, l, t) = \sum_1^\infty {}_n \, a_n(\alpha, l) \sin\left(\frac{2\pi nt}{\int_0^{L(\alpha)} \frac{dl}{H(l, \alpha)}}\right) + b_n(\alpha, l) \cos\left(\frac{2\pi nt}{\int_0^{L(\alpha)} \frac{dl}{H(l, \alpha)}}\right),$$

avec la période fondamentale :

(47)
$$\tau_1(\alpha) = \int_0^{L(\alpha)} \frac{dl}{H(l, \alpha)},$$

et les coefficients étant donnés par les formules classiques :

(48)
$$a_n(\alpha, l) = \frac{2}{\tau_1} \int_{t_0-\tau_1}^{t_0} p'_\sigma(\alpha, l, t) \sin\left(\frac{2\pi nt}{\tau_1(\alpha)}\right) dt;$$
$$b_n(\alpha, l) = \frac{2}{\tau_1} \int_{t_0-\tau_1}^{t_0} p'_\sigma(\alpha, l, t) \cos\left(\frac{2\pi nt}{\tau_1(\alpha)}\right) dt.$$

La série (46) montre que p'_σ est, en chaque point, une fonction périodique du temps dont la periode est τ_1 lorsque des lignes de flux de $\vec{H}$ sont fermées et lorsqu'on peut négliger les variations temporelles des champs entretenus pendant l'intervalle $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$.

Les vibrations propres généralisées (43) ont l'amplitude $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ et l'angle de phase :

$$\gamma_n = \text{arc tg}\left[-\frac{a_n(\alpha, l)}{b_n(\alpha, l)}\right].$$

Chaque vibration propre généralisée se comporte donc comme une onde dont la vitesse de propagation C_n, donnée par :

(49)
$$C_n(\alpha, l) = \frac{\omega_n(\alpha)}{|\nabla\gamma_n|} = \frac{2\pi n}{|\nabla\gamma_n| \int_0^{L(\alpha)} \frac{dl}{H(l, \alpha)}}$$

est constante dans le temps mais variable dans l'espace ; et il y a des points amphydromiques définis par :

$$a_n(\alpha, l) = b_n(\alpha, l) = 0.$$

2°. *les lignes de flux du vecteur de prévision $\vec{H}$ sont quelconques.* Alors, les équations (44') des amplitudes des vibrations propres généralisées de p'_σ ont des solutions pour toute valeur de ω comprise entre 0 et ∞. Le spectre des fréquences est donc continu et il faut remplacer la série (46) par l'intégrale de Fourier :

$$(50)\qquad p'_\sigma(\alpha, l, t) = \int_0^\infty [a(\omega, \alpha, l)\sin(\omega t) + b(\omega, \alpha, l)\cos(\omega t)]\, d\omega\,,$$

avec naturellement $\nabla\omega = 0$. Les formules classiques :

$$(51)\qquad a(\omega, \alpha, l) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [p'_\sigma(\alpha, l, t) - p'_\sigma(\alpha, l, -t)]\sin(\omega t)\, dt\,,$$

$$b(\omega, a, l) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [p'_\sigma(\alpha, l, t) + p'_\sigma(\alpha, l, -t)]\cos(\omega t)\, dt$$

sont impropres [1] à la détermination effective de $a(\omega)$ et de $b(\omega)$, puisqu'elles font intervenir les valeurs (inconnues) de $p'_\sigma(\alpha, l, t)$ pour $t > 0$. Il faut donc déterminer ces fonctions par le système (44), qui prend ici la forme :

$$\begin{cases} \omega(1 - \vec{\Lambda} \bullet \nabla_h)a = -\vec{H} \bullet \nabla_h b \\ \omega(1 - \vec{\Lambda} \bullet \nabla_h)b = \vec{H} \bullet \nabla_h a\,, \end{cases}$$

par suite de $\nabla\omega = 0$. Il va sans dire que si les lignes de flux de $\vec{H}$ peuvent être considérées comme des courbes presque fermées sur la surface du géoïde (nous verrons que tel est le cas), les fonctions $a(\alpha, \omega, l)$ et $b(\omega, \alpha, l)$ de (50) présentent des maxima très accentués dans le voisinage immédiat des valeurs de $\omega_n(\alpha)$ du spectre discontinu (45).

L'intégrale (50) *et, en première approximation, la série de Fourier* (46) *sont la solution du problème des variations de pression au niveau de la mer,* abstraction faite des variations lentes dues au mouvement entretenu (circulation générale). Cette solution, qui peut d'ailleurs être appliquée simplement dans la pratique, permet de déterminer la fonction s'_σ par la relation (28), d'où l'on déduit ensuite la température par la relation (30), c'est-à-dire :

$$(52)\qquad T^*_\sigma = (T^*_m)_\sigma\left[1 + \frac{s'_\sigma}{(S^*_m)_\sigma} + \frac{p'_\sigma}{(P^*_m)_\sigma}\right].$$

[1] Sauf dans le cas où $t = 0$ est un point de symétrie de $p(t)$.

6. Vibrations propres quand le mouvement entretenu est permanent et giratoire. Considérons l'atmosphère d'une Terre idéale dont la surface est uniforme (sans contrastes entre mers et continents) et où peut exister, par compensation entre les échanges de chaleur par rayonnement et les échanges de chaleur par «conduction de turbulence», une circulation générale ou mouvement entretenu giratoire autour de l'axe des pôles [1]. Dans un mouvement giratoire permanent, chaque particule décrit, à vitesse constante dans le temps mais variable en général avec la latitude et l'altitude, une trajectoire circulaire qui coïncide avec un parallèle géographique. Dans ce cas, le déterminant (5) est évidemment nul, mais son mineur réduit $\frac{1}{D}\chi_{12}$ a par contre la valeur :

$$\frac{\chi_{12}}{D} = -\frac{1}{2\Omega \sin\varphi - \dfrac{\partial (V_\lambda \cos\varphi)}{\partial \varphi}} \tag{53}$$

en coordonnées sphériques λ, φ. D'autre part, le vecteur $\vec{H}$ est évidemment horizontal et zonal, et n'a donc qu'une composante non nulle : H_λ. De la définition (9) de $\vec{H}$ nous déduisons :

$$H_\lambda = \frac{1}{r^2 \cos\varphi}\left(\frac{\chi_{12}}{D}\right)\frac{\partial E}{\partial \varphi}, \tag{53'}$$

ou bien, en tenant compte de (53) et en remarquant que $\partial E_g/\partial\varphi = 0$:

$$H_\lambda(\varphi, r) = -\frac{1}{r^2\cos\varphi\left[2\Omega\sin\varphi - \dfrac{\partial (V_\lambda \cos\varphi)}{\partial\varphi}\right]}\left(R\frac{\partial T}{\partial\varphi} + \frac{1}{2}\frac{\partial V^2}{\partial\varphi}\right). \tag{53''}$$

Calculons maintenant le vecteur $\vec{\Lambda}$ dont les composantes sont données par (35). On a ici :

$$\Lambda_\varphi = \frac{RT_m^*}{2rg}\operatorname{cotg}\varphi$$

et $\Lambda_\lambda = 0$.

L'équation (33) des variations de pression au niveau de la mer devient donc :

$$\frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} = -H_\lambda\frac{\partial p'_\sigma}{\partial\lambda} + \Lambda_\varphi\frac{\partial^2 p'_\sigma}{\partial\varphi\,\partial t}. \tag{54}$$

[1] Sur la théorie des circulations générales giratoires voir les mémoires de l'auteur : — *Sur les rotations des astres fluides* (Beiträge z. Physik d. fr. Atmosph., 19, 1932, p. 237-245) ; — *Les circulations générales et leurs perturbations* (Gerlands Beiträge z. Geophysik, 52, 1938, p. 20-67) ; — *Nouvelles recherches sur les perturbations spontanées du mouvement des fluides avec des applications à l'hydrodynamique solaire* (Troisième partie: *Hydrodynamique solaire*) Bull. Soc. Géograph. Lisbonne, 62, 1944

Considérons une perturbation de la circulation générale giratoire se déplaçant le long d'un parallèle. Si cette perturbation est symétrique on peut supposer que ses isallobares sont tangentes aux méridiens sur la trajectoire du centre et que, plus généralement, $\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial p'_\sigma}{\partial t}\right)$ est négligeable dans une zone relativement large de part et d'autre de la trajectoire du centre. Dans ces conditions, (54) montre qu'il n'y a presque pas de creusement (ou de comblement) dans cette zone, et alors cette équation s'intègre immédiatement et donne :

$$p'_\sigma(\varphi, \lambda, t) = [p'_\sigma]_0 \{ \varphi, \lambda - H_\lambda(\varphi) t \} . \tag{55}$$

L'évolution du champ de pression qui est traduite par cette solution est simplement un transport, le long des parallèles, du champ initial avec la vitesse angulaire H_λ par rapport à la surface de la Terre. A ce transport est cependant associée une déformation «transversale» du champ initial si H_λ est fonction de φ.

Dans l'hémisphère sud, pour $|\varphi| > 35°$, abstraction faite du continent antarctique et des pointes méridionales des continents américain, africain et australien, la circulation générale réelle de l'atmosphère se rapproche beaucoup, comme le montrent les cartes moyennes, d'une circulation giratoire quasi permanente. De sorte que les variations de pression dans l'hémisphère sud au niveau de la mer sont presque exactement déterminées par l'équation (54). Si nous considérons donc des perturbations de pression à configuration symétrique et pour lesquelles on peut négliger $\frac{\partial}{\partial \varphi}\left(\frac{\partial p'_\sigma}{\partial t}\right)$ dans une certaine zone située de part et d'autre de la trajectoire des centres, alors les variations de pression correspondantes dans cette zone seront intégrées par (55). Quelle que soit d'ailleurs l'importance du terme en $\frac{\partial^2 p'_\sigma}{\partial \varphi \, \partial t}$ vis-à-vis du terme en $\frac{\partial p'_\sigma}{\partial \lambda}$ dans l'équation (54), la solution générale de l'équation (54) sera donnée par la série de Fourier (46), puisque les lignes de flux de $\vec{H}$ sont ici des courbes fermées (confondues avec les parallèles géographiques). Cette série de Fourier prend d'ailleurs dans ce cas la forme suivante :

$$p'_\sigma(\varphi, \lambda, t) = \sum_1^\infty {}_n \, a_n(\varphi, \lambda) \sin nH_\lambda \, t + b_n(\varphi, \lambda) \cos nH_\lambda \, t , \tag{56}$$

puisque :

$$\int_0^{L(\alpha)} \frac{dl}{H(\alpha, l)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{H_\lambda(\varphi)} = \frac{2\pi}{H_\lambda(\varphi)}$$

Le spectre discontinu (45) des fréquences est donc défini ici par la relation :

(57) $$\omega_n(\varphi) = nH_\lambda(\varphi), \quad n = 1, 2, \cdots,$$

et l'on voit que quel que soit le creusement (ou le comblement) du champ de p'_σ, cette fonction est en chaque point une fonction périodique dont la période et $2\pi/H_\lambda(\varphi)$. En prenant pour H_λ la valeur 20°/jour qui correspond à la vitesse normale de translation des perturbations de pression pendant un régime d'ouest bien établi, la période fondamentale $2\pi/H_\lambda$ est donc de 18 jours et les premiers termes du spectre des périodes seront les suivants :

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
τ_n(jours)	18	9	6	4,5	3,6	3	2,6	2,2	2	1,8	1,6	1,5

Remarque. Dans la détermination des coefficients H_λ et Λ_φ de l'équation (54) des variations de pression au niveau de la mer pour une circulation générale permanente et giratoire, nous n'avons pas tenu compte de la condition d'adhérence du fluide à la surface (σ) du géoïde, condition que nous avions utilisée cependant dans la déduction de l'équation fondamentale (33). La raison de ceci est simplement que les fonctions $|H|$ et $|\Lambda|$ calculées par leurs expressions (9) et (35) en fonction de $\vec{V}$ et de E sont maxima sur la surface σ et il est donc pratiquement indifférent de déterminer leurs valeurs sur σ même ou à quelques mètres au dessus de cette surface. Cette remarque sera appliquée dans le § suivant.

7. Détermination des vecteurs de prévision $\vec{H}$ et $\vec{\Lambda}$. Les expressions (9) et (35) définissent ces vecteurs en fonction des champs entretenus de vitesse $(\vec{V})$ et d'énergie (E). Il est donc indispensable de déterminer ces grandeurs. Comme elles sont inaccessibles à l'observation directe à cause de l'existence des perturbations, il faut éliminer celles-ci par une certaine opération analytique. Nous admettrons que l'opération de moyenne temporelle (2), appliquée à une grandeur U^* quelconque, élimine la perturbation de cette grandeur et donne donc sa valeur entretenue U, lorsque l'intervalle de temps τ est suffisamment grand. En faisant abstraction des faibles variations du champ entretenu pendant l'intervalle τ, nous poserons donc :

(58) $$U_m^* \cong U_m \cong U(t)$$

et ceci entraîne d'ailleurs $u' \cong u$, ce qui est en accord avec la solution générale (46) ou (50) de l'équation (33). Nous aurons alors

$$D = D_m^*\,;\quad \chi = \chi_m^*\,;\quad E = E_m^*\,,$$

D_m^* étant le déterminant obtenu, à partir de (5), en remplaçant $\vec{V}$ par $\vec{V}_m^*$, χ_m^* la dyade des cofacteurs (mineurs signés) de ce déterminant et E_m^* la fonction: $(SP)_m^* + \frac{1}{2} V_m^{*2} + E_g$. Le vecteur de prévision $\vec{H}$ sera donc donné par:

$$\vec{H} = \frac{1}{D}\chi_m^* \bullet \nabla E_m^*\,.$$

Quand on étudie les phénomènes à la surface du géoïde (niveau de la mer), il est inutile de se servir du déterminant (5). Par suite de la condition cinématique $(V_\zeta) = 0$ sur la surface σ, on peut en effet remplacer ce déterminant par le déterminant

$$D_h = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial V_x}{\partial x} & \dfrac{\partial V_x}{\partial y} - 2\Omega \sin\varphi \\[2ex] \dfrac{\partial V_y}{\partial x} + 2\Omega\sin\varphi & \dfrac{\partial V_y}{\partial y} \end{vmatrix}\,,$$

des équations du mouvement, écrites en tenant compte de cette condition cinématique. Nous avons donc:

$$(59)\qquad D_h \cong (D_m^*)_h = \frac{\partial V_x}{\partial x}\frac{\partial V_y}{\partial y} - \left(\frac{\partial V_x}{\partial y} - 2\Omega\sin\varphi\right)\left(\frac{\partial V_y}{\partial x} + 2\Omega\sin\varphi\right),$$

x, y désignant ici des coordonnées orthogonales et horizontales en un point de la surface σ. A ce déterminant D_h correspond un vecteur de prévision horizontal:

$$(60)\qquad \begin{cases} H_x = -\dfrac{1}{D_h}\left(\dfrac{\partial V_y}{\partial x} + 2\Omega\sin\varphi\right)\dfrac{\partial E}{\partial y} + \dfrac{1}{D_h}\dfrac{\partial V_y}{\partial y}\dfrac{\partial E}{\partial x}, \\[2ex] H_y = -\dfrac{1}{D_h}\left(\dfrac{\partial V_x}{\partial y} - 2\Omega\sin\varphi\right)\dfrac{\partial E}{\partial x} + \dfrac{1}{D_h}\dfrac{\partial V_x}{\partial x}\dfrac{\partial E}{\partial y}. \end{cases}$$

Désignons par Λ_e et Λ_N les composantes du vecteur horizontal $\vec{\Lambda}$ respectivement vers l'est et vers le nord. Comme on a $\Omega_e = 0$, on déduit de (35) en tenant compte des valeurs des χ_{ij}:

$$(61)\qquad \begin{cases} \Lambda_e = \dfrac{R\bar{T}_m}{\bar{g}}\dfrac{\Omega\cos\varphi}{D_h}\dfrac{\partial V_N}{\partial N}, \\[2ex] \Lambda_N = -\dfrac{R\bar{T}_m}{\bar{g}}\dfrac{\Omega\cos\varphi}{D_h}\left(\dfrac{\partial V_e}{\partial N} - 2\Omega\sin\varphi\right), \end{cases}$$

le déterminant D_h ayant ici l'expression :

$$(62)\quad D_h = \left(\frac{\partial V_e}{\partial e} + \frac{V_N}{r}\operatorname{tg}\varphi\right)\frac{\partial V_N}{\partial N} - \left(\frac{\partial V_N}{\partial e} + 2\Omega\sin\varphi\right)\left(\frac{\partial V_e}{\partial N} - 2\Omega\sin\varphi\right)$$

et de et dN étant des déplacements infinitésimaux veers l'est et vers le nord.

Considérons les régions où toutes les dérivées spatiales horizontales du premier ordre des composantes de la vitesse entretenue $\vec{V}$ sont négligeables vis-à-vis de $2\Omega\sin\varphi$. (Pour $|\varphi| > 20^\circ$ on peut considérer que cette condition est satisfaite quand l'ordre de grandeur de ces dérivées spatiales n'atteint pas $10^{-4}\,\mathrm{sec}^{-1}$). Dans ces régions, on a $D_h \cong 4\Omega^2\sin^2\varphi$ et les expressions des composantes de $\vec{H}$ se simplifient beaucoup. On obtient :

$$(63)\qquad \vec{H} \cong -\frac{1}{2\Omega\sin\varphi}(\nabla_h E)\times\vec{k}_\zeta,$$

$\vec{k}_\zeta$ étant le vecteur unitaire de la verticale ascendante d'un point. Le vecteur $\vec{H}$ est donc, dans les régions en question, le «vent» du gradient de l'énergie hydromécanique $E \cong E_m^*$ du mouvement entretenu.

Le théorème de Bernoulli, appliqué à un mouvement permanent horizontal, donne l'équation des lignes de flux de $\vec{V}$:

$$\int S dP + \frac{1}{2}V^2 = \text{Constante}$$

(cette constante variant en général d'une ligne de flux à une autre ligne de flux). Dans les mêmes conditions restrictives qui permettent de déduire (63) de (9), le mouvement entretenu permanent est un mouvement géostrophique (vent horizontal du gradient) ou, plus généralement, un mouvement cyclostrophique. L'expression du théorème de Bernoulli devient alors :

$$V = \text{Constante sur une isobare.}$$

D'autre part on aura :

$$\frac{1}{2}V^2 = \rho_i^2\Omega^2\sin^2\varphi\left(1 \pm \frac{V_G}{\rho_i\Omega\sin\varphi} - \sqrt{1 \pm \frac{2V_G}{\rho_i\Omega\sin\varphi}}\right),$$

avec :

$$\lim_{\rho_i\to\infty} V \equiv V_G = \frac{S}{2\Omega\sin\varphi}\left|\frac{\partial P}{\partial n}\right|,$$

d'après l'équation du mouvement. Dans ces relations n est la normale horizontale aux isobares en un point et ρ_i le rayon de courbure des isobares. (Le signe $+$ correspond aux isobares cycloniques et le signe $-$ aux isobares anticycloniques). De (63) on déduit donc :

$$\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2, \tag{64}$$

avec :

$$\left\{\begin{aligned} \vec{H}_1 &= -\frac{R}{2\Omega\sin\varphi}(\nabla_h T)\times\vec{k}_\zeta, \\ \vec{H}_2 &= -\frac{1}{4\Omega\sin\varphi}(\nabla_h V^2)\times\vec{k}_\zeta \cong \\ &-\frac{1}{2\Omega\sin\varphi}\nabla_h\left\{\rho_i^2\Omega^2\sin^2\varphi\left(1\pm\frac{V_G}{\rho_i\,\Omega\sin\varphi}-\sqrt{1\pm\frac{2V_G}{\rho_i\,\Omega\sin\varphi}}\right)\right\}\times\vec{k}_\zeta. \end{aligned}\right. \tag{65}$$

Le vecteur $\vec{H}_1$ est le «vent» du gradient de la température, tandis que $\vec{H}_2$ est le «vent» du gradient de l'énergie cinétique. Les lignes de flux de $\vec{H}_2$ sont confondues avec les isobares du mouvement entretenu ; la direction de ce vecteur est celle du vent entretenu du gradient si $(\nabla V)\bullet\nabla P>0$ et inversement.

Il est intéressant de remarquer que si les conditions qui permettent de déduire (63) de (9) étaient satisfaites sur toute la surface de la Terre, les lignes de flux du vecteur $\vec{H}$ seraient des courbes fermées, de sorte que la série de Fourier (46) représenterait alors la solution rigoureuse du problème des variations de pression, lorsque le champ entretenu est permanent. [La condition la plus générale pour que les lignes de flux de $\vec{H}$ puissent être considérées comme des courbes fermées est d'ailleurs moins restrictive que les conditions qui permettent d'écrire (63). Il suffit en effet, d'après (60), que $\partial V_x/\partial x$ et $\partial V_y/\partial y$ soient négligeables par rapport à $2\Omega\sin\varphi$, tandis que $\partial V_x/\partial y$ et $\partial V_y/\partial x$ peuvent avoir des valeurs quelconques].

Dans les régions où l'expression (63) de $\vec{H}$ est valable, c'est-à-dire là où ce vecteur est, en première approximation (au 1/10 près), le «vent» du gradient de l'énergie entretenue, le terme de creusement (ou de comblement) $\vec{\Lambda}\bullet\nabla_h\left(\frac{\partial p'_\sigma}{\partial t}\right)$ de l'équation fondamentale (33) est normal. Les expressions (61) montrent en effet que le vecteur $\vec{\Lambda}$ ne dépasse pas alors l'ordre de grandeur 10^5 mètres, car $\bar{g}\cong 10^{-2}g$; d'autre part, $\nabla_h\left(\frac{\partial p'_\sigma}{\partial t}\right)$ a l'ordre de grandeur normal 10^{-10} cbar. mètre^{-1}. sec^{-1}., ce qui donne pour le creusement (ou le comblement) l'ordre de grandeur

10^{-5} cbar. sec^{-1}, tandis que le creusement (ou le comblement) des perturbations à évolution rapide a l'ordre de grandeur 10^{-4} cbar sec^{-1}, c'est-à-dire 10 millibar/3 heures. Pour que le vecteur $\vec{\Lambda}$ ait l'ordre de grandeur 10^6 mètres qui donne le creusement et le comblement rapides, il faut que D_h ne dépasse pas l'ordre de grandeur 10^{-9} sec^{-2}. D'après (62), ceci ne peut avoir lieu que si les dérivées spatiales horizontales de $\vec{V}$ sont de l'ordre de grandeur de $2\,\Omega \sin \varphi$, c'est-à-dire 10^{-4} sec^{-1}. D'après (60) *les régions où ceci a lieu, et qui sont celles où il peut y avoir un creusement (ou un comblement) rapide des perturbations, sont aussi celles où le vecteur $\vec{H}$ diffère beaucoup du «vent» du gradient de l'énergie entretenue.* Les mêmes expressions (60), comparées à (61), montrent aussi que les lignes de flux de $\vec{H}$ qui traversent les régions de creusement (ou de comblement) rapide ne peuvent pas être considérées comme des courbes fermées, même en première approximation. Pour les points situés dans ces zones de creusement (ou de comblement) la solution de l'équation (33) des variations de pression est l'intégrale de Fourier (50), ou bien la série (37) des approximations successives ; tandis que pour les points où passent des lignes de flux de $\vec{H}$ qui ne traversent pas les zones de creusement (ou de comblement) rapide on peut se borner à la série de Fourier (46).

Dans la pratique, pour déterminer les vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{\Lambda}$, on commence naturellement par le tracé des cartes des pressions moyennes au niveau de la mer $(P^*_m)_\sigma$ et des températures moyennes au niveau de la mer $(T^*_m)_\sigma$, pendant un intervalle de temps $\tau = t_0 - t_1$ dans le passé contigu à l'instant initial t_0 et de l'ordre de grandeur de 10 jours, pour éliminer les perturbations. A l'aide du champ de $(P^*_m)_\sigma$ et de la relation $P_\sigma(t) \cong (P^*_m)_\sigma$, cas particulier de (58), on détermine le vent entretenu par la formule classique du vent cyclostrophique (complétée au besoin par un terme de frottement), d'où l'on déduit l'énergie cinétique entretenue par unité de volume $\frac{1}{2} V^2$. On calcule ensuite la fonction $E_\sigma = R\,(T^*_m)_\sigma + \frac{1}{2} V^2_\sigma$ ainsi que les composantes $\frac{\partial E}{\partial e}$ et $\frac{\partial E}{\partial N}$ de son gradient horizontal. Connaissant les composantes V_e et V_N du vent entretenu, on en déduit les quatre dérivées partielles $\frac{\partial V_e}{\partial e}$, $\frac{\partial V_e}{\partial N}$, $\frac{\partial V_N}{\partial e}$ et $\frac{\partial V_N}{\partial N}$, ce qui permet de calculer immédiatement la valeur du déterminant D_h par l'expression (62). On a ainsi tous les éléments pour le calcul des composantes H_e, H_N, Λ_e et Λ_N des vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{\Lambda}$ par les expressions (60) et (61).

Il sera utile aussi, comme nous le verrons dans le § suivant, de tracer la carte des courbes de niveau de la fonction $\vec{\Lambda}\bullet\vec{H}$ et celle des courbes de niveau de la fonction :

$$|\vec{\Lambda}| = \frac{R(T_m^*)_\sigma}{g}\frac{\Omega\cos\varphi}{D_h}\sqrt{\left(\frac{\partial V_e}{\partial N} - 2\Omega\sin\varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial V_N}{\partial N}\right)^2},$$

puisque d'une part c'est en quelque sorte $\vec{\Lambda}$ qui représente la contribution du champ entretenu au creusement (ou au comblement) des perturbations, et nous verrons d'autre part plus loin que $\vec{\Lambda}\bullet\vec{H}$ est, à un facteur près, le creusement (ou le comblement) intrinsèque des perturbations circulaires.

8. Les vecteurs de prévision $\vec{H}$ et $\vec{H}$ et la climatologie dynamique. Nous entendons ici par climatologie dynamique la branche de la météorologie qui a pour but la recherche des relations qui existent entre les valeurs moyennes (normales annuelles, moyennes mensuelles normales, etc.) des éléments principaux (P^*, T^*, V^*) et les propriétés moyennes des perturbations atmosphériques (trajectoires moyennes, zones de naissance et de disparition privilégiées des perturbations, etc.) dans les différentes régions du globe.

L'importance des vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{\Lambda}$ est décisive dans cette climatologie dynamique, comme nous allons le voir. Donnons-nous par exemple le champ des moyennes normales de la pression et de la température (au niveau de la mer) et du vent pour un certain mois de l'année. On peut en déduire, comme il a été expliqué dans le § précédent, les vecteurs moyens $\vec{H}_m$ et $\vec{\Lambda}_m$ correspondants. L'évolution des perturbations (p'_σ) de pression de ce champ entretenu moyen sera donnée évidemment par l'équation (33). Considérons alors une perturbation «normale» dont le creusement (ou le comblement) est constamment un extrémum au centre. La trajectoire d'une telle perturbation est évidemment indépendante de son creusement (ou de son comblement). Or, l'équation (33) montre immédiatement que la trajectoire d'une perturbation sans creusement ou comblement est une ligne de flux de $\vec{H}$ (la vitesse du centre étant égale à $\vec{H}$), puisque l'intégrale générale de (33), sans le terme en $\vec{\Lambda}$, s'écrit simplement:

$$p'_\sigma(l_0, \alpha_0, t) = (p'_\sigma)_0\,\{l_0, \alpha_0\},$$

en coordonnées lagrangiennes l_0, α_0 (coordonnées initiales des «particules $\vec{H}$», voir § 5,A). On voit donc que *les «trajectoires moyennes» des perturbations «normales» sont les lignes de flux du vecteur $\vec{H}$ moyen (la vitesse du centre étant égale à $\vec{H}$).*

Envisageons ensuite des «tourbillons circulaires», c'est-à-dire des perturbations dont le champ de p'_σ est constitué par des isobares circulaires. Ces perturbations appartiennent évidemment à la classe des perturbations «normales» définie ci-dessus, et la vitesse $\vec{W}$ de déplacement de leur centre est donnée par la formule :

$$\vec{W} = -\left(\frac{\partial^2 p'_\sigma}{\partial \rho^2}\right)_c^{-1} \nabla_h \left(\frac{\partial p'_\sigma}{\partial t}\right)_c, \tag{66}$$

ρ étant une longueur mesurée sur un rayon horizontal de la perturbation et l'indice c indiquant les valeurs au centre. L'équation (33), appliquée au centre de ces perturbations, prend alors la forme :

$$\left(\frac{\partial p'_\sigma}{\partial t}\right)_c = -\left(\frac{\partial^2 p'_\sigma}{\partial \rho^2}\right)_c \vec{\Lambda} \bullet \vec{W}.$$

Mais nous savons que la vitesse de déplacement du centre d'une perturbation normale est égale à $\vec{H}$, c'est-à-dire $\vec{W} = \vec{H}$.
Donc :

$$\left(\frac{\partial p'_\sigma}{\partial t}\right)_c = -\left(\frac{\partial^2 p'_\sigma}{\partial \rho^2}\right)_c \vec{\Lambda} \bullet \vec{H}, \tag{67}$$

pour les perturbations circulaires («tourbillons» circulaires). Cette équation montre que *la contribution du champ entretenu au creusement (ou au comblement) du centre des perturbations circulaires est le produit scalaire des vecteurs $\vec{H}$ et $\vec{\Lambda}$.*

Le voisinage immédiat du centre d'une perturbation quelconque de p'_σ présente toujours, en première approximation, les caractères d'une perturbation circulaire ; d'autre part, c'est évidemment une perturbation circulaire qui représente le mieux le voisinage immédiat du centre de la «perturbation moyenne» de p'_σ qu'on peut imaginer superposée à un mouvement entretenu moyen pour étudier la climatologie dynamique d'une région. C'est donc l'équation (67) qu'il faut utiliser en climatologie dynamique et cette équation montre que *les zones privilégiées de naissance et de creusement des perturbations (foyers de cyclones) pour un champ entretenu moyen sont les zones où l'on a $\vec{\Lambda} \bullet \vec{H} > 0$, et les zones privilégiées ou foyers de comblement et de disparition des perturbations sont celles où, par contre, $\vec{\Lambda} \bullet \vec{H} < 0$.*

Pour étudier la climatologie dynamique, *il faut donc tracer, à coté des lignes de flux de* $\vec{H}$ *moyen (qui donnent les trajectoires moyennes des perturbations), les courbes de niveau de la fonction* $\vec{\Lambda} \cdot \vec{H}$.

Considérons finalement les rapports entre les trajectoires moyennes des perturbations en dehors des zones privilégiées de creusement et de comblement et les champs moyens de pression et de température. Le vecteur $\vec{H}$, en dehors de ces foyers de creusement et de comblement, est donné, en première approximation, par (63), de sorte que les trajectoires moyennes des perturbations coïncident, dans ces régions, avec les courbes de niveau de l'énergie hydromécanique E du mouvement entretenu moyen. On peut poser d'ailleurs $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$, avec les valeurs (65) pour les vecteurs $\vec{H}_1$ et $\vec{H}_2$. Le vecteur $\vec{H}_1$ («vent» du gradient de la température) est prédominant dans les zones extratropicales où les variations spatiales de la température l'emportent presque partout sur celles de l'énergie cinétique. On peut donc dire que *les trajectoires moyennes des perturbations de* p'_σ *dans les régions extratropicales, et en dehors des foyers de creusement et de comblement, coïncident, en première approximation, avec les isothermes moyennes.*

Dans les régions tropicales les variations spatiales de la température moyenne sont presque partout très faibles mais il peut y avoir d'importantes variations spatiales de l'énergie cinétique moyenne. Le vecteur $\vec{H}_2$ («vent» du gradient de l'énergie cinétique entretenue) sera donc en général prépondérant et comme ce vecteur est tangent aux isobares entretenues, on voit que *les trajectoires moyennes des perturbations de* p'_σ *dans les régions intertropicales (cyclones tropicaux), en dehors des foyers de naissance et de creusement, coïncident, en première approximation, avec les isobares moyennes.* Ces résultats sont en parfait accord avec des faits bien connus en météorologie empirique.

9. Solution générale des équations (22) des perturbations. La solution de ce système peut être cherchée par une méthode d'approximations successives qui est la généralisation naturelle de la méthode utilisée pour résoudre l'équation (33) du champ de p'_σ (Voir § 5, A). Nous poserons donc :

$$(68) \qquad \begin{cases} p' = \sum_0^\infty {}_n \, \pi_n \\ \vec{v}' = \sum_0^\infty {}_n \, \vec{w}_n \\ s' = \sum_0^\infty {}_n \, \varsigma_n \end{cases}$$

et définirons les approximations successives par les systèmes :

$$(69)\quad \begin{cases} \dfrac{\partial \pi_n}{\partial t} + \vec{H} \bullet \nabla_h \pi_n = - P_m^* \operatorname{div} \vec{w}_{n-1}\,, \\ \vec{w}_n = - S_m^* \nabla \pi_n \bullet \dfrac{\chi}{D} + \dfrac{\varsigma_n}{S_m^*}\left(\vec{V}_m^* - \vec{g} \bullet \dfrac{\chi}{D} \right), \\ \dfrac{\partial \varsigma_n}{\partial t} + \vec{V}_m^* \bullet \nabla \varsigma_n + \vec{w}_n \bullet \nabla S_m^* + \vec{w}_n \bullet \nabla \varsigma_n + \\ \qquad + \sum_0^{n-1}{}_i \vec{w}_i \bullet \nabla \varsigma_n + \vec{w}_n \bullet \nabla \sum_0^{n-1}{}_i \varsigma_i = S_m^* \operatorname{div} \vec{w}_{n-1}\,, \end{cases}$$

et par les conditions suivantes :

1° — conditions initiales :

$$(70)\quad \begin{cases} \pi_0(x\,,y\,,z\,,t=t_0) = p_0'(x\,,y\,,z)\,, \\ \varsigma_0(x\,,y\,,z\,,t=t_0) = s_0'(x\,,y\,,z)\,, \\ \vec{w}_0(x\,,y\,,z\,,t=t_0) = \vec{v}_0'(x\,,y\,,z)\,; \end{cases}$$

$$(71)\quad \begin{cases} \pi_n(x\,,y\,,z\,,t=t_0) = 0\,, \\ \varsigma_n(x\,,y\,,z\,,t=t_0) = 0\,, \qquad \text{pour} \quad n \geqq 1. \\ \vec{w}_n(x\,,y\,,z\,,t=t_0) = 0\,, \end{cases}$$

2° — conditions aux limites : a) — conditions aux limites extérieures de l'atmosphère :

$$(72)\quad \begin{cases} \lim\limits_{r\to\infty} \pi_n = 0\,, \\ \lim\limits_{r\to\infty} \varsigma_n = 0\,, \\ \lim\limits_{r\to\infty} \vec{w}_n = 0\,. \end{cases}$$

b) — conditions aux limites sur la surface σ du géoïde. La condition cinématique aux limites est traduite par la relation (28) et l'on doit avoir ici, puisque $[(w_n)_\zeta]_\sigma = 0$:

$$(73)\quad (S_m^*)_\sigma \nabla_h (\pi_n)_\sigma \bullet \chi_\sigma + 2\bar{g}\,(\chi_{\zeta\zeta})_\sigma \frac{(\varsigma_n)_\sigma}{(S_m^*)_\sigma} = 0\,, \quad \text{pour} \quad n = 0\,,1\,,2\,,\cdots$$

La première équation de (69) s'intègre immédiatement et donne, en coordonnées lagrangiennes :

$$(74)\qquad \pi_n(l_0\,,\alpha_0\,,\eta_0\,,t) = (\pi_n)_0(l_0\,,\alpha_0\,,\eta_0) - \int_{t_0}^{t} P_m^* \operatorname{div} \vec{w}_{n-1}\,\partial t\,,$$

(α est ici le paramètre continu d'une famille quelconque de «surfaces de flux» de $\vec{H}$ horizontal, l le paramètre continu d'une famille de surfaces orthogonales aux premières, et η le géopotentiel. On a donc:

$$\begin{cases} l = l_0 + \int_{t_0}^{t} H_l(l_0, \alpha_0, \eta_0, t)\,\partial t \\ \alpha = \alpha_0, \\ \eta = \eta_0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{cases} l_0 = l_0(l, \alpha, \eta, t), \\ \alpha_0 = \alpha, \\ \eta_0 = \eta. \end{cases}$$

Ces fonctions, introduites dans (74), donnent les π_n en coordonnées eulériennes l, α, η, t:

(74')

$$\pi_n(l, \alpha, \eta, t) = (\pi_n)_0[l_0(l, \alpha, \eta, t); \alpha; \eta] - \int_{t_0}^{t} P_m^*[l_0(l, \alpha, \eta t,); \alpha; \eta; t] \times$$
$$\times (\operatorname{div} \vec{w}_{n-1})[l_0(l, \alpha, \eta t); \alpha; \eta; t]\,dt.$$

Ces solutions satisfont aux conditions initiales (70) et (71), puisqu'on a d'une part $(\pi_0)_0 = p_0'$ et d'autre part $(\pi_n)_0 = 0$ pour $n \geq 1$. Les conditions aux limites extérieures (72) sont satisfaites aussi par suite de $\lim\limits_{r\to\infty}(\pi_n)_0 = 0$ et de $\lim\limits_{r\to\infty} P_m^* = 0$. Quant à la condition cinématique sur σ, nous verrons un peu plus loin qu'elle est également satisfaite.

Définissons les opérateurs suivants:

$$\frac{d_n \varsigma_n}{d_n t} = \frac{\partial}{\partial t} + \left(\vec{V}_m^* - S_m^* \nabla \pi_n \bullet \frac{\chi}{D} + \sum_0^{n-1}{}_i \vec{w}_i\right) \bullet \nabla. \tag{75}$$

Les troisièmes équations des systèmes (69) s'écrivent alors comme suit, en tenant compte des deuxièmes équations:

$$\frac{d_n \varsigma_n}{d_n t} + \frac{1}{S_m^*}\left[\left(\vec{V}_m^* - \vec{g} \bullet \frac{\chi}{D}\right) \bullet \nabla \left(S_m^* + \sum_0^{n-1}{}_i \varsigma_i\right)\right] \varsigma_n +$$
$$+ \frac{1}{2S_m^*}\left(\vec{V}_m^* - \vec{g} \bullet \frac{\chi}{D}\right) \bullet \nabla \varsigma_n^2 = S_m^* \operatorname{div} \vec{w}_{n-1} +$$
$$+ S_m^* \left(\nabla \pi_n \bullet \frac{\chi}{D}\right) \bullet \nabla \left(S_m^* + \sum_0^{n-1}{}_i \varsigma_i\right). \tag{76}$$

Soient:

$$\varsigma_n(\varphi, \lambda, \eta, t) \tag{77}$$

les solutions de ces équations qui satisfont aux conditions initiales (70) ou (71), à la condition cinématique (73) et aux conditions aux limites extérieures (71). Ces fonctions et les fonctions (74′)[1], introduites dans les deuxièmes équations de (69), donnent alors les approximations successives $\vec{w}_n$ de la perturbation de la vitesse qui satisfont à toutes les conditions initiales et aux limites requises, puisque les π_n et les ς_n satisfont à ces conditions. La seule difficulté de la méthode d'approximations successives provient donc du terme non linéaire $\nabla \varsigma_n^2$ des équations (76). Pour lever cette difficulté, nous poserons, dans ces termes non linéaires :

$$(78) \qquad \varsigma_n(\varphi, \lambda, \eta, t) = e^{-a\eta}[\varsigma_n]_\sigma(\varphi, \lambda, t) + \mu_n(\varphi, \lambda, \eta, t),$$

a étant une constante et les μ_n des fonctions qui satisfont aux conditions aux limites $(\mu_n)_\sigma = 0, \lim\limits_{r\to\infty} \mu_n = 0$ et initiales : $(\mu_n)_{t=t_0} = 0$ pour $n \geqq 1$ et $(\mu_0)_{t=t_0} = s_0'(\varphi, \lambda, \eta) - e^{-a\eta}(s_0')_\sigma$. Ces fonctions (78) satisfont donc à toutes les conditions initiales et aux limites du problème, puisque les $(\varsigma_n)_\sigma$ sont déterminés en fonction des π_n [donnés par (74′)] au moyen de la condition aux limites sur σ (73).

Admettons que les μ_n sont des petites quantités telles qu'on peut négliger, vis-à-vis de $\nabla[e^{-2a\eta}(\varsigma_n)_\sigma^2]$, les vecteurs $\nabla \mu_n^2$ et $\nabla[e^{-a\eta}\mu_n(\varsigma_n)_\sigma^2]$. Une telle condition est verifiée a priori dans la voisinage de σ, mais nous admettrons qu'il en est de même dans toute l'épaisseur de l'atmosphère. En posant :

$$(79) \qquad f_n = S_m^* \operatorname{div} \vec{w}_{n-1} + S_m^* \left(\nabla \pi_n \bullet \frac{\chi}{D}\right) \bullet \nabla \left(S_m^* + \sum_0^{n-1}{}_i \varsigma_i\right) -$$
$$- \frac{e^{-2a\eta}}{2S_m^*}\left(\vec{V}_m^* - \vec{g} \bullet \frac{\chi}{D}\right) \bullet [\nabla_h (\varsigma_n)_\sigma^2 - 2a(\varsigma_n)_\sigma^2 \vec{k}_\eta]$$

les équations (76) deviennent alors :

$$(80) \quad \frac{d_n \varsigma_n}{d_n t} + \frac{1}{S_m^*}\left[\left(\vec{V}_m^* - \vec{g} \bullet \frac{\chi}{D}\right) \bullet \nabla \left(S_m^* + \sum_0^{n-1}{}_i \varsigma_i\right)\right] \varsigma_n = f_n(x_n^0, y_n^0, z_n^0, t),$$

x_n^0, y_n^0, z_n^0, t désignant les coordonnées lagrangiennes qui correspondent aux opérateurs $d_n/d_n t$, définis par (75). Ce sont donc les coordonnées cartésiennes rectangulaires initiales de particules fictives se déplaçant

[1] On voit maintenant que les π_n satisfont aux conditions (73) si l'on contraint les ς_n à y satisfaire.

en chaque point et à tout instant avec la vitesse

$$\vec{V}_m^* - S_m^* \nabla \pi_n \bullet \frac{\chi}{D} + \sum_0^{n-1}{}_i \vec{w}_i .$$

Remarquons que les f_n sont, d'après leur définition (79), des fonctions connues, puisque les $(\varsigma_n)_\sigma$ sont déterminés par la condition (73), en fonction des π_n.

L'intégrale générale de (80) s'écrit alors:

$$(81) \quad \varsigma_n(x_n^0, y_n^0, z_n^0, t) = \left\{ \int_{t_0}^{t} e^{\int \xi(x_n^0, y_n^0, z_n^0, t)\, d_n t} f_n(x_n^0, y_n^0, z_n^0, t)\, d_n t + \right.$$

$$\left. + (\varsigma_n)_0 [x_n^0, y_n^0, z_n^0] \right\} e^{-\int_{t_0}^{t} \xi(x_n^0, y_n^0, z_n^0, t)\, d_n t},$$

avec:

$$\xi(x_n^0, y_n^0, z_n^0, t) = \frac{1}{S_m^*} \left[\left(\vec{V}_m^* - \vec{g} \bullet \frac{\chi}{D} \right) \bullet \nabla (S_m^* + \sum_0^{n-1}{}_i \varsigma_i) \right].$$

Il est essentiel de ne pas oublier que l'opération $\int_{t_0}^{t} d_n t$ se rapporte évidemment aux particules fictives qui se déplacent à la vitesse

$$\vec{V}_m^* - S_m^* \nabla \pi_n \bullet \frac{\chi}{D} + \sum_0^{n-1}{}_i \vec{w}_i .$$

Les solutions (81) satisfont évidemment aux conditions initiales [(70) ou (71)], ainsi qu'à la condition aux limites extérieures, puisque $\lim_{\eta \to \infty} (\varsigma_n)_0 = 0$ et d'autre part (79) montre que $\lim_{\eta \to \infty} f_n = 0$. De plus, ces solutions satisfont évidemment aussi à la condition cinématique (73) sur la surface σ du géoïde dans la mesure où l'hypothèse introduite ci-dessus sur les μ_n est verifiée.

Pour passer de la solution (81) de ς_n en coordonnées «lagrangiennes» x_n^0, y_n^0, z_n^0, t aux solutions correspondantes en coordonnées eulériennes ($\varphi, \lambda, \eta, t$ par exemple), on a les relations:

$$x_n = x_n^0 + \int_{t_0}^{t} [\vec{V}_m^* - S_m^* \nabla \pi_n \bullet \frac{\chi}{D} + \sum_0^{n-1}{}_i \vec{w}_i]_x (x_n^0, y_n^0, z_n^0, t)\, d_n t,$$

$$y_n = y_n^0 + \int_{t_0}^{t} [\vec{V}_m^* - S_m^* \nabla \pi_n \bullet \frac{\chi}{D} + \sum_0^{n-1}{}_i \vec{w}_i]_y (x_n^0, y_n^0, z_n^0, t)\, d_n t,$$

$$z_n = z_n^0 + \int_{t_0}^{t} [\vec{V}_m^* - S_m^* \nabla \pi_n \bullet \frac{\chi}{D} + \sum_0^{n-1}{}_i \vec{w}_i]_z (x_n^0, y_n^0, z_n^0, t)\, d_n t,$$

d'où l'on déduit:

$$\begin{cases} x_n^0 = x_n^0(x, y, z, t) = x_n^0[x(\varphi, \lambda, \eta); y(\varphi, \lambda, \eta); z(\varphi, \lambda, \eta); t] \\ y_n^0 = y_n^0(x, y, z, t) = y_n^0[x(\varphi, \lambda, \eta); y(\varphi, \lambda, \eta); z(\varphi, \lambda, \eta); t] \\ z_n^0 = z_n^0(x, y, z, t) = z_n^0[x(\varphi, \lambda, \eta); y(\varphi, \lambda, \eta); z(\varphi, \lambda, \eta); t] \end{cases}$$

Ces fonctions, introduites dans les $\varsigma_n(x_n^0, y_n^0, z_n^0, t)$ donnent les solutions eulériennes correspondantes en coordonnées «géopopentielles» $\varphi, \lambda, \eta, t$.

TABLE DES MATIÈRES

ERRATA

Pag.	ligne		au lieu de	lire
204	18		ξ	ζ
Équations				
(22)	mettre + avant le terme en s'			
(27)	écrire	$-(g+2\bar{g})\Psi'$	au lieu de	$-g\Psi'$
(28), (28 bis), (34), (35)	remplacer	g	par	$\bar{g}$
(41)	écrire	$\alpha = \alpha_0$	au lieu de	$\alpha = \alpha$
(42)	écrire	$\alpha_0 = \alpha$	au lieu de	$\alpha_0 = \alpha_0$