



PORTUGALIAE  
PHYSICA

COMISSÃO DE REDACÇÃO:

A. CYRILLO SOARES, M. T. ANTUNES, A. MARQUES DA SILVA E M. VALADARES

EDITOR:

A. CYRILLO SOARES (Director do Laboratório de Física da Fac. de Ciências de Lisboa)

## ÍNDICE

(Table des matières)

|   |         |
|---|---------|
| A. GIÃO — Le problème cosmologique généralisé et la mécanique ondulatoire relativiste. . . . .  | 1- 98   |
| J. L. RODRIGUES MARTINS — L'influence des forces de Schwinger sur des processus nucléaires . . . . .  | 99-120  |
| RODRIGO SARMENTO DE BEIRES — Sur l'expression $\lambda=h/mv$ de la longueur des ondes de De Broglie associées aux corpuscules en mouvement. . . | 121-124 |
| A. VAN ITTERBEECK et L. DE GREVE—Mesures sur des films minces en argent   | 125-138 |
| JOSÉ SARMENTO — Étude des satellites de la raie $L\alpha$ de l'or . . . . .   | 139-148 |
| G. DEDEBANT — Les schémas aléatoires devant la relativité restreinte . .  | 149-202 |
| A. GIÃO — Le problème atmosphérique d'après la théorie des perturbations spontanées . . . . .   | 203-234 |
| A. VAN ITTERBEECK et A. DE BOCK — Mesures sur les courbes de resonance ultrasonores dans des liquides . . . . .                                 | 235-242 |
| A. GIBERT — Diffusion des neutrons thermiques par le méthane entre 20 et 200°K. . . . .   | 243-252 |
| Post-fácio . . . . .  | 253     |
| Obras recebidas . . . . .   | 254-256 |



LE PROBLÈME COSMOLOGIQUE GÉNÉRALISÉ ET LA MÉCANIQUE  
ONDULATOIRE RELATIVISTE

par ANTONIO GIÃO

(Reçu le 15 Mars 1945)

## I — PRÉLIMINAIRES

Ce mémoire a pour but d'introduire dans la physique un *principe cosmologique* qui permet de faire la synthèse de la Relativité générale et de la Mécanique ondulatoire, suivant une voie nouvelle.

Pour comprendre ce principe, d'après lequel *il y a identité entre existence physique et existence mathématique non-arbitraire*, il faut expliquer tout d'abord ce que nous entendons par *être mathématique non-arbitraire*.

1. Les êtres mathématiques complets. L'existence mathématique n'est conditionnée que par l'absence de contradiction. La non-contradiction, qui assure la compatibilité des différentes opérations par lesquelles on peut obtenir (exprimer) un être mathématique, *pose dans l'existence mathématique* non seulement les êtres déjà construits ou définis effectivement et les êtres simplement « nommés » (au sens de Lebesgue), mais aussi une infinité d'autres êtres non encore envisagés par la science et qui ne le seront jamais. On voit par là quelle est la richesse du « monde » mathématique, dans lequel tout ce qui jouit d'une seule propriété (la non-contradiction) se pose automatiquement dans l'existence (tout *possible* existe).

Considérons un exemple d'être mathématique : une fonction  $f(x)$  de la variable réelle  $x$  dans l'intervalle fermé  $a \leq x \leq b$ . Le champ de variation continue de  $x$  peut être appelé un *cadre* ou un *contenant*, apte à recevoir une quantité transfinie (transfini dont la puissance est ici supérieure à celle du continu) de fonctions, c'est-à-dire de *contenus*.

Ce cadre ou contenant est un ensemble de nombres réels dont les éléments ont entre eux des relations de simple juxtaposition, mais qui obéit cependant à un plan ou à un ordre. Si le contenant est un espace

non-euclidien, il possède, en plus de cet ordre interne, une *structure* (qui se révèle immédiatement en plongeant l'espace en question dans un espace non-euclidien). Ceci sans parler de la *forme* de la surface frontière du domaine spatial d'existence d'une fonction ou contenu. Après ces remarques, nous dirons qu'un être mathématique est *complet* lorsqu'on peut y distinguer un contenant et un ou plusieurs contenus. En d'autres termes : *lorsqu'il est formé par une fonction ou par un ensemble de fonctions ayant toutes le même domaine d'existence.*

2. Les êtres mathématiques arbitraires. Si nous considérons à nouveau une fonction quelconque  $f(x)$  de la variable réelle  $x$  dans l'intervalle  $a \leq x \leq b$ , on voit immédiatement que cet être mathématique complet est *arbitraire*, en accordant à cette expression la signification suivante : — D'une part, le domaine de définition de  $f(x)$ , c'est-à-dire le contenant, est apte à recevoir une infinité d'autres fonctions, de sorte que le contenu [ensemble des valeurs de  $f(x)$ ] existe arbitrairement dans le contenant, sans qu'il y ait une raison quelconque pour que ce contenant «contienne» un certain  $f(x)$  plutôt qu'un autre. D'autre part, la connaissance de  $f(x)$  ne détermine pas le contenant (sa forme et sa structure), car si  $x$  désigne par exemple un paramètre de position entre les points  $a$  et  $b$  sur une ligne d'un espace à un nombre quelconque de dimensions, la connaissance de  $f(x)$  ne donne *aucun* renseignement sur la forme (ni sur les autres propriétés) de cette ligne. Il y a une infinité de contenants géométriques pour une même fonction abstraite  $f(x)$ .

On voit que les êtres mathématiques arbitraires, tout en étant non contradictoires, n'ont en eux mêmes aucun principe de «self-explication», aucun propriété de «self-crédation». Leur existence leur est en quelque sorte conférée du «dehors» par la «force» du non-contradictoire, qui fait que tout non contradictoire se pose dans l'existence mathématique.

Ici, une analogie sera utile à la compréhension claire de ce qui va suivre. Donnons-nous un vase ou récipient ayant une certaine capacité et une certaine forme, susceptible d'être rempli de toutes sortes de liquides. Le fait de connaître la nature du liquide (ou contenu) qui se trouve à un moment donné dans le vase, ne suffit pas pour déterminer la forme et la capacité du vase. Inversement, étant données seulement cette forme et cette capacité, on ne peut rien dire sur le liquide qui peut se trouver dans le vase à un certain moment. En d'autres termes : entre le contenant ou récipient et le contenu il n'y a aucune relation intrinsèque. L'«être» formé par l'ensemble vase + liquide est donc un être arbitraire.

3. Les êtres mathématiques non-arbitraires. Poursuivons notre analogie en imaginant un vase idéal doué des deux propriétés tout-à-fait spéciales suivantes : 1.<sup>o</sup>) il suffit de connaître la nature et la structure du liquide pour déterminer la forme et la capacité *du seul* vase qui peut le contenir ; 2.<sup>o</sup>) inversement, il suffit de connaître la forme et la capacité du vase pour déterminer la nature et la structure *du seul* liquide qu'il peut contenir. Il existe alors entre vase et liquide, entre contenant et contenu, une dépendance intrinsèque absolue et nous dirons que l'ensemble vase+liquide est, dans ces conditions, un être non-arbitraire.

Il est facile de passer de cette « analogie » à la *définition d'être mathématique non-arbitraire*. Nous dirons qu'un être mathématique est non-arbitraire lorsqu'il est complet et satisfait aux conditions suivantes : 1.<sup>o</sup>) les propriétés intrinsèques de la structure et de la forme du contenant sont entièrement déterminées quand on connaît les fonctions-contenus ; 2.<sup>o</sup>) inversement, les fonctions-contenus sont entièrement déterminées quand on connaît les propriétés intrinsèques de la structure et de la forme du contenant ; 3.<sup>o</sup>) les deux premières conditions déterminent complètement l'ensemble contenant+contenus.

Faisons ici la remarque évidente que cette définition d'être mathématique non-arbitraire ne peut entrer en jeu que si le contenant est un espace continu, puisque c'est seulement un espace continu qui possède une forme et une structure intrinsèque.

4. L'existence physique. Si l'on croit que le cosmos est d'essence mathématique, c'est-à-dire que l'Univers physique est un être ou un ensemble d'êtres mathématiques, une question fondamentale se pose inévitablement, à savoir : — Quelle est la propriété qui distingue l'être ou l'ensemble d'êtres mathématiques qui forment (et qui sont) l'Univers physique de tous les autres êtres mathématiques ? En d'autres termes : — Quelle est la propriété qui confère l'existence physique à l'être ou à l'ensemble d'êtres mathématiques qui forment l'Univers ? Nous répondrons à cette question par le principe de base suivant :

*L'existence physique est identique à l'existence mathématique non-arbitraire.*

En d'autres termes :

*Tout être mathématique non-arbitraire possède l'existence physique.*

En partant d'un ensemble d'espaces très général (ensemble des espaces continus pouvant être « plongés » dans des espaces à une dimension de plus et pour lesquels le carré de la distance de deux points infiniment voisins est une forme quadratique des différentielles des coordonnées), nous montrerons plus loin qu'il n'y a, dans cet ensemble, qu'un seul

*être mathématique non-arbitraire.* Grâce au principe fondamental, on peut donc dire que *dans l'ensemble défini ci-dessus un seul être mathématique possède l'existence physique.* Nous verrons d'ailleurs qu'il est très probable qu'il n'y ait qu'un seul être mathématique non-arbitraire dans l'ensemble de tous les espaces continus. Si tel est réellement le cas, alors on arrive immédiatement à la conclusion suivante :

*L'Univers physique est le seul être mathématique non-arbitraire qui existe dans le «monde» mathématique.*

Nous avons dit plus haut que les êtres mathématiques arbitraires n'ont en eux mêmes aucun principe de self-explication, aucun propriété de «self-création». Par contre, l'Univers physique (qu'on peut définir comme étant l'ensemble des êtres mathématiques non-arbitraires, un tel ensemble n'ayant très probablement *qu'un seul* élément) contient en lui même une telle propriété (le caractère non-arbitraire), nécessaire pour le poser dans l'existence d'une manière absolument autonome et le faire subsister en tant qu'existence physique indépendamment de toute «cause» extérieure. L'existence physique n'est que l'existence mathématique marquée par le «sceau» intrinsèque du non-arbitraire.

**5. La Physique Cosmologique.** Nous donnons ce nom à la théorie mathématique qui peut être construite, par voie purement déductive, avec la définition d'être mathématique non-arbitraire et le principe de l'identité de l'existence physique et de l'existence mathématique non-arbitraire. Le but idéal de cette théorie peut être résumé comme suit :

Sans faire appel à des hypothèses, postulats ou axiomes de nature physique (ou métaphysique) en dehors de la définition d'être mathématique non-arbitraire et du principe de l'identité de l'existence physique et de l'existence mathématique non-arbitraire, et sans utiliser aucune loi de nature expérimentale ou suggérée par l'expérience, déterminer, par voie purement mathématique : 1.<sup>o</sup>) la structure métrique, la forme et le nombre de dimensions du contenant de l'Univers (l'espace-temps), 2.<sup>o</sup>) les valeurs des propriétés de l'Univers (c'est-à-dire les valeurs de tous les contenus) en chaque point du contenant.

Les pages qui suivent exposent une première tentative pour réaliser une partie de ce programme. Nous y verrons que le problème cosmologique de la Relativité générale se pose constamment en Physique cosmologique, sous une forme généralisée. Cela se comprend facilement si l'on pense que la Relativité générale, par ses équations du champ de gravitation, établit en somme des relations entre une propriété intrinsèque de la structure métrique du contenant de l'Univers (de l'espace-temps) et une propriété (densité d'énergie-quantité de mouvement) du contenu.



## II — ANALYSE DE L'ÊTRE MATHÉMATIQUE NON-ARBITRAIRE

1. Définitions. Soit  $\varepsilon_{N+1}$  l'ensemble des espaces continus ( $\varepsilon_{N+1}$ ) à un nombre quelconque ( $N+1$ ) de dimensions, pour lesquels le carré de la distance de deux points infiniment voisins est donné par la forme quadratique :

$$(1) \quad d\Sigma^2 = \Gamma_{\mu\nu} dX^\mu dX^\nu \quad (\mu, \nu = 1, 2, \dots, N+1),$$

des différentielles des coordonnées  $X^\mu$ , les  $\Gamma_{\mu\nu} = \Gamma_{\nu\mu}$  étant des fonctions finies quelconques des  $X^\mu$  possédant des dérivées premières et secondes. (Lorsqu'un  $\varepsilon_{N+1}$  est euclidien ou pseudo-euclidien, nous le désignerons par  $E_{N+1}$  et alors on conviendra que les  $X^\mu$  sont des coordonnées cartésiennes rectangulaires, c'est-à-dire  $\Gamma_{\mu\nu} = \pm 1$  pour  $\mu = \nu$  et  $\Gamma_{\mu\nu} = 0$  pour  $\mu \neq \nu$ ). Soit  $\varepsilon_N$  l'ensemble des espaces ( $e_N$ ), à un nombre quelconque ( $N$ ) de dimensions, qui peuvent être considérés comme des sous-espaces d'espaces  $\varepsilon_{N+1}$  à  $N+1$  dimensions de l'ensemble  $\varepsilon_{N+1}$ . Une variation virtuelle des paramètres qui figurent dans toute expression analytique de l'équation  $F(X^1, X^2, \dots, X^{N+1}) = 0$  d'un espace  $e_N$ , plongé dans un espace  $\varepsilon_{N+1}$ , peut être considérée comme une déformation ou un mouvement de  $e_N$  dans  $\varepsilon_{N+1}$ . Désignons alors par  $x^1, x^2, \dots, x^N$  des coordonnées générales *intrinsèques* dans un  $e_N$ , c'est-à-dire des coordonnées telles que leurs valeurs en un point quelconque de  $e_N$  sont *invariantes* vis-à-vis de toute déformation et de tout mouvement de  $e_N$  dans  $\varepsilon_{N+1}$ . La *forme métrique interne* d'un  $e_N$  quelconque s'écrit :

$$(2) \quad ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \quad (i, k = 1, 2, \dots, N)$$

les  $g_{ik} = g_{ki}$  (coefficients métriques internes) étant, comme les  $\Gamma_{\mu\nu}$ , des fonctions finies quelconques des  $x^i$  possédant des dérivées premières et secondes. La forme (2) est invariante et  $g_{ik}$  est un tenseur covariant symétrique du second ordre qui satisfait aux conditions de conservation (divergence nulle) :

$$(3) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} g^{ik}) + g^{jk} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\} = 0,$$

$g$  étant le déterminant des  $g_{ik}$  et  $\left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}$  le symbole de Christoffel de seconde espèce formé avec les  $g_{ik}$ .

Considérons un espace  $e_N$  de  $\varepsilon_N$  plongé dans un espace  $\varepsilon_{N+1}$  de  $\varepsilon_{N+1}$ . Nous appelons *forme* de  $e_N$  par rapport à  $\varepsilon_{N+1}$  : 1° — l'équation  $F(X^1, \dots, X^{N+1}) = 0$ , de la variété  $e_N$  dans  $\varepsilon_{N+1}$ , déterminée aux coor-

données et à l'orientation près d'un de ses éléments; 2° — l'équation  $\sigma(x^1, \dots, x^N) = 0$  de la variété  $(N-1)$ -dimensionnelle, frontière de  $e_N$ . (Rappelons ici qu'un  $e_N$  est dit de *classe 1* s'il peut être considéré comme un sous-espace d'un espace euclidien ou pseudo-euclidien à  $N+1$  dimensions).

À côté de la forme métrique fondamentale (2), nous envisagerons aussi la *forme métrique externe* de l'espace  $e_N$  (supposé plongé dans un  $\epsilon_{N+1}$ ). Cette forme quadratique peut être déduite comme suit. Désignons par  $X^u_{;ik}$  la « dérivée tensorielle » (« dérivée covariante générale ») seconde des  $X^u$  par rapport aux  $x^i$ . Comme les  $X^u$  sont des invariants vis-à-vis de tout changement des  $x^i$ , on a ici simplement :

$$(4) \quad X^u_{;ik} = \frac{\partial^2 X^u}{\partial x^i \partial x^k} - \left\{ \begin{matrix} j \\ ik \end{matrix} \right\} \frac{\partial X^u}{\partial x^j} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^k}.$$

(Les symboles de Christoffel avec indices grecs et latins se rapportent respectivement à la forme (1) et à la forme (2)). On sait que les  $X^u_{;ik}$  sont les composantes contravariantes d'un vecteur  $\vec{X}_{;ik}$  de  $\epsilon_{N+1}$  normal à  $e_N$ . Si  $n^\alpha$  représente les composantes de la normale unitaire  $\vec{n}$  à  $e_N$  (dans  $\epsilon_{N+1}$ ), on a donc :

$$(5) \quad X^u_{;ik} = \omega_{ik} n^u,$$

$$(6) \quad \omega_{ik} = X^u_{;ik} n_\alpha = X^u_{;ik} \Gamma_{\mu\nu} n^\nu = \vec{X}_{;ik} \cdot \vec{n}.$$

La forme métrique externe de  $e_N$  par rapport à  $\epsilon_{N+1}$  est alors définie par :

$$(7) \quad d\Omega^2 = \omega_{ik} dx^i dx^k.$$

La relation (5) montre que les  $\omega_{ik}$  sont les composantes d'un tenseur covariant symétrique du second ordre ( $d\Omega^2$  est donc un invariant comme  $ds^2$ ) et nous supposerons qu'ils sont des fonctions quelconques des  $x^i$  possédant des dérivées premières et secondes. Ce tenseur  $\omega_{ik}$  satisfait d'ailleurs, comme les  $g_{ik}$ , à des relations de « conservation », qui s'écrivent maintenant :

$$(8) \quad \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{\omega} \omega^{ik}) + \omega^{jk} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_\Omega = 0,$$

l'indice  $\Omega$  rappelant que le symbole de Christoffel doit être formé ici

avec les  $\omega_{ik}$  de (7), et :  $\omega = |\omega_{ik}|$ ,  $\omega^{ik} = \frac{1}{\omega} \times$  mineur de  $\omega$  relatif à  $\omega_{ik}$ .

En remarquant que l'on a :

$$d\vec{X} \cdot \vec{n} = 0,$$

$d\vec{X}$  étant un vecteur infinitésimal reliant deux points infiniment voisins de  $e_N$ , les relations (4) et (6) donnent encore :

$$(9) \quad \omega_{ik} = \frac{\partial^2 \vec{X}}{\partial x^i \partial x^k} \cdot \vec{n} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^k} n_\mu,$$

$\vec{X}$  étant le vecteur (de  $\epsilon_{N+1}$ ) de composantes  $X^\mu$  en un point de  $\epsilon_{N+1}$  situé sur  $e_N$ . La forme métrique externe de  $e_N$  dans  $\epsilon_{N+1}$  s'écrit donc aussi :

$$(10) \quad d\Omega^2 = \vec{n} \cdot d^2 \vec{X} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^k} n_\mu dx^i dx^k,$$

ou bien, par suite de la relation :  $\vec{n} \cdot d^2 \vec{X} = -d\vec{n} \cdot d\vec{X}$  :

$$(11) \quad \vec{n} \cdot d^2 \vec{X} = -d\vec{n} \cdot d\vec{X} + \left\{ \begin{matrix} \mu \\ \beta \gamma \end{matrix} \right\} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^k} n_\mu dx^i dx^k.$$

Si l'espace  $\epsilon_{N+1}$  est un espace euclidien ou pseudo-euclidien, la forme métrique externe se réduit donc à :

$$(12) \quad d\Omega^2 = \omega_{ik} dx^i dx^k = -d\vec{n} \cdot d\vec{X} = \vec{n} \cdot d^2 \vec{X}.$$

Quand on se donne les coordonnées  $X_0^1, X_0^2, \dots, X_0^{N+1}$  d'un point arbitraire  $P_0(x_0^1, x_0^2, \dots, x_0^N)$  de  $e_N$  (supposé plongé dans un  $\epsilon_{N+1}$ ), la normale unitaire d'un élément de  $e_N$  dont  $P_0$  est le centre, ainsi que la métrique de  $\epsilon_{N+1}$  (c'est-à-dire les  $\Gamma_{\mu\nu}$  de la forme (1)), alors la connaissance des  $g_{ik}$  et des  $\omega_{ik}$ , en chaque point de  $e_N$ , détermine cet espace (par rapport à  $\epsilon_{N+1}$ ), lorsque les  $g_{ik}$  et les  $\omega_{ik}$  satisfont aux conditions de compatibilité de Gauss et de Codazzi.

Considérons maintenant une forme quadratique :

$$(13) \quad dQ^2 = \chi_{ik} dx^i dx^k,$$

dont les coefficients  $\chi_{ik}$  sont des fonctions des  $g_{ik}$  et de leurs dérivées premières et secondes, ne faisant intervenir d'ailleurs ces dernières que linéairement. Nous dirons alors que les  $\chi_{ik}$  représentent une *propriété intrinsèque de la métrique* d'un espace  $e_N$ , lorsqu'ils satisfont aux mêmes conditions que les  $g_{ik}$ , c'est-à-dire lorsqu'ils sont les composantes d'un tenseur covariant symétrique du second ordre (ce qui est équi-

valent à l'invariance du  $dQ^2$  vis-à-vis d'un changement de coordonnées) qui satisfait aux relations de conservation :

$$(14) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \chi^{ik}) + \chi^{jk} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_s = 0,$$

l'indice  $s$  rappelant que le symbole de Christoffel doit être formé avec les  $g_{ik}$ , et  $\chi^{ik} = g^{ij} g^{kl} \chi_{jl}$ .

De même, soit :

$$(15) \quad dP^2 = \Pi_{ik} dx^i dx^k,$$

une forme quadratique dont les coefficients  $\Pi_{ik}$  sont des fonctions des  $\omega_{ik}$ , de leurs dérivées premières et secondes, ne faisant intervenir d'ailleurs ces dernières que linéairement. Nous dirons alors que les  $\Pi_{ik}$  représentent une *propriété intrinsèque de la forme* d'un espace  $e_N$  (plongé dans un  $e_{N+1}$ ), lorsqu'ils sont les composantes d'un tenseur covariant symétrique du second ordre (ce qui est équivalent à l'invariance du  $dP^2$ ) qui satisfait aux relations de conservation :

$$(16) \quad \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{\omega} \Pi^{ik}) + \Pi^{jk} \left\{ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right\}_\Omega = 0,$$

l'indice  $\Omega$  rappelant que le symbole de Christoffel doit être formé avec les  $\omega_{ik}$  de la forme (7), et  $\Pi^{ik} = \omega^{ij} \omega^{kl} \Pi_{jl}$ .

Un théorème bien connu du calcul tensoriel nous permet d'affirmer que l'expression analytique générale des propriétés intrinsèques de la métrique d'un espace  $e_N$  est nécessairement la suivante :

$$(17) \quad \frac{1}{\lambda_g} \left[ R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} (R + \lambda_g) \right],$$

$\lambda_g$  et  $\lambda_g$  étant deux constantes (provisoirement arbitraires),  $R_{ik}$  le tenseur de Ricci-Einstein, et  $R$  l'invariant de courbure défini par :  $R = g^{ik} R_{ik}$ . Le même théorème nous permet d'affirmer que l'expression analytique générale des propriétés intrinsèques de la forme d'un espace  $e_N$  (supposé plongé dans un  $e_{N+1}$ ) est nécessairement la suivante :

$$(18) \quad \frac{1}{\lambda_\omega} \left[ S_{ik} - \frac{1}{2} \omega_{ik} (S + \lambda_\omega) \right],$$

$\lambda_\omega$  et  $\lambda_\omega$  étant deux autres constantes (provisoirement arbitraires),  $S_{ik}$  le tenseur de Ricci-Einstein qui correspond à la forme quadratique (7) et  $S$  un invariant défini par  $S = \omega^{ik} S_{ik}$ .

Ceci étant dit, définissons finalement ce que nous entendons par *être mathématique non-arbitraire* : c'est un ensemble de fonctions, ayant toutes le même domaine d'existence, appartenant à  $\varepsilon_N$ , et telles que : 1.<sup>o</sup> — les propriétés intrinsèques de la métrique et de la forme du domaine d'existence (ou *contenant*) des fonctions (ou contenus) sont entièrement déterminées quand on se donne ces fonctions ; 2.<sup>o</sup> — inversement, les fonctions-contenus sont entièrement déterminées quand on se donne les propriétés intrinsèques de la métrique et de la forme du contenant ; 3.<sup>o</sup> — les deux premières conditions déterminent complètement l'ensemble contenant + contenus.

2. Equations de l'être mathématique non-arbitraire. Considérons un être mathématique non-arbitraire à  $N$  dimensions. Il est très facile d'écrire les équations qui traduisent la propriété de « non-arbitraire » que nous venons de définir. En effet, comme (17) est l'expression analytique générale des propriétés intrinsèques de la métrique du contenant, il faut nécessairement l'égaliser, d'après la définition d'être mathématique non-arbitraire, à une fonction contenu tensorielle bien définie, que nous désignerons par  $T_{ik}$ . De même, comme (18) est l'expression analytique générale des propriétés intrinsèques de la forme du contenant, il faut aussi l'égaliser à une fonction-contenu tensorielle bien définie, que nous désignerons par  $U_{ik}$ . On a donc le système d'équations suivant :

$$(19) \quad \begin{cases} (a) & \left\{ R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} (R + \lambda_g) = z_g T_{ik}, \right. \\ (b) & \left. S_{ik} - \frac{1}{2} \omega_{ik} (S + \lambda_\omega) = z_\omega U_{ik}. \right. \end{cases}$$

Par suite de la symétrie des  $R_{ik}$ ,  $g_{ik}$ ,  $S_{ik}$  et  $\omega_{ik}$  ce système se compose de  $N(N+1)$  équations. En multipliant (19 a) par  $g^{ik}$ , (19 b) par  $\omega^{ik}$  et en introduisant les invariants  $T = g^{ik} T_{ik}$  et  $U = \omega^{ik} U_{ik}$ , le système (19) prend la forme équivalente :

$$(20) \quad \begin{cases} (a) & \left\{ R_{ik} + \frac{\lambda_g}{N-2} g_{ik} = z_g \left( T_{ik} - \frac{T}{N-2} g_{ik} \right), \right. \\ (b) & \left. S_{ik} + \frac{\lambda_\omega}{N-2} \omega_{ik} = z_\omega \left( U_{ik} - \frac{U}{N-2} \omega_{ik} \right), \right. \end{cases}$$

et l'on a :

$$(21) \quad \begin{cases} \left( \frac{N}{2} - 1 \right) R + \frac{N}{2} \lambda_g = -z_g T, \\ \left( \frac{N}{2} - 1 \right) S + \frac{N}{2} \lambda_\omega = -z_\omega U. \end{cases}$$

Au système (19) il faut nécessairement ajouter les équations de Gauss et de Codazzi, car les  $g_{ik}$  et les  $\omega_{ik}$  que l'on déduit de (19) ne sont compatibles que si les conditions de Gauss et de Codazzi sont satisfaites. Pour un espace  $e_N$  plongé dans un  $e_{N+1}$  les équations de Gauss ont la forme :

$$(23) \quad R_{ijk} = (\omega_{ij} \omega_{ik} - \omega_{ik} \omega_{ij}) + \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} \frac{\partial X^\alpha}{\partial x^i} \frac{\partial X^\beta}{\partial x^j} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^k} \frac{\partial X^\delta}{\partial x^k},$$

dans lesquelles  $R_{ijk}$  sont les composantes du tenseur covariant de courbure de l'espace  $e_N$  (contenant) et  $\bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta}$  les composantes, prises en un point de  $e_N$ , du tenseur covariant de courbure de l'espace  $e_{N+1}$ . En désignant par  $\omega_{ik,j}$  la dérivée covariante de  $\omega_{ik}$  par rapport à  $x^j$ , les équations de Codazzi s'écrivent comme suit :

$$(24) \quad \omega_{ij,k} - \omega_{ik,j} + \bar{R}_{\alpha\beta\gamma\delta} n^\alpha \frac{\partial X^\beta}{\partial x^i} \frac{\partial X^\gamma}{\partial x^j} \frac{\partial X^\delta}{\partial x^k} = 0,$$

$n^\alpha$  étant les composantes de la normale unitaire en un point de  $e_N$ . Comme le tenseur  $R_{ijk}$  a  $\frac{1}{12} N^2(N^2-1)$  composantes linéairement indépendantes et différentes de zéro, on voit facilement, en tenant compte de la forme du dernier terme de (23), qu'il y a :

$$\frac{1}{12} N^2(N^2-1) + \frac{1}{2} N(N-1)(N+1) + N$$

équations de Gauss indépendantes. D'autre part, grâce à la symétrie des  $\omega_{ik}$ , il est facile de voir qu'il y a :

$$\frac{1}{6} N(N-1)(N+4) + N^2$$

équations de Codazzi indépendantes. Le système (19)+(23)+(24) se compose donc de :

$$N(N+1) + \frac{1}{12} N^2(N^2-1) + \frac{1}{6} N(N-1)(N+4) + \frac{1}{2} N(N-1)(N+1) + N^2 + N$$

équations dans le cas où  $e_N$  n'est pas de classe un.

Si le contenant est un espace  $e_N$  de classe un, les équations de Gauss et de Codazzi se simplifient et deviennent respectivement :

$$(25) \quad R_{ijk} = \omega_{ij} \omega_{ik} - \omega_{ik} \omega_{ij},$$

et :

$$(26) \quad \omega_{ij,k} - \omega_{ik,j} = 0.$$

En explicitant les dérivées covariantes des  $\omega_{ik}$ , les équations de Codazzi peuvent s'écrire comme suit :

$$(27) \quad \frac{\partial \omega_{ij}}{\partial x^k} - \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x^j} + \omega_{lk} \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\} - \omega_{lj} \left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\} = 0.$$

Il n'y a plus maintenant que  $\frac{1}{12} N^2 (N^2 - 1)$  équations de Gauss et  $\frac{1}{6} N(N-1)(N+4)$  équations de Codazzi indépendantes, de sorte que le système (19)+(25)+(26) de l'être mathématique non-arbitraire se compose de :

$$N(N+1) + \frac{1}{12} N^2 (N^2 - 1) + \frac{1}{6} N(N-1)(N+4)$$

équations indépendantes si le contenant est un espace  $e_N$  de classe un.

**3. Théorème :** Le contenant d'un être mathématique non-arbitraire est un espace de Riemann à quatre dimensions et de classe un. Pour démontrer ce théorème, cherchons quel est le nombre des inconnues qui interviennent dans le système (19)+(23)+(24). On a d'abord évidemment les  $\frac{1}{2} N(N+1)$  fonctions  $g_{ik}$ , les  $\frac{1}{2} N(N+1)$  fonctions  $\omega_{ik}$ , les  $\frac{1}{2} N(N+1)$  fonctions  $T_{ik}$  et les  $\frac{1}{2} N(N+1)$  fonctions  $U_{ik}$ , c'est-à-dire  $2N(N+1)$  inconnues. Nous avons ensuite  $N$  autres inconnues qui sont simplement les  $N$  fonctions  $x^i (X^1, X^2, \dots, X^N)$ , qui définissent, en fonction de  $N$  des  $N+1$  coordonnées  $X^u$ , un système de *coordonnées intrinsèques* dans le contenant de l'être mathématique non-arbitraire. (Il est impossible de prendre  $x^1 = X^1, x^2 = X^2, \dots, x^N = X^N$ , parce qu'à de telles coordonnées dans  $e_N$  ne correspondent pas a priori des  $g_{ik}$  essentiellement finis). Finalement, nous avons  $2N$  autres inconnues qui proviennent du fait que la frontière ( $\sigma$ ), à  $N-1$  dimensions, du domaine d'existence des fonctions-contenus, n'est pas déterminée quand on ne connaît que l'équation  $F(X^1, X^2, \dots, X^{N+1}) = 0$  du contenant. En effet, pour déterminer l'équation  $\sigma(x^1, x^2, \dots, x^N) = 0$  il faut connaître les  $N$  quantités  $\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}$  ainsi que les  $N$  coordonnées  $x_0^i$  d'un point de  $\sigma$ . Les  $2N(N+1) + 3N$  inconnues que nous venons de mettre en évidence déterminent le contenant et sa frontière  $\sigma$  quand on se donne les coordonnées  $X_0^u$  de l'un de ses points, ainsi que la normale

unitaire en ce point et la métrique de  $e_{N+1}$ . Cependant, comme ces inconnues doivent être déterminées nécessairement par le système (19)+(23)+(24), où figurent les constantes  $\lambda_g, \alpha_g, \lambda_\omega$  et  $\alpha_\omega$ , ces quatre constantes sont de nouvelles inconnues, car il ne saurait y avoir des constantes arbitraires dans un être mathématique non-arbitraire. (La métrique et la forme du contenant dépendent d'ailleurs en grande partie des valeurs de ces constantes). On a donc en tout :

$$2N(N+1)+3N+4$$

inconnues dans le problème de l'être mathématique non-arbitraire. Pour que ce problème soit bien défini, c'est-à-dire pour qu'il existe, dans l'ensemble  $\varepsilon_N$ , un être mathématique non-arbitraire, il faut que le système (19)+(23)+(24) soit un système complet (avec le même nombre d'équations que d'inconnues). Si le contenant de l'être mathématique non-arbitraire *n'est pas de classe un*, il faut donc poser :

$$N(N+1) + \frac{1}{12}N^2(N^2-1) + \frac{1}{6}N(N-1)(N+4) + \frac{1}{2}N(N-1)(N+1) + N^2 + N = 2N(N+1) + 3N + 4.$$

Comme cette relation n'est vérifiée par aucune valeur entière et positive de  $N$ , il faut égaliser le nombre d'équations au nombre d'inconnues dans le cas d'un contenant de classe un. D'après le §3 on doit donc poser :

$$N(N+1) + \frac{1}{12}N^2(N^2-1) + \frac{1}{6}N(N-1)(N+4) = 2N(N+1) + 3N + 4.$$

Comme cette relation est satisfaite par  $N=4$  et seulement pour  $N=4$ , le théorème est donc démontré.

4. Il n'existe qu'un seul être mathématique non-arbitraire dans l'ensemble  $\varepsilon_N$ . En effet, le système (19)+(25)+(26) est un système d'équations aux dérivées partielles du second ordre qui ne peut avoir qu'une seule solution ne faisant pas intervenir des fonctions arbitraires donnant la distribution des inconnues et de leurs dérivées normales sur la frontière  $\sigma$  du contenant. Or, dans un être mathématique non-arbitraire il ne peut y avoir de telles fonctions arbitraires, car celles-ci n'auraient aucun rapport avec la métrique et la forme du contenant et ne seraient donc pas des fonctions-contenus.



5. Tableau des inconnues du problème de l'être mathématique non-arbitraire. Comme nous avons démontré que le contenant est un espace de Riemann à quatre dimensions et de classe un, le système (19)+(25)++(26) se compose de 56 équations indépendantes et contient 56 inconnues, à savoir :

|  |   |  |
|--|---|--|
| métrique et forme du contenant . . .     | { | 10 inconnues : $g_{ik}$ .  |
|  | } | 10 inconnues : $\omega_{ik}$ .   |
| fonctions-contenus . . . . .             | { | 10 inconnues : $T_{ik}$ .  |
|  | } | 10 inconnues : $U_{ik}$ .  |
| frontière $\sigma$ du contenant. . . . . | { | 4 inconnues : $\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}$ .                 |
|  | } | 4 inconnues : $x_0^i$ .  |
| coordonnées «intrinsèques» . . . . .     |   | 4 inconnues : $x^i (X^1, X^2, X^3, X^4)$ .                             |
| constantes absolues. . . . .             |   | 4 inconnues : $\lambda_g, \lambda_g, \lambda_\omega, \lambda_\omega$ . |
|  |   | 56 inconnues au total.   |

Rappelons que les  $\frac{\partial \sigma}{\partial x^i}$  fournissent les cosinus directeurs de la frontière tridimensionnelle  $\sigma$  du contenant et que cette frontière passe par le point  $x_0^i$ .

6. Détermination des fonctions-contenus tensorielles  $T_{ik}$  et  $U_{ik}$ . La détermination complète de ces fonctions, en tant que fonctions des  $x^i$ , fait partie de l'intégration du système fondamental (19)+(25)+(26). Il est cependant très important d'exprimer ces mêmes tenseurs en fonction de certaines fonctions-contenus de base :  $\Psi^{mn}$  (pour les  $T_{ik}$ ) et  $\Phi^{mn}$  (pour les  $U_{ik}$ ). (Nous verrons que l'indice  $m$  varie de 1 à 4 et l'indice  $n$  de 1 à  $\infty$ ). Les nouvelles expressions de  $T_{ik}$  et de  $U_{ik}$  montrent immédiatement que ces fonctions satisfont identiquement aux conditions de divergence nulle exigées par le système (19), et l'on peut en déduire le caractère (hyperbolique normal, anormal ou elliptique) de la métrique, indépendamment de l'intégration du système (19)++(25)+(26).

Désignons par  $\epsilon^i (i=1, 2, 3, 4)$  quatre opérateurs matrices, à quatre lignes et quatre colonnes, satisfaisant aux conditions :

$$(28) \quad \epsilon^i \epsilon^k + \epsilon^k \epsilon^i = 2 \delta^{ik} \cdot I \quad (I = \text{matrice unité}),$$

et formons, avec quatre fonctions  $\psi^m (m=1, 2, 3, 4)$  des  $x^i$ , linéairement indépendantes, une matrice à quatre lignes et une colonne. Considérons, en un point  $P(x^1, x^2, x^3, x^4)$  quelconque de l'espace de Riemann qua-

dridimensionnel qui est le contenant de l'être mathématique non-arbitraire (d'après le théorème du § 3), un système de coordonnées géodésiques orthogonales locales  $\zeta^i (i=1, 2, 3, 4)$ , et imposons aux fonctions  $\psi^m$  la condition de satisfaire au système suivant de quatre équations aux dérivées partielles du premier ordre :

$$(29) \quad \epsilon^i \frac{\partial \psi^m}{\partial \zeta^i} = -\sqrt{\alpha} \psi^m$$

dans lequel  $\alpha$  est une constante réelle, les opérations  $\epsilon^i \psi^m$  étant définies par :

$$(30) \quad \epsilon^i \psi^m = (\epsilon^i)^{ml} \psi_l.$$

En appliquant à ces équations l'opérateur  $\epsilon^i \frac{\partial}{\partial \zeta^i}$ , on voit immédiatement, par suite de (28) et de  $\partial^2 / \partial \zeta^i \partial \zeta^k = \partial^2 / \partial \zeta^k \partial \zeta^i$ , que chaque  $\psi^m$  satisfait à l'équation :

$$(31) \quad \sum_1^4 \frac{\partial^2 \psi^m}{\partial \zeta^{i2}} = \alpha \psi^m.$$

Par suite des propriétés des coordonnées géodésiques locales rectangulaires, l'opérateur  $\sum_1^4 \frac{\partial^2}{\partial \zeta^{i2}}$  est le laplacien :

$$\Delta = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial}{\partial x^i} \right),$$

de l'espace de Riemann, et l'équation (31) s'écrit donc :

$$(32) \quad \Delta \psi^m = \alpha \psi^m.$$

On voit que les solutions du système (29) sont les fonctions propres de l'opérateur laplacien et que la constante  $\alpha$  est la valeur propre correspondante. Pour qu'il existe une solution  $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4$  du système (29), lorsque  $\alpha$  est l'une des valeurs propres du laplacien, il faut donc qu'il existe, pour cette valeur propre, quatre fonctions propres linéairement indépendantes de cet opérateur. Inversement, il est facile de voir qu'étant données quatre fonctions propres linéairement indépendantes  $\psi^1, \psi^2, \psi^3, \psi^4$  du laplacien, relatives à une même valeur propre, ces fonctions sont des solutions du système (29) pour une certaine orientation du quadripode des  $\zeta^i$  bien définie en chaque point. En effet, en introduisant des fonctions propres du laplacien, préalablement déterminées, dans le système (29), on obtient quatre équations qui permet-

tent de déterminer les quatre paramètres (par ex. les angles d'Euler) qui fixent l'orientation des  $\varphi^i$ . D'ailleurs, l'orientation du quadripode des  $\varphi^i$  qui correspond, en un point, à un système donné de fonctions propres linéairement indépendantes du laplacien, est invariante vis-à-vis d'un changement quelconque des matrices  $\epsilon^i$ , pourvu que les nouvelles matrices satisfassent aussi aux conditions (28) et n'introduisent aucune nouvelle quantité arbitraire. D'après les propriétés du groupe des rotations et des symétries, un tel changement de  $\epsilon^i$  est en effet équivalent à une rotation simple (d'angle  $\frac{\pi}{2}$ ) accompagnée ou non d'une symétrie des axes locaux  $\varphi^i$ .

Effectuons maintenant un changement des coordonnées géodésiques locales et désignons les nouvelles coordonnées géodésiques par  $\bar{\varphi}^i$ . Les  $\frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}^i}$  sont les composantes covariantes de l'opérateur gradient, et l'on a :

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}^i} = \frac{\partial \varphi^k}{\partial \bar{\varphi}^i} \frac{\partial}{\partial \varphi^k},$$

c'est-à-dire :

$$(33) \quad \frac{\partial}{\partial \varphi^k} = \frac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial \varphi^k} \frac{\partial}{\partial \bar{\varphi}^i}.$$

La transformation (33) appliquée à (29) donne donc :

$$\epsilon^k \frac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial \varphi^k} \frac{\partial \psi^m}{\partial \bar{\varphi}^i} = -\sqrt{\alpha} \psi^m,$$

ou bien :

$$(34) \quad \bar{\epsilon}^i \frac{\partial \psi^m}{\partial \bar{\varphi}^i} = -\sqrt{\alpha} \psi^m,$$

en posant :

$$(35) \quad \bar{\epsilon}^i = \epsilon^k \frac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial \varphi^k}.$$

Comme les  $\psi^m$  sont des invariants, par suite de leur définition (32), on voit donc que les équations (29) sont invariantes vis-à-vis d'un changement  $\varphi^i \rightarrow \bar{\varphi}^i$  de coordonnées géodésiques, quand on admet que les  $\epsilon^i$  se transforment comme les composantes contravariantes d'un vecteur. Or, on peut admettre cette loi de transformation puisque les  $\bar{\epsilon}^i$  transformés satisfont aussi aux conditions (28) :

$$\bar{\epsilon}^i \bar{\epsilon}^k + \bar{\epsilon}^k \bar{\epsilon}^i = 2\delta^{ik} \cdot I.$$

En effet :

$$\bar{\epsilon}^i \bar{\epsilon}^k + \bar{\epsilon}^k \bar{\epsilon}^i = (\epsilon^j \epsilon^l + \epsilon^l \epsilon^j) \frac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial \varphi^j} \frac{\partial \bar{\varphi}^k}{\partial \varphi^l} = 2\delta^{lj} \cdot I \cdot \frac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial \varphi^j} \frac{\partial \bar{\varphi}^k}{\partial \varphi^l} = 2I \cdot \sum_j \frac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial \varphi^j} \frac{\partial \bar{\varphi}^k}{\partial \varphi^j},$$

et :

$$\sum_j \frac{\partial \bar{\varphi}^i}{\partial \varphi^j} \frac{\partial \bar{\varphi}^k}{\partial \varphi^j} = \delta^{ik},$$

pour des coordonnées orthogonales comme les coordonnées géodésiques.

Nous désignerons dorénavant par  $\Psi^{mn}$  ( $m=1, 2, 3, 4$ ) les *fonctions propres non-arbitraires* du laplacien, c'est-à-dire celles qui son *entièrement* déterminées quand on connaît les  $g_{ik}$  du contenant de l'être mathématique non-arbitraire ainsi que l'équation  $\sigma(x^1, x^2, x^3, x^4)=0$  de sa frontière tridimensionnelle. (L'indice  $n$ , qui varie, comme on le verra plus loin, de 1 à  $\infty$ , sert à numéroter les valeurs propres du laplacien pour lesquelles il y a *quatre* fonctions propres linéairement indépendantes et non-arbitraires. Nous montrerons plus tard qu'aucun spectre continu n'intervient dans notre problème). Choisissons maintenant, parmi les matrices à quatre lignes et quatre colonnes qui satisfont aux conditions (28), un système de quatre matrices  $\epsilon_0^i$  dont trois sont réelles et hermitiques et l'autre (par exemple  $\epsilon_0^4$ ) purement imaginaire et hermitique. De plus, les éléments de ces  $\epsilon_0^i$  seront uniquement les nombres 0,  $\pm 1$  et  $\pm i$ . Les matrices suivantes satisfont à ces conditions :

$$(36) \quad \epsilon_0^1 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \epsilon_0^2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix},$$

$$\epsilon_0^3 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{vmatrix}, \quad \epsilon_0^4 = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}.$$

Aux fonctions  $\Psi^{mn}$ , et pour une valeur donnée de  $n$ , correspond, en utilisant les matrices  $\epsilon_0^i$ , une orientation du quadripode des  $\varphi^i$  bien définie en chaque point, pour laquelle ces  $\Psi^{mn}$  sont des solutions du système (29). Nous dirons que l'orientation des  $\varphi^i$  ainsi définie est une *orientation principale*, et nous désignerons alors les coordonnées géo-

désiques correspondantes par  $\varphi_n^i$ . Les fonctions  $\Psi^{mn}$  satisfont donc au système d'équations suivant :

$$(37) \quad \epsilon_0^i \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial \varphi_n^i} = -\sqrt{\alpha^n} \Psi^{mn}.$$

A la suite d'un changement quelconque  $\varphi_n^i \rightarrow \varphi^i$  des coordonnées géodésiques les équations précédentes deviennent :

$$(38) \quad \epsilon_n^i \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial \varphi^i} = -\sqrt{\alpha^n} \Psi^{mn},$$

en tenant compte de la transformation (35) qui s'écrit ici :

$$(39) \quad \epsilon_n^i = \epsilon_0^k \frac{\partial \varphi^i}{\partial \varphi_n^k}.$$

Par suite des définitions :

$$(40) \quad \epsilon^i \Psi^{mn} = (\epsilon^i)^{ml} \Psi_l^n; \quad \Psi^{mn} \epsilon^i = (\epsilon^i)^{lm} \Psi_l^n,$$

il est évident que les matrices réelles  $\epsilon_0^1, \epsilon_0^2, \epsilon_0^3$  commutent avec les  $\Psi^{mn}$  tandis que la matrice imaginaire  $\epsilon_0^4$  anti-commute avec les  $\Psi^{mn}$ . En posant :

$$(41) \quad \Psi_{mn}^+ = i \Psi^{mn} \epsilon_0^4,$$

on déduit donc immédiatement de (37) les équations :

$$(42) \quad \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi_n^i} \epsilon_0^i = \sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn}^+,$$

Le changement  $\varphi_n^i \rightarrow \varphi^i$  donne alors, grâce à la transformation (39) :

$$(43) \quad \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi^i} \epsilon_n^i = \sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn}^+$$

(équations adjointes des équations 38).

Désignons par  $\frac{\partial}{\partial \varphi_i}$  les composantes contravariantes de l'opérateur gradient, et formons avec les  $\Psi^{mn}$  et les  $\Psi_{mn}^+$  le tenseur suivant :

$$(44) \quad T^{ik} = \Psi_{mn}^+ \epsilon_n^i \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial \varphi_k^i} - \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi_k^i} \epsilon_n^i \Psi^{mn} + \Psi_{mn}^+ \epsilon_n^k \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial \varphi_i^i} - \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi_i^i} \epsilon_n^k \Psi^{mn}.$$

(une sommation doit être effectuée par rapport aux indices muets  $m$  et  $n$ ). Les  $T^{ik}$  sont symétriques et le caractère tensoriel contravariant,

pour une transformation  $\bar{\varphi}^i \rightarrow \varphi^i$ , est évident par suite de (35). Comme les  $\Psi^{mn}$  et les  $\Psi_{mn}^+$  satisfont évidemment aux équations

$$(45) \quad \Delta \Psi^{mn} = \sum_i \frac{\partial^2 \Psi^{mn}}{\partial \varphi^{i2}} = \alpha^n \Psi^{mn}; \quad \Delta \Psi_{mn}^+ = \sum_i \frac{\partial^2 \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi^{i2}} = \alpha_n \Psi_{mn}^+,$$

on vérifie sans peine, en utilisant les équations (38) et (43), que le tenseur  $T^{ik}$  a une divergence nulle, c'est-à-dire :

$$(46) \quad \frac{\partial T^{ik}}{\partial \varphi^k} = 0,$$

car les  $\varphi^i$  sont des coordonnées géodésiques. (Comme le  $ds^2$  en coordonnées géodésiques s'écrit simplement :

$$ds^2 = \sum_i (d\varphi^i)^2,$$

dans le voisinage infinitésimal d'un point, on a ici :  $T_{ik} = T^{ik}$ ,  $T_{ik}$  étant le tenseur covariant «complément» de  $T^{ik}$ ). Il faut remarquer qu'à l'invariance des orientations principales du quadripode des  $\varphi^i$  correspond évidemment l'invariance des composantes du tenseur  $T^{ik}$  vis-à-vis d'un changement des matrices  $\epsilon_0^i$  respectant toutes les conditions auxquelles satisfont ces  $\epsilon_0^i$ .

Nous avons ainsi trouvé un tenseur qui satisfait aux mêmes conditions que le tenseur (17) des équations fondamentales (19 a); en effet,  $T^{ik}$  est symétrique, sans divergence et ne dépend que des  $g_{ik}$ . Or, le tenseur (17), étant le seul qui satisfait à ces conditions et devant être égalé, comme nous l'avons vu dans le § 2, à une fonction-contenu unique bien définie, il est évident que cette fonction n'est autre que le tenseur (44) quand on écrit (19 a) en coordonnées géodésiques, et s'il existe des valeurs propres du laplacien pour lesquelles il y a quatre fonctions propres linéairement indépendantes.

Ce que nous venons de dire sur le tenseur (44) peut être répété, mutatis mutandis, pour déterminer le tenseur  $U^{ik}$  qui doit être égalé au second membre de (19 b). A la forme métrique externe (7) correspondent des coordonnées «géodésiques» locales  $q^i$ , c'est-à-dire  $d\Omega^2 = \sum (dq^i)^2$ , et l'on peut définir des fonctions  $\Phi^{mn}$  satisfaisant aux équations :

$$(47) \quad \sum_1^4 \frac{\partial^2 \Phi^{mn}}{\partial q^{i2}} = \zeta^n \Phi^{mn}, \quad (m=1, 2, 3, 4),$$

c'est-à-dire :

$$(48) \quad \Delta_{\omega} \Phi^{mn} \equiv \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^k} \left( \sqrt{\omega} \omega^{ik} \frac{\partial \Phi^{mn}}{\partial x^i} \right) = \zeta_n \Phi^{mn},$$

Aux fonctions  $\Phi^{mn}$  et aux matrices  $\epsilon_0^i$  correspondent aussi, pour une valeur quelconque de l'indice  $n$ , des orientations principales du quadripode des  $q^i$ , pour lesquelles on a :

$$(49) \quad \epsilon_0^i \frac{\partial \Phi^{mn}}{\partial q_n^i} = -\sqrt{|\zeta_n|} \Phi^{mn},$$

ou encore :

$$(50) \quad \epsilon_{nq}^i \frac{\partial \Phi^{mn}}{\partial q^i} = -\sqrt{|\zeta_n|} \Phi^{mn},$$

grâce à la transformation :

$$(51) \quad \epsilon_{nq}^i = \epsilon_0^k \frac{\partial q^i}{\partial q_n^k}.$$

En posant :

$$(52) \quad \Phi_{mn}^+ = i \Phi^{mn} \epsilon_0^i$$

on aura aussi les équations adjointes :

$$(53) \quad \frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q_n^i} \epsilon_0^i = \sqrt{|\zeta_n|} \Phi_{mn}^+,$$

et :

$$(54) \quad \frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q^i} \epsilon_{nq}^i = \sqrt{|\zeta_n|} \Phi_{mn}^+.$$

Le tenseur  $U^{ik}$  a donc l'expression :

$$(55) \quad U^{ik} = \Phi_{mn}^+ \epsilon_{nq}^i \frac{\partial \Phi^{mn}}{\partial q_k} - \frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q_k} \epsilon_{nq}^i \Phi^{mn} + \Phi_{mn}^+ \epsilon_{nq}^k \frac{\partial \Phi^{mn}}{\partial q_i} - \frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q_i} \epsilon_{nq}^k \Phi^{mn}.$$

Pour les raisons expliquées plus haut au sujet de  $T^{ik}$ , ce tenseur  $U^{ik}$  est le seul qui peut être égalé aux seconds membres des équations (19b) écrites en coordonnées « géodésiques »  $q^i$ , s'il existe des valeurs propres  $\beta_n$  de l'opérateur  $\Delta_{\omega}$  pour lesquelles il y a quatre fonctions propres linéairement indépendantes.

**7.** Les fonctions propres de l'opérateur laplacien et le caractère de la métrique du contenant. Nous allons démontrer le théorème suivant :

*La métrique du contenant de l'être mathématique non-arbitraire est hyperbolique normale et il y a un ensemble dénombrable de valeurs propres du laplacien pour chacune desquelles il existe quatre fonctions propres linéairement indépendantes de cet opérateur.*

Avant la démonstration de ce théorème, signalons un important corollaire :

Le tenseur  $T_{ik}$ , défini par (44), est égal à la fonction-contenu tensorielle  $T_{ik}$  qui figure aux seconds membres des équations fondamentales (19a), lorsque ces équations sont écrites en coordonnées géodésiques  $\rho^i$ .

En effet, si le théorème annoncé est vrai, le tenseur (44) existe réellement et d'après les résultats du paragraphe précédent il est alors le seul qui peut être égalé au tenseur (17) lorsque les équations (19a) sont écrites en coordonnées  $\rho^i$ .

Remarquons ici qu'un  $ds^2$  hyperbolique normal et à quatre dimensions, comme celui de l'être mathématique non-arbitraire, peut être écrit en coordonnées géodésiques de deux manières : 1.<sup>o</sup> avec trois carrés positifs (par exemple  $(d\rho^1)^2$ ,  $(d\rho^2)^2$  et  $(d\rho^3)^2$ ) et un carré négatif ( $(d\rho^4)^2 < 0$ ); 2.<sup>o</sup> avec trois carrés négatifs et un carré positif. L'expression (44) du tenseur  $T^{ik}$  suppose implicitement que le  $ds^2$  est écrit en coordonnées géodésiques, avec les trois carrés  $(d\rho^1)^2$ ,  $(d\rho^2)^2$  et  $(d\rho^3)^2$  positifs et  $(d\rho^4)^2 < 0$ . Les composantes  $T^{44}$  et  $T^{ik}$  pour  $i, k = 1, 2, 3$  sont alors réelles, tandis que les composantes  $T^{i4} = T^{4i}$  sont purement imaginaires. Nous adopterons toujours cette manière d'écrire le  $ds^2$  géodésique. Si, pourtant, le  $ds^2$  géodésique avait été écrit avec trois carrés négatifs, il suffirait de diviser par l'unité imaginaire le tenseur (4) pour avoir le tenseur correspondant  $T'_{ik}$ , c'est-à-dire :  $T'_{ik} = \frac{1}{i} T_{ik}$ , ce qui revient à poser  $\Psi_{mn}^+ = \Psi^{mn} \epsilon_0^4$  au lieu de  $\Psi_{mn}^+ = i\Psi^{mn} \epsilon_0^4$ , comme nous l'avons fait en (41).

On peut envisager *a priori* trois cas essentiellement différents :

1.<sup>o</sup> *La métrique est elliptique.* Autrement dit, il est possible d'écrire le  $ds^2$  en coordonnées géodésiques avec quatre carrés positifs (ou négatifs). La forme métrique est définie et l'équation (45) des fonctions propres du laplacien est une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre et *du type elliptique*. Soient  $P(x^1, x^2, x^3, x^4)$  et  $M(\xi^1, \xi^2, \xi^3, \xi^4)$  deux points quelconques du contenant et  $G(M, P)$  la fonction de Green (s'annulant aux limites) relative au pôle  $P$  et au domaine d'existence  $V$  des fonctions propres  $\Psi$  du laplacien. En appliquant la formule de Green aux fonctions  $G(M, P)$  et  $\Psi$ , on obtient facilement, par un calcul classique en théorie du potentiel et en remarquant que les fonctions propres, par leur définition même, s'annulent aux frontières de  $V$ , l'équation intégrale suivante :

$$\Psi(P) = \frac{\alpha}{4\pi^2} \int_V G(M, P) \Psi(M) dv,$$



Des propriétés évidentes du noyau de cette équation de Fredholm montrent qu'à chaque valeur propre  $\alpha_n$  du laplacien ne correspond qu'une fonction propre. Si la métrique était elliptique, il serait donc impossible de former un tenseur (44) avec les fonctions propres du laplacien.

2°. *La métrique est hyperbolique normale.* Autrement dit, il est possible d'écrire le  $ds^2$  en coordonnées géodésiques avec trois carrés positifs et un carré négatif. La forme métrique est indéfinie et l'équation (45) des fonctions propres du laplacien est une équation linéaire aux dérivées partielles du second ordre *du type hyperbolique normal*.

Le laplacien est maintenant un dalembertien  $\square$  généralisé relatif à la métrique (2) et nous écrirons comme suit l'équation (45):

$$(56) \quad \square \Psi = \alpha \Psi.$$

Pour chercher s'il y a des valeurs de  $\alpha$  pour lesquelles l'équation précédente a quatre fonctions propres non-arbitraires linéairement indépendantes, décomposons le contenant quadridimensionnel en une famille infinie et continue de variétés tridimensionnelles  $V_3$  à *métrique elliptique*, définie par un paramètre  $\tau = x^4$  qui sera l'une des coordonnées<sup>1</sup>. Parmi les systèmes de coordonnées  $x^1, x^2, x^3, \tau$  que l'on peut considérer nous prendrons ceux pour lesquels :

$$(57) \quad g_{ik} = 0 \quad \text{pour } i \neq k.$$

La métrique pourra donc se mettre sous la forme :

$$(57 a) \quad ds^2 = g_{44} d\tau^2 + \sum_1^3 g_{ii} (dx^i)^2$$

avec :  $g_{44} < 0$  et  $g_{ii} > 0$ . Désignons par  $\gamma$  le déterminant des  $g_{ik}$  des  $V_3$ . On peut alors écrire :

$$(58) \quad g = g_{44} \gamma$$

et l'équation (56) des fonctions propres du laplacien (dalembertien) prendra la forme suivante :

$$(59) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{g} g^{i\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} \right) + \frac{1}{2g_{44}} g^{\mu\mu} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\mu} \frac{\partial \Psi}{\partial x^\mu} + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \sqrt{g} g^{44} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right) = \alpha \Psi,$$

l'indice  $\mu$  pouvant varier de 1 à 3. En désignant par  $\Delta_3$  le laplacien

<sup>1</sup> Pour que cette décomposition ne soit pas arbitraire, il faut naturellement prendre la famille de  $V_3$  qui donne, en chaque point, la contribution (positive) maxima au  $ds^2$  du contenant.

relatif aux  $V_3$  et par  $\nabla_3$  l'opérateur hamiltonien (gradient) pour les mêmes variétés, l'équation précédente s'écrit :

$$(60) \quad \Delta_3 \Psi + \frac{1}{2g_{44}} (\nabla g_{44}) \cdot \nabla_3 \Psi + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \tau} \left( \sqrt{g} g^{44} \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} \right) = \alpha \Psi.$$

(Si la métrique était pseudo euclidienne, on aurait  $g = -c^2$  ( $c$  étant une constante, égale à l'unité imaginaire quand le  $ds^2$  est écrit sous la forme :

$$ds^2 = \sum_1^4 (d\rho^i)^2, \text{ et } g^{44} = -\frac{1}{c^2}, \text{ de sorte que le premier membre de (60)}$$

deviendrait identique au dalembertien classique de  $\Psi$ ).

Admettons, dans ce qui suit, qu'il est possible de choisir un système de coordonnées  $x^1, x^2, x^3, \tau$  satisfaisant aux conditions (57) et tel que l'une des hypersurfaces  $x^i = \text{const}$  coïncide avec la frontière  $\sigma$  du contenant. Supposons provisoirement que les  $g_{ik}$  d'un tel système de coordonnées satisfont aux conditions suivantes :

$$(61) \quad g_{44} = g_{44}(\tau)$$

et :

$$(62) \quad g_{ik} = f(\tau) r_{ik}(x^1, x^2, x^3) \quad \text{pour } i, k = 1, 2, 3.$$

L'équation (60) devient alors :

$$(63) \quad \Delta_3^0 \Psi + \frac{f(\tau)}{g_{44}} \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \tau^2} + \frac{1}{2g_{44}} \left( 3 \frac{df}{d\tau} - \frac{f}{g_{44}} \frac{dg_{44}}{d\tau} \right) \frac{\partial \Psi}{\partial \tau} = \alpha f(\tau) \Psi,$$

avec :

$$\Delta_3^0 = \frac{1}{\sqrt{r}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left( \sqrt{r} r^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right).$$

Par suite de (62) et de (19a) les fonctions  $\Psi_n$  sont ici de la forme :

$$(64) \quad \Psi_n = \sum_l u_n^{(l)}(\tau) v_l(x^1, x^2, x^3).$$

Comme le second membre de (63) peut être écrit sous la forme :

$$- \sum_l k_l u_n^{(l)}(\tau) v_l + \alpha f(\tau) \Psi + \sum_l k_l u_n^{(l)}(\tau) v_l,$$

on obtient pour les  $v_l$  l'équation :

$$(65) \quad \Delta_3^0 v_l = -k_l v_l.$$

D'autre part, les fonctions  $u_n^{(l)}(\tau)$  satisfont aux équations :

$$(66) \quad \frac{d^2 u_n^{(l)}}{d\tau^2} + \frac{1}{2} \left( 3 \frac{df}{d\tau} - \frac{1}{g_{44}} \frac{dg_{44}}{d\tau} \right) \frac{du_n^{(l)}}{d\tau} = \frac{g_{44}}{f(\tau)} [k_n f(\tau) + k_l] u_n^{(l)},$$

dans laquelle nous avons posé  $\alpha = k_n$ , puisqu'il s'agit des fonctions propres non-arbitraires  $\Psi_{mn}$  du laplacien. Ces fonctions sont uniformes, bornées, continues, possèdent des dérivées premières continues, des dérivées secondes bornées et intégrables, et s'annulent nécessairement sur la frontière  $\sigma$ . En désignant par  $G(M, P)$  la fonction de Green attachée à l'opérateur  $\Delta_3^0$  et s'annulant sur  $\sigma$ , l'équation (65) donne donc :

$$(67) \quad v_l(P) = \frac{k_l}{4\pi} \int_{V_3} G(M, P) v_l(M) dV_3(M).$$

Cette équation intégrale a une infinité dénombrable de valeurs propres  $k_l$ , toutes positives, et à chacune de ces valeurs propres correspond une seule fonction propre  $v_l(x^1, x^2, x^3)$ , solution de (65). Aux fonctions  $v_l$  correspondent les solutions de l'équation (66) pour la même valeur de l'indice  $l$ . Il y a évidemment deux solutions non-arbitraires et linéairement indépendantes de (66) pour des valeurs données des indices  $l$  et  $n$ : nous les désignerons par  $u_n^{(1)}$  et  $u_n^{(2)}$ .

Remarquons maintenant que les expressions (64) des fonctions propres du laplacien ne peuvent être absolument non-arbitraires que si la sommation fait intervenir, ou bien tous les  $v_l$ , ou bien un seul  $v_l$ , et dans ce dernier cas on doit évidemment avoir  $l = n$ . Formons donc les fonctions :

$$(68) \quad \begin{cases} \Psi_{I,n} = \sum_1^\infty u_n^{(1)}(\tau) v_l(x^1, x^2, x^3); & \Psi_{II,n} = \sum_1^\infty u_n^{(2)}(\tau) v_l(x^1, x^2, x^3) \\ \Psi_{III,n} = u_n^{(1)}(\tau) v_n(x^1, x^2, x^3); & \Psi_{IV,n} = u_n^{(2)}(\tau) v_n(x^1, x^2, x^3). \end{cases}$$

Ces fonctions sont les seules fonctions propres linéairement indépendantes et absolument non-arbitraires du laplacien (pour  $\alpha_n = k_n$ ), lorsque la métrique satisfait aux conditions (61) et (62), et lorsque la frontière  $\sigma$  du contenant coïncide avec une hypersurface  $x^i = \text{const}$ .

Faisons maintenant subir à la métrique une variation virtuelle ne respectant plus les conditions (61) et (62). Les quatre fonctions  $\Psi_{I,n}$ ,  $\Psi_{II,n}$ ,  $\Psi_{III,n}$  et  $\Psi_{IV,n}$  se transformeront alors respectivement en quatre fonctions propres non-arbitraires et linéairement indépendantes du laplacien général, que nous désignerons par  $\Psi_{1n}$ ,  $\Psi_{2n}$ ,  $\Psi_{3n}$  et  $\Psi_{4n}$ . Inversement, les fonctions  $\Psi_{1n}$ ,  $\Psi_{2n}$ ,  $\Psi_{3n}$  et  $\Psi_{4n}$  tendront respectivement vers  $\Psi_{I,n}$ ,  $\Psi_{II,n}$ ,  $\Psi_{III,n}$  et  $\Psi_{IV,n}$  lorsque  $g_{44} \rightarrow g_{44}(\tau)$  et  $g_{ik} \rightarrow f(\tau) r_{ik}(x^1, x^2, x^3)$ . Si la métrique est hyperbolique normale et si la frontière du contenant est un lieu de lignes coordonnées orthogonales à des variétés tridimensionnelles à métrique elliptique, il existe donc une infinité dénombrable de valeurs propres (positives) du lapla-

cien, à chacune desquelles correspondent quatre fonctions propres absolument non-arbitraires et linéairement indépendantes. De plus, le calcul précédent montre clairement qu'il n'y a pas, pour ces valeurs propres, d'autres fonctions propres linéairement indépendantes et non-arbitraires en dehors de celles dont nous venons de démontrer l'existence.

Nous donnerons plus loin (§ 12) un exemple de calcul effectif des valeurs et fonctions propres du laplacien, dans le cas où l'opérateur  $\Delta_0^3$  est attaché à un « espace-temps » de De Sitter.

3°. *La métrique est « hyperbolique anormale »*. Dans ce cas, le  $ds^2$ , en coordonnées géodésiques locales  $\zeta^i$ , comporte deux carrés positifs et deux carrés négatifs. L'équation  $\Delta \Psi_{mn} = \alpha_n \Psi_{mn}$  des fonctions et valeurs propres du laplacien est alors une équation aux dérivées partielles du type hyperbolique anormal. Un calcul tout-à-fait analogue à celui que nous avons fait dans le cas hyperbolique normal, montre alors qu'aux valeurs propres  $\alpha_n$  du laplacien correspondent, soit moins de quatre, soit plus de quatre fonctions propres non-arbitraires et linéairement indépendantes. S'il y a moins de quatre fonctions propres, il est impossible d'écrire avec ces fonctions un tenseur  $T_{ik}$  symétrique, du second ordre et sans divergence, pouvant par conséquent être égalé aux seconds membres des équations (19 a). S'il y a plus de quatre fonctions propres du laplacien, il est évidemment impossible de former avec ces fonctions un tel tenseur  $T_{ik}$  ayant une expression absolument non-arbitraire. En effet, à chaque combinaison quatre à quatre de ces fonctions propres (le nombre de ces combinaisons étant au moins 5) correspondrait un tenseur partiel  $T'_{ik}$ , qu'il faudrait associer linéairement aux autres tenseurs partiels. Comme cette association comporte toujours un choix arbitraire de facteurs, elle est inadmissible et empêche d'identifier les tenseurs qui en résultent avec le tenseur qui figure aux seconds membres des équations de l'être mathématique non-arbitraire.

En résumé, on voit que c'est seulement dans le cas hyperbolique normal qu'il existe un tenseur  $T_{ik}$  formé avec les fonctions propres du laplacien, ayant une expression absolument non-arbitraire, et satisfaisant aux conditions qui permettent de l'identifier au tenseur fondamental  $T_{ik}$  des équations de l'être mathématique non-arbitraire. Comme un tel tenseur existe nécessairement, puisque nous avons démontré dans le § 3 qu'il existe un être mathématique non-arbitraire, et comme d'autre part il ne peut avoir plus d'un tenseur satisfaisant aux mêmes conditions que  $T_{ik}$ , la métrique du contenant de l'être mathématique non-

-arbitraire doit être nécessairement une métrique hyperbolique normale. Le théorème énoncé au début de ce § est donc démontré.

Nous savons, d'après les calculs faits dans le cas hyperbolique normal, que la surface frontière  $\sigma(x^1, x^2, x^3, x^4) = 0$  du contenant de l'être mathématique non-arbitraire est un lieu de lignes coordonnées orthogonales à des variétés tridimensionnelles à métrique elliptique. Comme les coefficients  $g_{ik}$  de la forme métrique interne sont essentiellement des fonctions finies en chaque point du contenant, le résultat que nous venons de signaler entraîne la conséquence que la frontière  $\sigma$  ne peut être fermée, c'est-à-dire que *le contenant de l'être mathématique non arbitraire doit être illimité dans les deux sens le long de certaines lignes coordonnées, orthogonales à des variétés tridimensionnelles à métrique elliptique.*

8. Les fonctions propres de l'opérateur  $\Delta_\omega$  et le caractère de la métrique externe du contenant. Les raisonnements du § précédent peuvent être répétés sans aucun changement au sujet de l'opérateur  $\Delta_\omega$  et de l'équation  $\Delta_\omega \Phi_{mn} = \beta_n \Phi_{mn}$  de ses fonctions propres  $\Phi_{mn}$  et de ses valeurs propres  $\beta_n$ . On a donc le théorème suivant :

*La métrique externe du contenant de l'être mathématique non-arbitraire est hyperbolique normale, et il y a un ensemble dénombrable de valeurs propres de l'opérateur  $\Delta_\omega$  pour chacune desquelles il existe quatre fonctions propres non-arbitraires linéairement indépendantes de cet opérateur.*

On voit donc que le tenseur  $U_{ik}$  défini par (55), est égal à la fonction — contenu tensorielle qui figure aux seconds membres des équations fondamentales (19b), lorsque ces équations sont écrites en coordonnées géodésiques locales  $q^i$  relatives à la métrique externe (7).

9. Le principe variationnel qui correspond aux équations (19a, b) (38, 43) et (50, 54). Considérons la fonction de Lagrange suivante :

$$(69) \quad \mathcal{L} = \sum_{ikmn} [\sqrt{g} g^{ik} (\Psi_{mn}^+ \epsilon_n^i \frac{\partial \Psi^{mn}}{\partial \varphi_k} - \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi_k} \epsilon_n^i \Psi^{mn}) + 2\sqrt{\omega} \Psi_{mn}^+ \Psi^{mn} + \\ + \sqrt{\omega} \omega^{ik} (\Phi_{mn}^+ \epsilon_{nq}^i \frac{\partial \Phi^{mn}}{\partial q_k} - \frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q_k} \epsilon_{nq}^i \Phi^{mn}) + 2\sqrt{\zeta} \zeta_n \Phi_{mn}^+ \Phi^{mn}],$$

et désignons par  $x^i \rightarrow \varphi^i$  l'opération qui fait tendre, en un point  $P(x^1, x^2, x^3, x^4)$  quelconque du contenant de l'être mathématique non-arbitraire, les coordonnées générales  $x^i$  vers des coordonnées géodésiques locales orthogonales  $\varphi^i$ . De même, soit  $x^i \rightarrow q^i$  l'opération qui fait tendre les coordonnées générales  $x^i$  vers les coordonnées «géodé-

siques» locales orthogonales  $q^i$ . Les équations (38) et (50) s'obtiennent alors en égalant à zéro la dérivée variationnelle de  $\mathcal{L}$  par rapport aux  $\Psi_{mn}^+$  et aux  $\Phi_{mn}^+$  respectivement, et en soumettant ces dérivées aux opérations  $x^i \rightarrow \varrho^i$  et  $x^i \rightarrow q^i$ . On a en effet :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi_{mn}^+} \right)_{x^i \rightarrow \varrho^i} = \epsilon_n^i \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial \varrho^i} + \sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn} = 0,$$

et

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_{mn}^+} \right)_{x^i \rightarrow q^i} = \epsilon_{nq}^i \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial q^i} + \sqrt{\beta_n} \Phi_{mn} = 0,$$

puisque, pour  $x^i \rightarrow \varrho^i$  on a :  $g^{ik} \rightarrow \delta_{ik}$  et  $g \rightarrow 1$ , de même que  $\omega^{ik} \rightarrow \delta_{ik}$  et  $\omega \rightarrow 1$  pour  $x^i \rightarrow q^i$ . Pour ce qui est des équations adjointes (43) et (54) des équations (38) et (50), on a simplement, d'une manière analogue :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Psi_{mn}^+} \right)_{x^i \rightarrow \varrho^i} = - \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varrho^i} \epsilon_n^i + \sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn}^+ = 0,$$

et :

$$\frac{1}{2} \left( \frac{\delta \mathcal{L}}{\delta \Phi_{mn}^+} \right)_{x^i \rightarrow q^i} = - \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial q^i} \epsilon_{nq}^i + \sqrt{\beta_n} \Phi_{mn}^+ = 0.$$

Finalement, en prenant les dérivées variationnelles *symétriques* de  $\mathcal{L}$  par rapport aux  $g^{ik}$  et aux  $\omega^{ik}$  qui *y entrent explicitement*, on obtient (cf les expressions (44) et (55)) :

$$\sqrt{g} T^{ik} = \left( \frac{\delta}{\delta g^{ik}} + \frac{\delta}{\delta g^{ki}} \right) \mathcal{L},$$

et :

$$\sqrt{\omega} U^{ik} = \left( \frac{\delta}{\delta \omega^{ik}} + \frac{\delta}{\delta \omega^{ki}} \right) \mathcal{L}.$$

Ceci étant dit, considérons la fonction :

$$(70) \quad \mathcal{G} = \frac{1}{z_g} (R + \lambda_g) \sqrt{g} + \frac{1}{z_\omega} (S + \lambda_\omega) \sqrt{\omega}$$

et formons sa dérivée variationnelle par rapport aux  $g_{ik}$ . On a :

$$\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta g^{ik}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial g^{ik}} - \frac{d}{dx^j} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left( \frac{\partial g^{ik}}{\partial x^j} \right)} \right] + \frac{d^2}{dx^j dx^l} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left( \frac{\partial^2 g^{ik}}{\partial x^j \partial x^l} \right)} \right].$$

D'autre part :

$$\frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \omega^{ik}} = \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \omega^{ik}} - \frac{d}{dx^j} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left( \frac{\partial \omega^{ik}}{\partial x^j} \right)} \right] + \frac{d^2}{dx^j dx^l} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \left( \frac{\partial^2 \omega^{ik}}{\partial x^j \partial x^l} \right)} \right].$$

On obtient donc :

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \omega^{ik}} = \frac{1}{\kappa_g} \left[ R_{ik} - \frac{1}{2} g_{ik} (R + \lambda_g) \right],$$

et :

$$\frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\delta \mathcal{G}}{\delta \omega^{ik}} = \frac{1}{\kappa_\omega} \left[ S_{ik} - \frac{1}{2} \omega_{ik} (S + \lambda_\omega) \right],$$

et ces fonctions ne sont autres que les premiers membres des équations (19 a, b). Les « principe » variationnel qui correspond aux équations (19 a) s'écrit donc (pour  $x^i \rightarrow \rho^i$ ) :

$$(71) \quad \frac{\delta}{\delta g^{ik}} (\mathcal{G} - \mathcal{L}) = 0,$$

en convenant que la dérivée variationnelle de  $\mathcal{L}$  est la dérivée symétrique. Au système (19 b) correspond aussi la relation variationnelle analogue (pour  $x^i \rightarrow q^i$ ) :

$$(72) \quad \frac{\delta}{\delta \omega^{ik}} (\mathcal{G} - \mathcal{L}) = 0,$$

dans laquelle la dérivée variationnelle de  $\mathcal{L}$  est la dérivée symétrique. On peut d'ailleurs mettre ces relations sous la forme intégrale :

$$\frac{\delta_g}{V} \int (\mathcal{G} - \mathcal{L}) dx^1 dx^2 dx^3 dx^4,$$

pour (71) et :

$$\frac{\delta_\omega}{V} \int (\mathcal{G} - \mathcal{L}) dx^1 dx^2 dx^3 dx^4,$$

pour (72). Dans ces relations  $V$  est le contenant de l'être mathématique non-arbitraire et les variations doivent s'annuler aux limites de  $V$  c'est-à-dire sur la frontière  $\sigma$ .

**10.** Les fonctions-contenus et les nombres contenus de l'être mathématique non-arbitraire. Soit  $\varphi(x^1, x^2, x^3, x^4)$  une fonction dont le domaine d'existence est le contenant de l'être mathématique non-arbitraire. D'accord avec la définition de cet être, nous dirons que la fonction  $\varphi$  est une fonction-contenu de l'être mathématique non-arbitraire lorsqu'elle satisfait aux deux conditions suivantes :

1°. La valeur de  $\varphi$  en chaque point du contenant est entièrement déterminée par les propriétés intrinsèques de la métrique et de la forme.

2°. Les propriétés intrinsèques de la métrique ou de la forme du contenant sont entièrement déterminées par la fonction  $\varphi$  seule ou associée à d'autres fonctions satisfaisant à la première condition.

Considérons maintenant un opérateur  $A$  et écrivons l'équation de ses fonctions propres  $\varphi$  et de ses valeurs propres  $a$  :

$$(73) \quad A\varphi = a\varphi$$

Supposons que les fonctions propres de  $A$  sont des fonctions-contenus de l'être mathématique non-arbitraire. L'ensemble  $\{a\}$  des valeurs propres, dénombrables ou non, de l'opérateur  $A$  est alors un ensemble de nombres non-arbitraires, puisqu'ils peuvent être déterminés, comme les fonctions propres  $\varphi$ , par les propriétés de la métrique et de la forme du contenant. Nous dirons que les valeurs propres d'un opérateur dont les fonctions propres sont des fonctions-contenus, sont des *nombres-contenus* de l'être mathématique non-arbitraire. C'est évidemment le cas des valeurs propres  $\alpha_n$  de l'opérateur laplacien  $\Delta$  et  $\beta_n$  de l'opérateur  $\Delta_\omega$  (nous verrons que les  $\alpha_n$  et les  $\beta_n$  jouent un grand rôle dans l'interprétation physique de la théorie).

Les nombres-contenus qui correspondent à un opérateur  $A$  sont évidemment des propriétés de l'être mathématique non-arbitraire qui doivent être attachées à certains points du contenant, marquant ainsi dans cet espace un espace discontinu (si le spectre de  $A$  est discontinu), dont nous dirons que chaque point est un *point singulier* de l'être mathématique non-arbitraire. Nous verrons plus tard quelle est l'interprétation physique des points singuliers et quels sont les points du contenant où doivent être attachés les nombres-contenus.

Désignons par  $a^*$  la quantité conjuguée d'une quantité donnée  $a$ . Considérons alors l'équation (73) et son équation conjuguée. On déduit immédiatement de ces équations :

$$(74) \quad \int_V [\varphi^* A(\varphi) - \varphi A^*(\varphi^*)] dv = (a - a^*) \int_V \varphi^* \varphi dv,$$

les intégrales étant étendues à tout le domaine d'existence des fonctions propres de  $A$ , c'est-à-dire à tout le contenant de l'être mathématique non-arbitraire. Il faut distinguer deux cas :

1°. L'opérateur  $A$  est réel, ainsi que ses fonctions propres. La relation précédente montre alors immédiatement que  $a = a^*$ , c'est-à-dire que les valeurs propres de  $A$  sont réelles. Dans ce cas, les  $a$  seront des propriétés réelles des points singuliers du contenant.  
2°. L'opérateur  $A$  est complexe. Alors, la relation (74) montre que ses valeurs propres ne peuvent être réelles que s'il est un opérateur *hermitique*. Dans ce cas, comme les  $\varphi$  sont des fonctions-contenus, les  $a_n$  seront aussi des propriétés réelles des points singuliers. Les fonctions propres, par contre, tout en étant des fonctions contenues, ne



seront pas en général des propriétés réelles de l'être mathématique non-arbitraire, mais on peut former des combinaisons des  $\varphi$  essentiellement réelles, la plus simple étant la fonction qui figure sous le signe d'intégration du second membre de (74). Il est intéressant de remarquer que si le spectre d'un opérateur  $A$  est simplement discontinu, les propriétés correspondantes des points singuliers ne peuvent prendre qu'une suite discontinue de valeurs. Cette distinction entre propriétés réelles et propriétés imaginaires de l'être mathématique non-arbitraire, joue, comme on le verra plus loin, un rôle important dans l'interprétation physique de la théorie.

Les opérateurs les plus importants dans l'analyse de l'être mathématique non-arbitraire peuvent être rangés en trois classes, à savoir :

1°. Opérateurs dont l'expression est formée uniquement avec les  $g_{ik}$  (ou les  $\omega_{ik}$ ), les  $x^i$  (ou les  $\varphi^i$  et  $q^i$ ) et les symboles de dérivation ou d'intégration par rapport aux  $x^i$ ,  $\varphi^i$  ou  $q^i$ . Tels sont par exemple les importants opérateurs  $\Delta$  et  $\Delta_\omega$ , déjà utilisés dans les paragraphes précédents.

2°. Opérateurs dont l'expression ne contient aucun des symboles de nature géométrique qui interviennent dans les opérateurs de la première classe. Tels sont par exemple les opérateurs matrices  $\epsilon^i$  et tous les autres que l'on peut former par des combinaisons des  $\epsilon^i$ .

3°. Opérateurs mixtes, faisant intervenir à la fois des symboles appartenant aux opérateurs de la première et de la deuxième classe. Tels sont par exemple les importants opérateurs  $\epsilon^i \frac{\partial}{\partial \varphi^i}$  et  $\left(\frac{\partial}{\partial \varphi^i}\right) \epsilon^i$  dont nous avons vu le rôle dans le § 6.

Dans chacune de ces trois classes d'opérateurs on peut encore distinguer les opérateurs *complets*, faisant intervenir toutes les variables  $x^i$  (ou  $\varphi^i$  et  $q^i$ ), des opérateurs *incomplets* qui ne font pas intervenir toutes les variables  $x^i$ . Nous dirons que les nombres-contenus (valeurs propres) qui correspondent aux premiers sont des *propriétés intrinsèques* des points singuliers, tandis que les valeurs propres qui correspondent aux seconds seront appelés des *propriétés non-intrinsèques* des points siguliers.

Considérons en particulier les opérateurs de la deuxième classe qu'on peut former uniquement avec  $i$  et les  $\epsilon_n^i$  définis par (39) et qui satisfont aux relations (28). En ajoutant aux  $\epsilon_n^i$  la matrice unité  $I$  (à quatre lignes et quatre colonnes) on peut former les seize opérateurs suivants :

$$(75) \left\{ \begin{array}{l} I, \epsilon_n^1, \epsilon_n^2, \epsilon_n^3, \epsilon_n^4 \equiv \gamma_n^\mu (\mu=1, 2, \dots, 5), \\ \frac{i}{2} (\epsilon_n^j \epsilon_n^k - \epsilon_n^k \epsilon_n^j) : \{ i \epsilon_n^2 \epsilon_n^3, i \epsilon_n^3 \epsilon_n^4, i \epsilon_n^4 \epsilon_n^1, i \epsilon_n^1 \epsilon_n^2, i \epsilon_n^2 \epsilon_n^4, i \epsilon_n^3 \epsilon_n^1 \} \equiv \\ \equiv \gamma_n^\mu (\mu=6, 7, \dots, 11), \\ i \epsilon_n^{j+1} \epsilon_n^{j+2} \epsilon_n^{j+3} : \{ i \epsilon_n^2 \epsilon_n^3 \epsilon_n^4, i \epsilon_n^3 \epsilon_n^4 \epsilon_n^1, i \epsilon_n^4 \epsilon_n^1 \epsilon_n^2, i \epsilon_n^1 \epsilon_n^2 \epsilon_n^3 \} \equiv \\ \equiv \gamma_n^\mu (\mu=12, \dots, 15), \\ \epsilon_n^1 \epsilon_n^2 \epsilon_n^3 \epsilon_n^4 \equiv \gamma_n^{16}. \end{array} \right.$$

Ces opérateurs sont linéairement indépendants et de plus sont hermitiques lorsque les  $\epsilon_n^i$  le sont, c'est-à-dire lorsque ces matrices se confondent avec les matrices de base  $\epsilon_0^i$  définies dans le § 6. Écrivons l'équation des fonctions propres d'un  $\gamma_0^\mu$  formé avec les  $\epsilon_0^i$ ;

$$\gamma_0^\mu \varphi_{m\nu} = a_\nu \varphi_{m\nu}.$$

On trouve alors que pour tous les  $\gamma_0^\mu$  il ne peut y avoir que les deux valeurs propres  $+1$  et  $-1$ .

Il est possible de former d'autres nombres-contenus différents des nombres-contenus valeurs propres d'opérateurs. Nous allons indiquer les principaux modes de formation de ces nouveaux nombres-contenus. Soit  $f(x^1, x^2, x^3, x^4)$  une fonction-contenu quelconque et  $A$  un opérateur dont les fonctions propres  $\varphi$  sont aussi des fonctions-contenus. Supposons, ce qui est vrai sous des conditions très générales lorsque  $A$  est hermitique, que  $f$  peut être développée en série absolument et uniformément convergente suivant les fonctions propres de  $A$ :

$$f = \sum_{mn} c_{mn} \varphi^{mn} + \sum_m \int b_m(a) \varphi_m(a) da \equiv \sum_{mn} c_{mn} \varphi_{mn} + \\ + \sum_{m, \delta a} b_m(a) \left[ \frac{1}{\delta a} \int_a^{a+\delta a} \varphi_m(a) da \right] \delta a,$$

la sommation se rapportant au spectre discontinu de  $A$  (l'indice  $n$  servant à numéroter les valeurs propres correspondantes) et l'intégrale au spectre continu. Si l'opérateur  $A$  est complet, alors les  $c_{mn}$  et les  $b_m(a)$  sont des constantes; dans le cas contraire, ces quantités sont des fonctions des variables  $x^i$  qui n'interviennent pas dans l'expression de l'opérateur  $A$ . Remarquons que si  $A$  est hermitique, les fonctions propres sont orthogonales. En effet, on déduit de  $A\varphi^{mn} = a^n \varphi^{mn}$  la relation:

$$\int_D [\varphi_{mn} A^* (\varphi_{\mu\nu}^*) - \varphi_{\mu\nu}^* A (\varphi_{mn})] dv = (a_\nu - a_n) \int_D \varphi_{\mu\nu}^* \varphi_{mn} dv,$$

l'intégrale étant étendue à tout le domaine défini par les variables dont dépend  $A$ . L'orthogonalité :

$$\int \varphi_{uv}^* \varphi_{mn} dv = 0$$

de deux fonctions propres relatives à des valeurs propres différentes ( $a^n \neq a^m$ ) résulte donc immédiatement de la relation précédente si  $A$  est hermitique. Pour des valeurs propres possédant plusieurs fonctions propres linéairement indépendantes on peut encore supposer l'orthogonalité si  $A$  est linéaire, car alors on peut former une combinaison linéaire à coefficients constants des  $\varphi_{mn}$  qui sera encore solution de  $A\varphi_{mn} = a_n \varphi_{mn}$  et qui satisfera à la relation :

$$\int_D \varphi_{mn}^* \varphi_{pm} = 0 \quad \text{pour } p \neq m.$$

Grâce à l'orthogonalité des  $\varphi_{mn}$  et des «différentielles propres»

$$\frac{1}{\partial a} \int_a^{a+\delta a} \varphi_m(a) da, \quad \text{on a :}$$

$$c_{mn} = \frac{\int_D f \varphi_{mn}^* dv}{\int_D \varphi_{mn}^* \varphi_{mn} dv},$$

et :

$$b_m(a) = \frac{\int_D \left[ \frac{1}{\partial a} \int_a^{a+\delta a} \varphi_m^*(a) da \right] f dv}{\int_D \frac{1}{\partial a} \left[ \int_D \varphi_m^*(a) da \right] \left[ \int_a^{a+\delta a} \varphi_m(a) da \right] dv},$$

relations qui se réduisent à :

$$c_{mn} = \int_D f \varphi_{mn}^* dv,$$

et

$$b_m(a) = \int_D \left[ \frac{1}{\partial a} \int_a^{a+\delta a} \varphi_m^*(a) da \right] f dv,$$

si les  $\varphi_{mn}$  et les «différentielles propres» sont normalisées à l'unité. Comme les fonctions  $f$  et  $\varphi_{mn}$  sont des fonctions-contenus, on voit que les coefficients  $c_{mn}$  et  $b_m(a)$  sont des nombres-contenus, si  $A$  est complet.

En plus de ces nombres-contenus, relatifs à une fonction-contenu  $f$  et à un opérateur complet  $A$ , on peut former par exemple les nombres-contenus suivants :

$$(76) \quad \bar{A}(f) = \int f^* A(f) dx,$$

Il est facile de voir que l'on a

$$A(f) = \sum_n a_n |c_n|^2,$$

En effet :

$$\int f^* A(f) dx = \int \sum c_y^* c_n (\varphi_y^* \varphi_n) a_n dx = \sum a_n |c_n|^2.$$

Appliquons maintenant un opérateur  $B$  à l'une des fonctions propres  $\varphi^{mn}$  d'un opérateur  $A$  et supposons que la fonction  $B(\varphi^{mn})$  soit développable en série absolument et uniformément convergente suivant les  $\varphi^{mn}$  :

$$B(\varphi^{mn}) = \sum_{\mu\nu} (b_{mn})_{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}.$$

(Nous ne tenons pas compte du spectre continu). On déduit de la relation précédente :

$$(b_{mn})_{\mu\nu} = \int \varphi_{\mu\nu}^* B(\varphi^{mn}) dx.$$

Ces nombres  $(b_{mn})_{\mu\nu}$  sont les éléments de la matrice engendrée par l'opérateur  $B$  dans le système des fonctions propres orthogonales de l'opérateur  $A$ . Comme les  $\varphi^{mn}$  sont des fonctions-contenus, les fonctions  $B(\varphi^{mn})$  sont aussi des fonctions-contenus (si l'opérateur  $B$  ne fait pas intervenir des constantes arbitraires, ou, ce qui revient au même, si ces fonctions propres sont des fonctions-contenus). La matrice  $(b_{mn})_{\mu\nu}$  est donc une «matrice contenu» de l'être mathématique non-arbitraire.

En résumé, de toute fonction-contenu  $f$ , associée à une paire d'opérateurs  $(A, B)$  hermitiques dont les fonctions propres sont des fonctions-contenus, nous avons déduit les nombres-contenus suivants :

$$a_n(A); \quad c_{mn}(A, f); \quad \bar{A}(f); \quad [b_{mn}]_{\mu\nu}(A, B).$$

Les nombres  $A(f)$  les plus importants dans l'analyse de l'être mathématique non-arbitraire sont ceux qu'on obtient en prenant pour

$f$  l'une des fonctions propres  $\Psi^{mn}$  de l'opérateur  $\Delta$  ou  $\Phi^{mn}$  de l'opérateur  $\Delta_\omega$ , pour  $A$  l'un des opérateurs  $i\epsilon_n^i \gamma_n^u$  et en remplaçant dans (76) l'intégration par une sommation par rapport à l'indice  $m$  qui sert à numéroter les fonctions propres relatives à une même valeur propre (cet indice est en somme la seule variable sur laquelle agissent les opérateurs  $\gamma_n^u$ ). Nous formons donc les quantités :

$$(77 \ a, \ b) \quad \bar{A}(\Psi^{mn}) = \Psi_{mn}^+ \gamma_n^u \Psi_n^m ; \quad \bar{A}(\Phi^{mn}) = \Phi_{mn}^+ \gamma_{nq}^u \Phi_n^m,$$

et l'on peut aussi envisager les quantités :

$$(78 \ a, \ b) \quad \bar{\bar{A}}(\Psi) = \Psi_{mn}^+ \gamma_n^u \Psi^{mn} ; \quad \bar{\bar{A}}(\Phi) = \Phi_{mn}^+ \gamma_{nq}^u \Phi^{mn},$$

avec sommation par rapport aux indices  $m$  et  $n$ . On peut ranger ces quantités en plusieurs catégories suivant leurs variances vis-à-vis d'un changement de coordonnées géodésiques locales  $\zeta^i$  (pour les quantités (77, a) ou de coordonnées «géodésiques»  $q^i$  (pour les quantités (77, b). On a ainsi le tableau suivant :

$$(79) \left\{ \begin{array}{ll} M_n^{ik} = \frac{i}{2} \Psi_{mn}^+ (\epsilon_n^i \epsilon_n^k - \epsilon_n^k \epsilon_n^i) \Psi_n^m & ; \quad M^{ik} = \sum_n M_n^{ik} : \text{tenseurs} \\ & \text{antisymétriques du second ordre,} \\ V_n^i = \Psi_{mn}^+ \epsilon_n^i \Psi_n^m & ; \quad V^i = \sum_n V_n^i : \text{quadri-} \\ & \text{vecteurs,} \\ W_n^i = \Psi_{mn}^+ \epsilon_n^{i+1} \epsilon_n^{i+2} \epsilon_n^{i+3} \Psi_n^m & ; \quad W^i = \sum_n W_n^i : \text{tenseurs} \\ & \text{complètement antisymétriques du 3<sup>ième</sup> ordre,} \\ (I_1)_n = \Psi_{mn}^+ \Psi_n^m & ; \quad I_1 = \sum_n (I_1)_n : \text{inva-} \\ & \text{riants (scalaires),} \\ (I_2)_n = \Psi_{mn}^+ \epsilon_n^1 \epsilon_n^2 \epsilon_n^3 \epsilon_n^4 \Psi_n^m & ; \quad I_2 = \sum_n (I_2)_n : \text{inva-} \\ & \text{riants (pseudo-scalaires),} \end{array} \right.$$

De même :

$$(80) \left\{ \begin{array}{ll} (M_\omega)_n^{ik} = \frac{i}{2} \Phi_{mn}^+ (\epsilon_{nq}^i \epsilon_{nq}^k - \epsilon_{nq}^k \epsilon_{nq}^i) \Phi_n^m & ; \quad M_\omega^{ik} = \sum_n (M_\omega)_n^{ik} : \text{tenseurs} \\ & \text{antisymétriques du second ordre,} \\ (V_\omega)_n^i = \Phi_{mn}^+ \epsilon_{nq}^i \Phi_n^m & ; \quad V_\omega^i = \sum_n (V_\omega)_n^i : \text{quadri-} \\ & \text{vecteurs,} \\ (W_\omega)_n^i = \Phi_{mn}^+ \epsilon_{nq}^{i+1} \epsilon_{nq}^{i+2} \epsilon_{nq}^{i+3} \Phi_n^m & ; \quad W_\omega^i = \sum_n (W_\omega)_n^i : \text{tenseurs} \\ & \text{complètement antisymétriques du 3<sup>ième</sup> ordre,} \\ (I_1^\omega)_n = \Phi_{mn}^+ \Phi_n^m & ; \quad I_1^\omega = \sum_n (I_1^\omega)_n : \text{inva-} \\ & \text{riants (scalaires),} \\ (I_2^\omega)_n = \Phi_{mn}^+ \epsilon_{nq}^1 \epsilon_{nq}^2 \epsilon_{nq}^3 \epsilon_{nq}^4 \Phi_n^m & ; \quad I_2^\omega = \sum_n (I_2^\omega)_n : \text{inva-} \\ & \text{riants (pseudo-scalaires).} \end{array} \right.$$

Les vecteurs  $V_n^i$ ,  $V^i$ ,  $V_\omega^i$ ,  $(V_\omega)_n^i$  sont conservatifs (divergence nulle). Par suite des équations (38) et (43) on voit en effet immédiatement que

$$(82) \quad \frac{\partial V_n^i}{\partial \varphi^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \bar{V}_n^i) = 0,$$

et :

$$(83) \quad \frac{\partial (V_\omega)_n^i}{\partial q^i} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^i} [\sqrt{\omega} (\bar{V}_\omega)_n^i] = 0.$$

D'autre part, on a :

$$(84) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial M_n^{ik}}{\partial \varphi^k} &= \frac{1}{2\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{g} \bar{M}_n^{ik}) + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} i \\ k, j \end{matrix} \right\} \bar{M}_n^{kj} = \\ &= -i\sqrt{\alpha_n} V_n^i + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi^i} \Psi_n^m - \Psi_{mn}^+ \frac{\partial \Psi_n^m}{\partial \varphi^i} \right), \end{aligned}$$

et :

$$(85) \quad \begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{\partial (M_\omega)_n^{ik}}{\partial q^k} &= \frac{1}{2\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^k} [\sqrt{\omega} (\bar{M}_\omega)_n^{ik}] + \frac{1}{2} \left\{ \begin{matrix} i \\ k, j \end{matrix} \right\}_\Omega (\bar{M}_\omega)_n^{kj} = \\ &= -i\sqrt{\zeta_n} (V_\omega)_n^i + \frac{i}{2} \left( \frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q^i} \Phi_n^m - \Phi_{mn}^+ \frac{\partial \Phi_n^m}{\partial q^i} \right), \end{aligned}$$

l'indice  $\Omega$  rappelant que le symbole de Christoffel est formé avec les  $\omega_{ik}$  de la forme métrique externe (7).

Il est important de calculer aussi la divergence des vecteurs  $W^i$  et  $W_\omega^i$ . Pour  $W^i$  on trouve :

$$(86) \quad \frac{\partial W_n^i}{\partial \varphi^i} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{g} \bar{W}_n^i) = -2\sqrt{\alpha_n} (I_2)_n,$$

et pour  $W_\omega^i$  :

$$(87) \quad \frac{\partial (W_\omega)_n^i}{\partial q^i} = \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{\omega} (\bar{W}_\omega)_n^i) = -2\sqrt{\zeta_n} (I_2)_n.$$

Finalement, désignons par  $B_n^{ik}$  un tenseur antisymétrique sans divergence satisfaisant à la condition :

$$(88) \quad B_n^{ijk} \equiv \frac{\partial B_n^{ij}}{\partial \varphi^k} + \frac{\partial B_n^{jk}}{\partial \varphi^i} + \frac{\partial B_n^{ki}}{\partial \varphi^j} = \frac{\partial M_n^{ij}}{\partial \varphi^k} + \frac{\partial M_n^{jk}}{\partial \varphi^i} + \frac{\partial M_n^{ki}}{\partial \varphi^j},$$

et par  $(B_\omega)_n^{ik}$  un tenseur antisymétrique sans divergence satisfaisant à la condition :

$$(89) \quad (B_\omega)_n^{ijk} \equiv \frac{\partial (B_\omega)_n^{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial (B_\omega)_n^{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial (B_\omega)_n^{ki}}{\partial q^j} = \frac{\partial (M_\omega)_n^{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial (M_\omega)_n^{jk}}{\partial q^i} + \frac{\partial (M_\omega)_n^{ki}}{\partial q^j}.$$

On peut alors poser :

$$(90) \quad M_n^{ik} = \frac{\partial A_n^k}{\partial \varphi_i} - \frac{\partial A_n^i}{\partial \varphi_k} + B_n^{ik}$$

$A_n^k$  étant un vecteur, et :

$$(91) \quad (M_\omega)_n^{ik} = \frac{\partial (A_\omega)_n^k}{\partial q_i} - \frac{\partial (A_\omega)_n^i}{\partial q_k} + (B_\omega)_n^{ik}$$

$(A_\omega)_n^k$  étant un autre vecteur (par rapport à un changement des  $q^i$ ).

Il va de soi que l'on peut assujettir  $A_n^i$  et  $(A_\omega)_n^i$  aux conditions :

$$(92 \text{ a, b}) \quad \frac{\partial A_n^i}{\partial \varphi^i} = 0; \quad \frac{\partial (A_\omega)_n^i}{\partial q^i} = 0,$$

ce qui entraîne :

$$(93) \quad \square A_n^i = - \frac{\partial M_n^{ik}}{\partial \varphi^k},$$

et :

$$(94) \quad \square_\omega (A_\omega)_n^i = - \frac{\partial (M_\omega)_n^{ik}}{\partial q^k}.$$

Toutes ces relations sur les  $\Psi_{mn}^+ \gamma_n^\mu \Psi^{mn}$  et les  $\Phi_{mn}^+ \gamma_{nq}^\mu \Phi^{mn}$  nous seront indispensables plus tard dans l'interprétation physique de la théorie.

11. Solution approchée des équations de l'être mathématique non-arbitraire. Le système d'équations complet formé par la réunion des systèmes (19), (25) et (26) se compose de 56 équations indépendantes faisant intervenir 56 inconnues que nous avons appris à distinguer plus haut (§ 5). La solution de ce système de 56 équations aux dérivées partielles du second ordre (non linéaires) constitue un problème très difficile qui ne peut être attaqué de front actuellement. Il faut trouver des solutions approchées en utilisant la méthode des perturbations.

Nous partirons d'une solution de base des équations (19), (25) et (26), qui définit une hypersurface  $F_0(X^1, X^2, X^3, X^4, X^5) = 0$  de l'espace  $E_5$  pseudo-euclidien hyperbolique à cinq dimensions où le contenant de l'être mathématique non-arbitraire peut, d'après nos résultats précédents, être plongé. Nous admettrons ensuite que les écarts entre les valeurs des inconnues qui correspondent exactement à l'être mathématique non-arbitraire et les valeurs qui correspondent à la solution approchée sont, ou bien nulles, ou bien des quantités très petites dont on peut négliger les carrés et les produits. Désignons par  $G_{ik}$  et  $\Omega_{ik}$  les coefficients de la forme métrique fondamentale et de la forme métrique externe de l'hypersurface de base  $F_0(X^\mu) = 0$  à quatre dimen-

sions. Nous supposons que cette hypersurface (dont la métrique est hyperbolique normale d'après le théorème du § 7) admet un  $ds^2$  de la forme suivante :

$$(95) \quad ds^2 = -d\tau^2 + \mathbf{P}^2(\tau)[d\theta^2 + \sin^2\theta(d\varphi^2 + \sin^2\varphi d\mu^2)],$$

dans lequel le coefficient de  $\mathbf{P}^2$  est à symétrie sphérique (les coordonnées angulaires orthogonales  $\theta$ ,  $\varphi$ ,  $\mu$ , ayant la signification habituelle). Les univers statique d'Einstein, ceux de De Sitter-Lanczos et de Lemaitre admettent tous des  $ds^2$  qui sont des cas particuliers du  $ds^2$  précédent. Pour qu'une telle hypersurface de base  $F_0$  soit acceptable, il faut qu'elle satisfasse aux équations (19), (25) et (26) du problème. Remarquons que tous les  $R_{ik}$  pour  $i \neq k$  sont nuls, par suite de la forme du  $ds^2$ . Il en est évidemment de même des  $T_{ik}^0$  correspondants. D'ailleurs, en conséquence de l'homogénéité du  $ds^2$  et de la symétrie sphérique de sa partie elliptique, les  $T_{ik}^0$  non nuls ne peuvent dépendre a priori que de  $\tau$  et de  $\theta$ , et nous admettrons (ce qui caractérisera la première approximation) *qu'ils ne dépendent que de  $\tau$* . Alors, comme les fonctions propres non arbitraires  $\Psi_{mn}$  du laplacien s'annulent nécessairement sur la frontière tridimensionnelle  $\sigma$  du contenant de l'être mathématique non arbitraire, et comme d'autre part nous savons (§ 3) que cet être doit posséder une telle frontière (c'est-à-dire qu'il ne peut avoir un contenant fermé), l'expression (44) montre que les contenus tensoriels  $T_{ik}^0$  s'annulent aussi sur  $\sigma$ . Or, comme nous devons admettre que les  $T_{ik}^0$  ne peuvent dépendre que de  $\tau$ , on voit qu'en réalité ils doivent s'annuler en chaque point du contenant. Il ne reste donc, dans le système d'équations (19 a), que les deux inconnues  $\mathbf{P}(\tau)$  et  $\lambda_g^0$ . Dans ces conditions, si nous introduisons les  $R_{ik}$  formés avec les  $G_{ik}$  de (95) dans les équations (19 a), ces équations se réduisent à deux seules équations qu'on peut mettre sous la forme suivante, à la suite de quelques transformations simples :

$$(96) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{d^2\mathbf{P}}{d\tau^2} = \frac{\lambda_g^0}{6} \mathbf{P}, \\ \left(\frac{d\mathbf{P}}{d\tau}\right)^2 = \frac{\lambda_g^0}{6} \mathbf{P}^2 - 1. \end{array} \right.$$

On en déduit immédiatement la solution suivante, en désignant par  $\mathbf{P}_0$  la valeur de  $\mathbf{P}$  pour  $\tau=0$  (valeur minima) :

$$(97) \quad \begin{array}{l} a) \left\{ \begin{array}{l} \mathbf{P}(\tau) = \mathbf{P}_0 \operatorname{ch} \left( \frac{\tau}{\mathbf{P}_0} \right), \\ b) \left\{ \begin{array}{l} \lambda_g^0 = \frac{6}{\mathbf{P}_0^2}, \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array}$$



ce qui montre qu'en première approximation le contenant de l'être mathématique non-arbitraire est un espace-temps de De Sitter-Lanczos. Un tel contenant a une courbure moyenne constante et satisfait aux conditions  $\Omega_{ik} = \chi G_{ik}$ ,  $\chi$  étant la courbure moyenne. On a d'ailleurs

ici  $\chi = \frac{1}{P_0} = \sqrt{\frac{\lambda_g^0}{6}}$ . D'autre part, les équations (19 b), où l'on pose  $\Omega_{ik} = \chi G_{ik}$ , c'est-à-dire :  $S_{ik}^0 = R_{ik}^0$  et  $S^0 = \frac{1}{\chi} R^0$ , montrent que l'on a ici  $U_{ik}^0 = 0$  et que  $\lambda_\omega^0 = \lambda_g^0 / \chi$ .

La solution (97) semble donner à  $\lambda_g^0$  une valeur arbitraire puisqu'elle exprime cette constante en fonction de la constante arbitraire  $P_0$ . Or, comme il est évident que l'intégration effective du système fondamental (19 a)+(19 b)+(24)+(25) ne peut déterminer complètement les inconnues que lorsqu'on a fixé préalablement l'unité de longueur dans l'espace pseudo-euclidien  $E_5$  où l'être mathématique non-arbitraire doit être plongé, il est clair que la relation (97 b) ne doit pas être interprétée en disant que  $\lambda_g^0$  est une constante arbitraire. Il faut dire, au contraire, que  $P_0$  est une longueur caractéristique de l'être mathématique non-arbitraire, jouant le rôle d'unité naturelle de longueur déterminant la valeur numérique de  $\lambda_g^0$ . Un changement de  $P_0$  est donc en réalité un changement d'unité de longueur. Dans le cas général de l'intégration du système fondamental sans aucune hypothèse sur la forme du  $ds^2$ , on doit aboutir évidemment à une relation généralisant la relation (97 b) et faisant intervenir aussi une longueur caractéristique, qui jouera le rôle d'unité naturelle de longueur.

Nous savons (§ 3) que le problème posé par le système d'équations (19)+(25)+(26) n'est bien défini que s'il existe une variété tridimensionnelle  $\sigma$  bornant le contenant de l'être mathématique non arbitraire. Nous devons donc limiter l'hypersurface de base  $F_0$ , qui constitue la première approximation dans la solution du système fondamental, par une variété tridimensionnelle  $\sigma_0$ . D'après les résultats du § 7 cette variété doit d'ailleurs être un lieu de lignes coordonnées « temporelles », et comme la partie elliptique du  $ds^2$  (95) est à symétrie sphérique, nous devons prendre ici une variété frontière ayant pour équation  $\theta = \text{const} = \theta_0$ . Pour définir complètement notre première approximation il nous reste donc à déterminer la valeur qu'il convient d'adopter pour cette constante  $\theta_0$ . Considérons la section de  $F_0$  par l'hyperplan  $\tau = 0$ . La variété  $\sigma_0$  limite cette section ( $\Sigma_0^0$ ) par une surface sphérique enfermant un volume  $v_0$  qui, ajouté à  $\Sigma_0^0$ , forme un espace tridimensionnel sphérique fermé dont le rayon est  $P_0$  et dont le volume est  $2\pi^2 P_0^3$ . En

désignant par  $\delta_0$  le diamètre de  $v_0$ , on a  $\delta_0 = 2\mathbf{P}_0\theta_0$ , l'origine des  $\theta$  étant le centre de  $v_0$ . Pour les raisons que nous indiquerons plus loin (Chap. III, § 8) on doit poser  $\delta_0 = \delta_m$ ,  $\delta_m$  étant la plus petite longueur dont la mesure ait un sens. L'espace  $\Sigma_0^0$ , tout en étant géométriquement ouvert, est donc «physiquement» fermé et illimité, en ce sens qu'aucune mesure ou observation ne pourrait déceler l'existence d'une frontière de  $\Sigma_0^0$ .

Pour trouver une solution plus approchée des équations de l'être mathématique non arbitraire, nous allons placer en chaque point de l'hypersurface de base  $F_0$  un quadripode géodésique  $\rho^i$  orienté tangentiellement aux lignes coordonnées orthogonales  $\theta, \varphi, \mu, \tau$  de  $F_0$ . Désignons par  $(G_\rho)_{ik}$  les coefficients métriques relatifs à ces quadripodes, c'est-à-dire  $(G_\rho)_{ik} = \delta_{ik}$  et considérons la différence entre l'hypersurface  $F$  qui correspond à l'être mathématique non-arbitraire et l'hypersurface de base  $F_0$ . D'après les hypothèses caractéristiques de la méthode des perturbations, cette différence peut être considérée comme une déformation infiniment petite de  $F_0$ , à la suite de laquelle les coordonnées  $\theta, \varphi, \mu, \tau$  de  $F_0$  se déforment et deviennent des coordonnées générales  $x^i$  (que nous avons appelées «coordonnées intrinsèques» dans le § 3). En même temps les quadripodes des  $\rho^i$  se déforment aussi et deviennent tangents aux lignes coordonnées  $x^i$ , de sorte qu'en désignant par  $\bar{g}_{ik}$  les coefficients de la forme métrique interne de  $F$  écrite en coordonnées locales  $\rho^i$  déformées (que nous désignerons par  $\bar{\rho}^i$ ), on peut poser :

$$(98) \quad \bar{g}_{ik} = \delta_{ik} + \gamma_{ik}; \quad ds^2 = (\delta_{ik} + \gamma_{ik}) d\bar{\rho}^i d\bar{\rho}^k,$$

les  $\gamma_{ik}$  étant des quantités infiniment petites par rapport aux  $(G_\rho)_{ik}$ . Les  $g_{ik}$  de la forme métrique interne de  $F$  écrite en coordonnées générales  $x^i$  seront donc donnés par la transformation :

$$(99) \quad g_{ik} = g_{jl} \frac{\partial \bar{\rho}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{\rho}^l}{\partial x^k},$$

et l'on a :

$$(100) \quad \frac{\partial \bar{\rho}^j}{\partial x^i} = \frac{\partial \rho^j}{\partial \theta^i},$$

$\theta^i$  étant celle des coordonnées  $\theta, \varphi, \mu, \tau$  qui devient  $x^i$  à la suite de la déformation de  $F_0$ . Il va de soi que l'on peut aussi considérer sur  $F$  des coordonnées  $\theta, \varphi, \mu, \tau$  intersections des hypersurfaces  $\theta, \varphi, \mu, \tau$  de  $E_3$  avec  $F$ . Nous désignerons par  $\bar{G}_{ik}$  les coefficients métriques de  $F$

relatifs à ces coordonnées, c'est-à-dire :

$$(101) \quad \bar{G}_{ik} = g_{jl} \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^l}{\partial \theta^k}.$$

En posant  $R_{ik} = R_{ik}^0 + R'_{ik}$ ,  $R_{ik}^0$  étant les composantes du tenseur de Ricci-Einstein pour  $F_0$ , le système (19 a) se scinde en deux systèmes qu'on peut écrire comme suit, grâce à (98) :

$$(102) \quad R_{ik}^0 - \frac{1}{2} (R^0 + \lambda_g^0) \delta_{ik} = 0$$

(ce système est équivalent aux équations (96) déjà étudiées), et :

$$(103) \quad R'_{ik} - \frac{1}{2} [(R^0 + \lambda_g^0) \gamma_{ik} + (R' + \lambda'_g) \delta_{ik}] = \alpha_g T_{ik},$$

$\lambda'_g$  étant la perturbation de  $\lambda_g^0$  qui correspond à la déformation de  $F_0$ . En tenant compte de (98) et de (21) ce système se transforme facilement par un calcul bien connu en Relativité et devient

$$(104) \quad \square_0 \gamma_{ik} = 2\alpha_g (T_{ik} - \frac{1}{2} \delta_{ik} T) - \lambda'_g \delta_{ik} - \lambda_g \gamma_{ik},$$

$\square_0$  étant l'opérateur dalembertien attaché à la forme métrique interne de  $F_0$ .

Considérons maintenant les quadripodes « géodésiques » des  $q^i$  (forme métrique externe) et orientons—les aussi, en chaque point de  $F_0$ , tangentiellement aux lignes coordonnées  $\theta, \varphi, \mu, \tau$ . On sait que l'on a :  $\Omega_{ik} = \chi G_{ik}$ , de sorte qu'après la déformation infiniment petite de  $F_0$  on peut poser :

$$(105) \quad \bar{\omega}_{ik} = \chi \delta_{ik} + \omega'_{ik}; \quad d\Omega^2 = (\chi \delta_{ik} + \omega'_{ik}) d\bar{\varphi}^i d\bar{\varphi}^k,$$

les  $\omega'_{ik}$  étant des quantités infiniment petites par rapport aux  $\chi \delta_{ik}$ . Les  $\omega_{ik}$  de la forme métrique externe de  $F$  écrite en coordonnées générales  $x^i$  seront donc donnés par la transformation :

$$(106) \quad \omega_{ik} = \omega_{jl} \frac{\partial \bar{\varphi}^j}{\partial x^i} \frac{\partial \bar{\varphi}^l}{\partial x^k}$$

et l'on a :

$$(107) \quad \frac{\partial \bar{q}^j}{\partial x^i} = \frac{\partial q^j}{\partial \theta^i}.$$

De même, en désignant par  $\bar{\Omega}_{ik}$  les coefficients métriques externes de  $F$  relatifs aux coordonnées  $\theta, \varphi, \mu, \tau$ , on aura :

$$(108) \quad \bar{\Omega}_{ik} = \omega_{ji} \frac{\partial x^j}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^l}{\partial \theta^k}.$$

En posant  $S_{ik} = S_{ik}^0 + S'_{ik}$ ,  $S_{ik}^0$  étant les composantes du tenseur de Ricci-Einstein associé à la forme métrique externe de  $F_0$ , le système (19b) se scinde, comme (19a), en deux systèmes qu'on peut écrire comme suit :

$$(109) \quad S_{ik}^0 - \frac{1}{2} (S^0 + \lambda_\omega^0) \chi \delta_{ik} = 0,$$

et :

$$(110) \quad S'_{ik} - \frac{1}{2} [(S^0 + \lambda_\omega^0) \omega'_{ik} + (S' + \lambda'_\omega) \chi \delta_{ik}] = \lambda_\omega U_{ik}$$

$\lambda'_\omega$  étant la perturbation de  $\lambda_\omega^0$  qui correspond à la déformation de  $F_0$ . Ce dernier système se transforme facilement et prend la forme :

$$(111) \quad \square_\omega^0 \omega'_{ik} = 2\chi \lambda_\omega (U_{ik} - \frac{\chi}{2} \delta_{ik} U) - \lambda'_\omega \chi \delta_{ik} - \lambda_\omega \chi \omega'_{ik}$$

$\square_\omega^0$  étant l'opérateur dalembertien attaché à la forme métrique externe de  $F_0$ .

Aux équations (104) et (111) il faut naturellement ajouter les équations de Gauss et de Codazzi. En tenant compte de (98) et de (105) ainsi que du fait que les  $\omega'_{ik}$  sont ici des infiniment petits, les équations de Gauss donnent :

$$(112) \quad R'_{ijk} = \chi \delta_{ij} \omega'_{ik} + \chi \delta_{ik} \omega'_{ij} - \chi \delta_{ik} \omega'_{ij} - \chi \delta_{ij} \omega'_{ik},$$

avec :

$$R'_{ijk} \equiv R_{ijk} - R^0_{ijk}.$$

De même, les équations de Codazzi donnent :

$$(113) \quad \frac{\partial \omega'_{ij}}{\partial \varphi^k} - \frac{\partial \omega'_{ik}}{\partial \varphi^j} + \chi \delta_{ik} \left\{ \begin{matrix} l \\ ij \end{matrix} \right\}_{\bar{\varphi}} - \chi \delta_{ij} \left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\}_{\bar{\varphi}} = 0,$$

avec :

$$\left\{ \begin{matrix} l \\ ik \end{matrix} \right\}_{\bar{\varphi}} = \frac{1}{2} \delta^{lu} \left( \frac{\partial \gamma_{kh}}{\partial \varphi^i} + \frac{\partial \gamma_{ih}}{\partial \varphi^k} - \frac{\partial \gamma_{ik}}{\partial \varphi^h} \right).$$

Le système (104)+(111)+(112)+(113) est un système complet de 56 équations à 56 inconnues. Les solutions non-arbitraires de ce système

sont évidemment les seules qui nous intéressent, de sorte que l'on a nécessairement les conditions aux limites suivantes :

$$u=0; \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0,$$

$n$  étant la normale à la frontière  $\sigma$  du contenant de l'être mathématique non-arbitraire et  $u$  l'une quelconque des 40 inconnues  $\gamma_{ik}$ ,  $\omega'_{ik}$ ,  $T_{ik}$  et  $U_{ik}$ .

Les équations (104) et (111) permettent d'exprimer les  $\gamma_{ik}$  et les  $\omega'_{ik}$  en fonction des  $T_{ik}$  et des  $U_{ik}$ , ce qui élimine 20 inconnues. En introduisant ces expressions des  $\gamma_{ik}$  et des  $\omega'_{ik}$  dans les 20 équations de Gauss, celles-ci déterminent les 20 inconnues  $T_{ik}$  et  $U_{ik}$  sous la forme :

$$\left. \begin{matrix} T_{ik} \\ U_{ik} \end{matrix} \right\} = \left. \begin{matrix} T_{ik} \\ U_{ik} \end{matrix} \right\} (\theta^u, \sigma, x_0^i, \gamma'_g, \gamma'_\omega, z_g, z_\omega).$$

Finalement, ces expressions des  $T_{ik}$  et des  $U_{ik}$ , introduites dans les solutions de (104) et de (111), transforment les 16 équations de Codazzi, écrites en coordonnées  $\theta^u$ , en équations aux dérivées partielles

pour les 16 inconnues  $x^i(\theta^u)$ ,  $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta^i}$ ,  $x_0^i$ ,  $\gamma'_g$ ,  $\gamma'_\omega$ ,  $z_g$  et  $z_\omega$ . Quatre

des équations de Codazzi, par suite de (108), sont des équations aux dérivées partielles du second ordre déterminant les quatre inconnues  $x^i(\theta^u)$ , les valeurs aux limites (sur  $\sigma$ ) de ces inconnues pouvant d'ail-

leurs être exprimées en fonction des inconnues  $x_0^i$  et  $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta^i}$ , de même que

les valeurs des dérivées normales  $\frac{\partial x^i}{\partial n}$  sur  $\sigma$ . La détermination des

$x^i(\theta^u)$  est indispensable parce que la connaissance des  $\gamma_{ik}$  et des  $\omega'_{ik}$  ne détermine l'hypersurface  $F$  de  $E_5$  à un déplacement et à une symétrie près que si l'on connaît aussi les fonctions  $x^i(\theta^u)$ , puisque les  $dz^i$  ne

sont pas intégrables. Ces fonctions  $x^i(\theta^u, \frac{\partial \sigma}{\partial \theta^i}, x_0^i, \gamma'_g, \gamma'_\omega, z_g, z_\omega)$ , intro-

duites dans quatre autres équations de Codazzi, déterminent alors les

quatre inconnues  $\frac{\partial \sigma}{\partial \theta^i}$ , et les autres huit équations de Codazzi donnent

les valeurs qu'il faut attribuer aux huit constantes  $\gamma'_g$ ,  $\gamma'_\omega$ ,  $z_g$ ,  $z_\omega$  et  $x_0^i$  pour qu'elles soient satisfaites.

*Remarques.* 1<sup>o</sup>. Il est intéressant de remarquer que les équations (104) et (111) deviennent des équations de Laplace-Poisson quand on

peut négliger les variations des  $\gamma_{ik}$  et des  $\omega'_{ik}$  avec  $\tau$  ainsi que les termes en  $\lambda'$  et  $\lambda$ . Dans les mêmes conditions leurs solutions deviennent naturellement des «potentiels newtoniens», et des «potentiels newtoniens» attachés à la forme métrique externe de  $F$ .

2<sup>o</sup>). Quand on a fait la détermination préalable des fonctions propres non-arbitraires des opérateurs  $\square_0$  et  $\square_\omega^0$  attachés à  $F_0$  (nous ferons cette détermination dans le § suivant), les inconnues  $T_{ik}$  et  $U_{ik}$  sont données aussi par les expressions (44) et (55).

3<sup>o</sup>). Les calculs de ce § montrent la voie à suivre dans les essais d'intégration du système fondamental (19 a)+(19 b)+(25)+(26) sans aucune hypothèse restrictive sur les inconnues. On peut partir encore de la même hypersurface de base  $F_0$  que précédemment et l'on écrira aussi les relations (98) et (105), mais les  $\gamma_{ik}$  et les  $\omega'_{ik}$  ne seront plus des quantités infiniment petites par rapport aux quantités correspondantes de  $F_0$ . Les coordonnées  $\theta, \varphi, \mu, \tau$  de  $F_0$  définissent encore des coordonnées  $\theta^i$  dans  $E_5$  et sur  $F$  et les systèmes (102) et (109) restent évidemment inchangés. Par contre, il faut remplacer les systèmes (103) et (110) respectivement par :

$$(114) \quad R'_{ik} - \frac{1}{2} [(R^0 + \lambda_g^0) \gamma_{ik} + (R' + \lambda'_g) (\partial_{ik} + \gamma_{ik})] = \alpha_g T_{ik},$$

et :

$$(115) \quad S'_{ik} - \frac{1}{2} [(S^0 + \lambda_\omega^0) \omega'_{ik} + (S' + \lambda'_\omega) (\chi \partial_{ik} + \omega'_{ik})] = \alpha_\omega U_{ik},$$

12. Le spectre et les fonctions propres des opérateurs  $\square_0$  et  $\square_\omega^0$ . Le calcul du spectre des opérateurs laplaciens  $\square$  et  $\square_\omega$  dans le cas général, plus exactement la détermination des valeurs des  $\alpha$  et des  $\beta$  pour lesquelles les équations (45) et (48) possèdent quatre solutions non-arbitraires et linéairement indépendantes est très difficile quand on ne fait aucune hypothèse simplificatrice sur le contenant de l'être mathématique non-arbitraire. Bien que la véritable solution du problème posé par l'analyse de l'être mathématique non-arbitraire ne puisse être atteinte, par suite de la nature même de la question, dès que l'on introduit des hypothèses simplificatrices arbitraires, il est cependant très important dans l'interprétation physique que nous ferons plus tard des résultats de cette première partie du mémoire, de déterminer le spectre et les fonctions propres des opérateurs  $\square$  et  $\square_\omega$  comme si le contenant de l'être mathématique non-arbitraire était une hypersurface à métrique et forme simples, ou bien, ce qui revient au même, comme si

ce contenant pouvait être approché par une hypersurface simple (point de vue du problème cosmologique de la Relativité).

Nous avons vu, dans le § précédent, que l'être mathématique non-arbitraire est, *en première approximation*, un espace-temps de De Sitter-Lanzos, que nous avons désigné par  $F_0$ . Cherchons donc le spectre et les fonctions propres des opérateurs laplaciens  $\square$  et  $\square_\omega$  attachés à  $F_0$ , plus exactement cherchons les valeurs des  $\alpha$  et des  $\beta$  pour lesquelles les équations :

$$(116) \quad \square_0 \Psi_{mn} = \alpha_n \Psi_{mn},$$

et :

$$(117) \quad \square_\omega^0 \Phi_{mn} = \beta_n \Phi_{mn},$$

ont quatre solutions non-arbitraires linéairement indépendantes.

Par suite de la symétrie sphérique des sections  $\sum_0$  de  $F_0$  par les hyperplans  $\tau = \text{Const.}$ , il faut chercher des solutions de (116) qui ne dépendent que de  $\theta$  et de  $\tau$ . En posant  $\xi = \frac{\tau}{P_0}$ , cette équation devient :

$$(118) \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2} + 2 \cotg \theta \frac{\partial \Psi}{\partial \theta} - (ch^2 \xi) \frac{\partial^2 \Psi}{\partial \xi^2} - 3 (sh \xi) (ch \xi) \frac{\partial \Psi}{\partial \xi} = \alpha P_0^2 (ch^2 \xi) \Psi$$

par suite des valeurs des  $G_{ik}$  de (95) et de la forme de la fonction  $\mathbf{P}(\tau)$ . Comme on a ici les conditions (61) et (62), c'est-à-dire :

$$G_{44} = -1; \quad G_{ik} = \mathbf{P}^2(\tau) n_{ik}(\theta, \varphi, \mu) \quad \text{pour } i, k = 1, 2, 3,$$

on doit chercher des solutions de la forme :

$$(119) \quad \Psi_n = \sum_l u_n^{(l)}(\tau) v_l(\theta).$$

Le second membre de (118) peut être écrit sous la forme :

$$- P_0^2 \sum_l k_l u_n^{(l)} v_l + \alpha P_0^2 (ch^2 \xi) \Psi + P_0^2 \sum_l k_l u_n^{(l)} v_l$$

de sorte qu'on obtient pour les  $v_l(\theta)$  l'équation différentielle :

$$(120) \quad \frac{d^2 v_l}{d\theta^2} + 2 \cotg \theta \frac{dv_l}{d\theta} = - P_0^2 k_l v_l$$

qui est un cas particulier de l'équation aux dérivées partielles (65) du § 7. D'autre part, les  $u_n^{(l)}(\tau)$  seront les solutions des équations :

$$(121) \quad \frac{d^2 u_n^{(l)}}{d\xi^2} + 3 th \xi \frac{du_n^{(l)}}{d\xi} = - P_0^2 \frac{k_n ch^2 \xi + k_l}{ch^2 \xi} u_n^{(l)}.$$

Il est nécessaire d'assujettir les  $v_l(\theta)$  à la condition aux limites  $v_l(\theta)=0$  sur  $\sigma_0$ . Nous savons, d'après les résultats du § 11, que l'équation de cette frontière est  $\theta=\theta_0$ , ou bien:  $\theta=\delta_0/2\mathbf{P}_0$ , de sorte que la condition aux limites s'écrit:  $v_l(\theta)=0$  pour  $\theta=\theta_0$ . Dans le voisinage de l'origine, l'équation (120) est une équation de Bessel:

$$\frac{d^2 v_l}{d\theta^2} + \frac{2}{\theta} \frac{dv_l}{d\theta} = -\mathbf{P}_0^2 k_l v_l$$

dont les solutions bornées non-arbitraires ont la forme:

$$v_l(\theta) = \frac{1}{\theta} \sin(\mathbf{P}_0 \sqrt{k_l} \theta).$$

Les solutions bornées non-arbitraires de (120) sont donc:

$$v_l(\theta) = \frac{w_l(\theta)}{\theta} \sin(\mathbf{P}_0 \sqrt{k_l} \theta)$$

les  $w_l(\theta)$  étant des fonctions bornées qui satisfont à la condition  $w_l(0)=1$  et que l'on détermine facilement par (120) sous forme d'un développement:  $w_l = \sum b_\nu \theta^\nu$ . De plus, on doit avoir évidemment:

$$(122) \quad \sqrt{k_l} = \frac{\pi l}{\mathbf{P}_0 \theta_0} \quad (l=1, 2, 3, \dots, \infty)$$

pour que la condition aux limites  $v_l(\theta_0)=0$  soit satisfaite.

Les équations (121) ont deux solutions bornées non-arbitraires et linéairement indépendantes pour des valeurs données des indices  $n$  et  $l$ . En tenant compte de  $9-4\mathbf{P}_0^2 k_n < 0$ , ainsi que de la condition générale:

$$(123) \quad \alpha_n \Psi_{mn} \rightarrow 0 \quad \text{pour } n \rightarrow \infty$$

conséquence de (116) et de (122), on voit immédiatement que les formes asymptotiques (pour  $\tau \rightarrow +\infty$  et pour  $\tau \rightarrow -\infty$ ) de ces solutions sont les suivantes:

pour  $\tau \rightarrow +\infty$ :

$$u_n^{(1)} = \frac{1}{n^3} e^{-\frac{3\tau}{2\mathbf{P}_0}} \sin\left(\frac{\tau}{2\mathbf{P}_0} \sqrt{4\mathbf{P}_0^2 k_n - 9}\right); \quad u_n^{(2)} = \frac{1}{n^3} e^{-\frac{3\tau}{2\mathbf{P}_0}} \cos\left(\frac{\tau}{2\mathbf{P}_0} \sqrt{4\mathbf{P}_0^2 k_n - 9}\right),$$



pour  $\tau \rightarrow -\infty$  :

$$u_n^{(1)} = \frac{1}{n^3} e^{\frac{3\tau}{2P_0}} \sin\left(\frac{\tau}{2P_0} \sqrt{4P_0^2 k_n - 9}\right); \quad u_n^{(2)} = \frac{1}{n^3} e^{\frac{3\tau}{2P_0}} \cos\left(\frac{\tau}{2P_0} \sqrt{4P_0^2 k_n - 9}\right).$$

D'autre part, dans le voisinage de l'origine ( $\tau=0$ ) l'équation (121) prend la forme :

$$\frac{d^2 u_n^{(l)}}{d\xi^2} + 3\xi \frac{du_n^{(l)}}{d\xi} = -P_0^2 (k_n + k_l) u_n^{(l)},$$

et ses deux solutions bornées, non-arbitraires et linéairement indépendantes sont les deux séries :

$$u_n^{(1)} = \frac{1}{n^3} \sum_0^\infty (a_{\nu})_n^{(1)} \frac{\tau^\nu}{P_0^\nu}; \quad u_n^{(2)} = \frac{1}{n^3} \sum_0^\infty (a_{\nu})_n^{(2)} \frac{\tau^\nu}{P_0^\nu},$$

avec :

$$a_{\nu+2} = -\frac{P_0^2 (k_n + k_l) + 3\nu}{(\nu+1)(\nu+2)} a_\nu$$

et les conditions :

$$\begin{cases} (a_0)_n^{(1)} = 0, & (a_0)_n^{(2)} = 1, \\ (a_1)_n^{(1)} = P_0 \sqrt{k_n + k_l}, & (a_1)_n^{(2)} = 0. \end{cases}$$

Nous avons d'après (68) les expressions suivantes des quatre fonctions propres linéairement indépendantes et non-arbitraires du laplacien attaché à l'hypersurface de base  $F_0$  et qui correspondent à chaque valeur propre (positive) de l'opérateur  $-\Delta_3^0$  :

$$(124) \quad \begin{cases} \Psi_{1n} = \sum_l u_n^{(1)}(\tau) \frac{w_l(\theta)}{\theta} \sin(P_0 \sqrt{k_l} \theta); & \Psi_{2n} = \sum_l u_n^{(2)}(\tau) \frac{w_l(\theta)}{\theta} \sin(P_0 \sqrt{k_l} \theta) \\ \Psi_{3n} = u_n^{(n1)}(\tau) \frac{w_n(\theta)}{\theta} \sin(P_0 \sqrt{k_n} \theta); & \Psi_{4n} = u_n^{(n2)}(\tau) \frac{w_n(\theta)}{\theta} \sin(P_0 \sqrt{k_n} \theta). \end{cases}$$

Les valeurs propres  $\alpha_n$  du laplacien qui correspondent à ces fonctions propres, se déduisent de (122) et sont évidemment données par la relation :

$$(125) \quad \alpha_n = \frac{4\pi^2 n^2}{\delta_0^2} \quad (n=1, 2, \dots, \infty)$$

(avec  $\delta_0 = 2P_0 \theta_0$ ), puisque  $\alpha_l \equiv k_l$ .

La détermination des valeurs et fonctions propres ( $\beta_n$  et  $\Phi_{mn}$ ) de l'opérateur  $\square_\omega^0$  est maintenant immédiate. En effet, par suite des rela-

tions  $\Omega_{ik} = \chi G_{ik}$ , qui sont valables pour  $F_0$ , on a évidemment :

$$(126) \quad \Phi_{mn} = \Psi_{mn}$$

et :

$$(127) \quad \beta_n = \frac{1}{\chi} \alpha_n = P_0 \alpha_n = \sqrt{\frac{6}{\lambda_g^0}} \alpha_n = \frac{\lambda_{\omega}^0}{\lambda_g^0} \alpha_n.$$

Nous ferons plus loin (Chap. III, § 8) d'importantes applications de ces relations dans l'interprétation physique de la théorie.

### III — LE PROBLÈME COSMOLOGIQUE GÉNÉRALISÉ

1. Nature du problème. D'après le principe fondamental posé dès le début de ce travail et selon lequel il y a identité entre l'être mathématique non-arbitraire et l'Univers physique, il y a aussi identité entre le problème cosmologique généralisé et le problème de l'intégration complète et effective du système d'équations (19)+(25)+(26). La solution rigoureuse de ce système donnerait donc immédiatement la métrique, la forme, l'équation de la surface frontière et les coordonnées normales du contenant de l'Univers, de même que les fonctions-contenus tensorielles  $T_{ik}$  et  $U_{ik}$  et les valeurs des constantes absolues  $\alpha_{\omega}$ ,  $\lambda_{\omega}$ ,  $\alpha_g$  et  $\lambda_g$ . D'autre part, la solution approchée de système (19)+(25)++(26) que nous avons développée dans II, § 11 est aussi une solution approchée du problème cosmologique généralisé.

Indépendamment de la recherche de la solution du système fondamental (19)+(25)+(26), le problème cosmologique généralisé comporte aussi, bien entendu, l'importante question de l'interprétation physique des différentes grandeurs qui interviennent dans les équations (19)++(25)+(26) et qui ne sont pas de nature manifestement géométrique comme les  $g_{ik}$  et les  $\omega_{ik}$ , de même que l'interprétation physique des autres résultats de l'analyse de l'être mathématique non-arbitraire. Il faut cependant souligner que cette interprétation, malgré son importance évidente, est une question en quelque sorte accessoire vis-à-vis de l'intégration du système (19)+(25)+(26) et dont à la rigueur une théorie cosmologique pourrait se passer.

Nous commencerons naturellement par l'interprétation physique des équations (19 a) et (19 b), mais tout d'abord il faut indiquer, d'après le principe de l'identité de l'existence mathématique non-arbitraire et de l'existence physique, les équivalents cosmologiques de quelques propriétés générales de l'être mathématique non-arbitraire :

II, § 3: Le contenant de l'Univers est un espace de Riemann à quatre dimensions et de classe un.

II, §§ 7 et 8: La métrique du contenant de l'Univers est hyperbolique normale. En d'autres termes: ce contenant est un espace-temps (trois dimensions spatiales et une dimension temporelle). La métrique externe du contenant est aussi hyperbolique normale.

La frontière de l'espace-temps est un lieu de lignes coordonnées temporelles orthogonales à des variétés spatiales (tridimensionnelles à métrique interne et externe elliptique) de cet espace-temps.

L'espace-temps est illimité dans les deux sens le long des lignes coordonnées temporelles.

II, § 11: L'espace-temps réel est, en première approximation, un espace-temps de De Sitter-Lanzos à courbure moyenne constante.

2. Gravitation et « matière ». L'interprétation physique du système (19 a) ne peut faire aucun doute si on le compare au système des équations d'Einstein du champ de gravitation. La forme des équations d'Einstein est en effet la même que celle des équations (19 a). Il y a cependant entre les équations d'Einstein et les équations (19 a) une différence essentielle: c'est que dans les premières les composantes du tenseur  $T_{ik}$  d'énergie-quantité de mouvement doivent être considérées comme des données à priori du problème cosmologique parce que les équations d'Einstein ne forment pas un système complet, en ce sens qu'elles ne permettent pas de déterminer la métrique et la forme du contenant de l'Univers ainsi que son contenu  $T_{ik}$ . Par contre, dans nos équations (19 a), qui ne sont qu'une partie du système complet (19 a) + (19 b) + (25) + (26), les composantes du tenseur  $T_{ik}$  peuvent et doivent être considérées comme des inconnues du problème, au même titre que les  $g_{ik}$  et les  $\omega_{ik}$ . Cependant, l'interprétation physique du système (19 a) est évidente. Le tenseur  $T_{ik}$  qui figure dans ces équations est forcément le tenseur d'énergie-quantité de mouvement, tandis que les  $g_{ik}$  déterminent, comme en Relativité générale, le champ de gravitation. De même, la constante  $\kappa_g$  ne peut être que la constante de la gravitation et  $\lambda_g$  la constante cosmologique d'Einstein. Leurs valeurs ne sont pas arbitraires et résultent de l'intégration des équations (19 a, b) + (25) + (26).

Nous ne développerons pas ici les conséquences des équations (19 a) qu'on trouve dans tout traité sur la Relativité générale. Nous nous bornerons à remarquer que les relations de conservation:

$$\frac{\partial T^{ik}}{\partial x^k} = 0,$$

auxquelles satisfait le tenseur d'énergie-quantité de mouvement, expriment d'une part la conservation de l'énergie (en posant  $i=4$  dans les relations précédentes) et d'autre part la conservation de la quantité de mouvement (Impulsion) (en posant  $i=1, 2, 3$ ) Nous savons d'ailleurs (II, § 6) que le tenseur d'énergie-quantité de mouvement peut être exprimé en fonction de certaines fonctions-contenus de base  $\Psi_{mn}$  qui sont les fonctions propres de l'opérateur laplacien. On peut donc soupçonner qu'il doit y avoir un rapport étroit entre les valeurs propres  $\alpha_n$  de cet opérateur et l'énergie. Pour préciser ce rapport, considérons la contribution des fonctions propres d'indice  $n$  (relatives à la valeur propre  $\alpha_n$  du laplacien) à la somme des composantes diagonales de  $T_{ik}$ :

$$\frac{1}{2} \sum_j^4 T_{jj} = \Psi_{mn}^+ \epsilon_n^j \frac{\partial \Psi_n^m}{\partial \varphi^j} - \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi^j} \epsilon_n^j \Psi_n^m,$$

ce qui peut s'écrire comme suit, grâce aux équations (38) et (43):

$$\frac{1}{2} \sum_j^4 T_{jj} = -\sqrt{\alpha_n} (I_1)_n,$$

$(I_1)_n$  étant l'invariant défini dans le tableau (79). Étant donnée la signification de  $\sum T^{ij}$  on voit que  $-\sqrt{\alpha_n} (I_1)_n$  est la contribution de la valeur propre  $\alpha_n$  du laplacien à la densité d'énergie en un point de l'Univers. Nous verrons d'ailleurs plus tard que les  $\sqrt{\alpha_n}$  sont (à un facteur constant près que nous apprendrons à déterminer) les masses propres cosmologiques des corpuscules élémentaires de l'Univers.

Considérons maintenant les vecteurs  $V_n^i$  définis aussi dans le tableau (79). On sait que ces vecteurs sont conservatifs:

$$\frac{\partial V_n^i}{\partial \varphi^i} = 0.$$

Comme nous avons déjà une relation de conservation pour l'énergie, il faut interpréter la relation précédente en disant qu'elle est une équation de continuité généralisée, de sorte que  $\sqrt{\alpha_n} V_n^i$  est la contribution de la valeur propre  $\alpha_n$  du laplacien au courant de «masse cosmologique» (cf. les résultats du § 8 de ce Chapitre).

Pour trouver aussi la signification physique du vecteur  $W_n^i$ , remarquons que l'on a:

$$\frac{\partial W_n^i}{\partial \varphi^i} = -2\sqrt{\alpha_n} (I_2)_n.$$

Cette relation est analogue (en coordonnées  $\varphi^i$ ) à la relation d'Uhlenbeck et Laporte sur la divergence du vecteur densité de spin dans la mécanique de Dirac. On doit donc interpréter  $W_n^i$  comme la contribution de la valeur propre  $\alpha_n$  du laplacien au vecteur spin généralisé  $W_i = \sum_n W_n^i$  et la fonction  $-2\sqrt{\alpha_n}(I_2)_n$  est donc la contribution de  $\alpha_n$  à l'intensité des sources du vecteur spin généralisé.

En ce qui concerne le tenseur antisymétrique  $M_n^{ik}$ , nous lui accordons la signification d'un tenseur des moments de «rotation» et de «translation»<sup>1</sup> et en déduisons deux vecteurs d'espace  $\vec{\pi}_n$  et  $\vec{\mu}_n$  en posant:

$$(128) \quad \begin{cases} \pi_n^1 = \frac{1}{2} M_n^{23}; & \pi_n^2 = \frac{1}{2} M_n^{31}; & \pi_n^3 = \frac{1}{2} M_n^{12}, \\ \mu_n^1 = \frac{1}{2} M_n^{14}; & \mu_n^2 = \frac{1}{2} M_n^{24}; & \mu_n^3 = \frac{1}{2} M_n^{34}. \end{cases}$$

Affectons d'un indice  $s$  les opérateurs d'espace, désignons par une flèche les vecteurs d'espace et posons :

$$(129) \quad \begin{cases} P_n^k = \frac{i}{2} \left( \frac{\partial \Psi_{mn}^+}{\partial \varphi^k} \Psi_n^m - \Psi_{mn}^+ \frac{\partial \Psi_n^m}{\partial \varphi^k} \right) \\ \vec{\Lambda}_n = B_n^{231} \vec{u}^1 + B_n^{314} \vec{u}^2 + B_n^{124} \vec{u}^3; & \Lambda_n^4 = B_n^{123} \end{cases}$$

$\vec{u}^1, \vec{u}^2, \vec{u}^3$  étant les vecteurs unitaires des axes  $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$ . Les relations (84) et (88) s'écrivent alors comme suit:

$$(130) \quad \begin{cases} \frac{\partial \vec{\mu}_n}{\partial \varphi^4} - \text{rot}_s \vec{\pi}_n = i\sqrt{\alpha_n} \vec{V}_n - \vec{P}_n; & \text{div}_s \vec{\mu}_n = i\sqrt{\alpha_n} V_n^4 - P_n^4, \\ \frac{\partial \vec{\pi}_n}{\partial \varphi^4} + \text{rot}_s \vec{\mu}_n = \vec{\Lambda}_n; & \text{div}_s \vec{\pi}_n = \Lambda_n^4, \end{cases}$$

et les relations (90) prennent la forme :

$$(131) \quad \begin{cases} \vec{\mu}_n = \text{grad}_s A_n^4 - \frac{\partial \vec{A}_n}{\partial \varphi^4} + \vec{B}_n^4 \\ \vec{\pi}_n = \text{rot}_s \vec{A}_n + \vec{B}_n \end{cases}$$

avec :

$$(132) \quad \begin{cases} \vec{B}_n = B_n^{23} \vec{u}^1 + B_n^{31} \vec{u}^2 + B_n^{12} \vec{u}^3 \\ \vec{B}_n^4 = B_n^{14} \vec{u}^1 + B_n^{24} \vec{u}^2 + B_n^{34} \vec{u}^3 \end{cases}$$

<sup>1</sup> On peut aussi interpréter  $M_n^{ik}$  comme étant les tenseurs du «champ mésique» (forces nucléaires). Nous développerons de point ce vue dans un travail en préparation.

Il va de soi que l'on peut assujettir le vecteur d'Univers  $A_n^i$  (vecteur «potentiel des moments») à la condition (92 a) qui s'écrit avec les notations actuelles :

$$(133) \quad \frac{\partial A_n^i}{\partial \varphi^i} + \operatorname{div}_s \vec{A}_n = 0,$$

et l'on a aussi la relation (93).

Le système (130)+(131)+(133) est formellement égal au système des équations électromagnétiques pour un milieu diélectrique, mais il est essentiel de remarquer que toutes les grandeurs qui interviennent dans ces équations (130), (131) et (133) sont formées avec les fonctions propres de l'opérateur laplacien dont les valeurs propres sont, comme nous le montrerons plus loin, les masses propres des corpuscules élémentaires de l'Univers. Le véritable système d'équations électromagnétiques doit donc être formé avec d'autres fonctions-contenus de l'être mathématique non-arbitraire.

**3. Le champ électromagnétique.** Pour les raisons que nous indiquerons un peu plus loin, nous interprétons le tenseur symétrique qui figure aux seconds membres des équations (19 b) comme étant un tenseur d'énergie-quantité de mouvement électromagnétique, qu'il ne faut cependant pas confondre avec un tenseur de Maxwell généralisé. Dans ces conditions, les équations (19 b), qui sont le «pendant» des équations (19 a) du champ de gravitation, expriment l'influence des contenus électromagnétiques de l'Univers sur sa *forme* (c'est-à-dire sur sa métrique externe rapportée à l'espace pseudo euclidien à cinq dimensions où l'Univers peut être plongé), de même que les équations (19 a) expriment l'influence des contenus «matériels» de l'Univers sur sa métrique interne.

Comme les  $g_{ik}$  de la forme métrique interne décrivent le champ de gravitation, on doit admettre que les  $\omega_{ik}$  de la forme métrique externe décrivent les «forces électromagnétiques». Considérons un corpuscule électrisé se déplaçant sous l'action d'un champ électromagnétique. L'équation de sa ligne d'Univers sera donc l'équation des lignes «géodésiques» qui correspondent à la forme métrique externe (7), c'est-à-dire :

$$(134) \quad \frac{d^2 x^i}{d\Omega^2} = - \left[ \begin{matrix} i \\ jk \end{matrix} \right]_{\Omega} \frac{dx^j}{d\Omega} \frac{dx^k}{d\Omega}.$$

Considérons le calcul bien connu qui permet de déduire, comme une première approximation, les équations newtoniennes du mouvement et

l'équation de Laplace-Poisson des équations du champ de gravitation d'Einstein (ou, ce qui revient au même, des équations (19 a)). Si la métrique externe est quasi-statique, ce calcul peut être appliqué sans changement aux équations (19 b) et aux équations (134) et donne les résultats suivants :

1°. Les équations des géodésiques de la forme métrique externe deviennent :

$$(a) \quad \frac{d^2 q^i}{dt^2} = - \frac{c^2}{2} \frac{\partial \omega_{44}}{\partial q^i}, \quad (x^4 = ct)$$

2°. Les équations (19 b) donnent :

$$(b) \quad \frac{\partial^2 \omega_{44}}{\partial q^{12}} + \frac{\partial^2 \omega_{44}}{\partial q^{22}} + \frac{\partial^2 \omega_{44}}{\partial q^{32}} = \chi \varkappa_{\omega} U - \lambda_{\omega} \chi$$

puisque l'on a ici  $\omega_{ik} = \chi g_{ik} + \omega'_{ik}$ ,  $\chi$  étant une constante convenablement choisie et  $\omega'_{ik}$  des petites quantités par rapport aux  $\omega_{ik}$ . Il faut remarquer que ces équations sont écrites en coordonnées géodésiques locales  $q^i$  relatives à la métrique externe. Elles ne deviennent donc comparables aux équations classiques pour le champ électrostatique que si l'on a :

$$(135) \quad \omega_{ik} = \chi g_{ik}, \quad \text{pour } i, k = 1, 2, 3$$

car alors (b) devient :

$$(136) \quad \frac{\partial^2 \omega_{44}}{\partial \zeta^{12}} + \frac{\partial^2 \omega_{44}}{\partial \zeta^{22}} + \frac{\partial^2 \omega_{44}}{\partial \zeta^{32}} = \chi^2 \varkappa_{\omega} U - \lambda_{\omega} \chi^2$$

et les (a) prennent la forme :

$$(137) \quad \frac{d^2 \zeta^i}{dt^2} = - \frac{c^2}{2\chi} \frac{\partial \omega_{44}}{\partial \zeta^i}$$

Les équations (136) sont les équations du mouvement du corpuscule électrisé sous l'action du champ électrostatique pur dont le potentiel est  $\frac{c^2 \omega_{44}}{2\chi}$ ; l'équation (136) est l'équation de Laplace-Poisson pour ce

champ de Coulomb. Le fait que le champ électrostatique satisfait aux équations (136) et (137) prouve que la métrique externe de l'espace-temps satisfait presque rigoureusement aux conditions (135), de sorte que les lignes de courbure des variétés tridimensionnelles  $V_3$  à métrique interne et externe elliptique sont « presque indéterminées ». Remarquons

que la constante  $\alpha_\omega$  des équations (19 b) est, d'après l'équation (136), la « constante de Coulomb » du champ électrostatique, tandis que  $\chi \alpha_\omega U$  représente, dans les limites de l'approximation qui permet de passer de (19 b) à (136), la densité de charge électrique, en un point des  $V_\omega$ , multipliée par un facteur constant que nous apprendrons à déterminer.

Le tenseur  $U^{ik}$  satisfait, comme on sait, aux relations de conservation :

$$\frac{\partial U^{ik}}{\partial x^k} = 0.$$

Comme  $U^{ik}$  n'est pas le tenseur de Maxwell, nous dirons que les relations précédentes expriment la conservation de l'énergie-quantité de mouvement électromagnétiques externes. Nous savons d'ailleurs (II, § 6) que le tenseur  $U^{ik}$  peut être exprimé en fonction de certaines fonctions-contenus de base  $\Phi^{mn}$  qui sont les fonctions propres de l'opérateur laplacien  $\Delta_\omega$  relatif à la forme métrique externe. Il doit donc y avoir un rapport étroit entre les valeurs propres  $\beta_n$  de cet opérateur et l'énergie électrique qui intervient dans  $U^{ik}$ . Pour préciser ce rapport, considérons la contribution des fonctions propres d'indice  $n$  (relative à la valeur propre  $\beta_n$  de  $\Delta_\omega$ ) à la somme des composantes diagonales de  $U_n^{ik}$  :

$$\frac{1}{2} \sum_1^4 U_n^{jj} = \Phi_{mn}^+ \epsilon_{nq}^j \frac{\partial \Phi_n^m}{\partial q_j} - \frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q_j} \epsilon_{nq}^j \Phi_n^m,$$

ce qui peut s'écrire comme suit, grâce aux équations (50) et (54) :

$$\frac{1}{4} \sum_1^4 U_n^{jj} = -\sqrt{\beta_n} (I_1^\omega)_n,$$

$(I_1^\omega)_n$  étant l'invariant défini dans le tableau (80). Étant donnée la signification de  $\sum U^{jj}$  on voit que  $-\sqrt{\beta_n} (I_1^\omega)_n$  est la contribution de la valeur propre  $\beta_n$  de  $\Delta_\omega$  à la densité d'énergie électromagnétique externe en un point de l'Univers. Nous verrons d'ailleurs que les  $\sqrt{\beta_n}$  sont (à un facteur constant près que nous déterminerons) les charges propres (cosmologiques) des corpuscules élémentaires de l'Univers.

Considérons maintenant les vecteurs  $(V_\omega)_n^i$  définis dans (80). On sait que ces vecteurs sont conservatifs :

$$\frac{\partial (V_\omega)_n^i}{\partial q^i} = 0.$$



Comme nous avons déjà une relation pour la conservation de l'énergie électromagnétique externe, il faut interpréter ce résultat en disant qu'il s'agit d'une «équation de continuité» généralisée exprimant la conservation de l'électricité, de sorte que  $\sqrt{\varepsilon_n}(V_\omega)_n^i$  doit représenter la contribution de la valeur propre  $\beta_n$  de  $\Delta_\omega$  au «courant électrique» total d'Univers. (Voir le § 8 de ce Chapitre).

Quelle sera maintenant la contribution de  $\beta_n$  au tenseur antisymétrique du champ électromagnétique total? Ce ne peut être que le tenseur antisymétrique  $(M_\omega)_n^{ik}$  défini dans (80). De ce tenseur nous déduisons donc comme suit deux trivecteurs réels d'espace qui représentent le champ électrique partiel  $\vec{E}_n$  et le champ magnétique partiel  $\vec{H}_n$  qui correspondent à la valeur propre  $\beta_n$  de  $\Delta_\omega$ :

$$(138) \quad \begin{cases} H_n^1 = -\frac{i}{2}(M_\omega)_n^{23}; & H_n^2 = -\frac{i}{2}(M_\omega)_n^{31}; & H_n^3 = -\frac{i}{2}(M_\omega)_n^{12} \\ E_n^1 = \frac{1}{2}(M_\omega)_n^{14}; & E_n^2 = \frac{1}{2}(M_\omega)_n^{24}; & E_n^3 = \frac{1}{2}(M_\omega)_n^{34}. \end{cases}$$

Les relations (85) et (89) donnent alors avec ces notations:

$$(139) \quad \begin{cases} i \frac{\partial \vec{E}_n}{\partial q^i} - \text{rot}_\omega \vec{H}_n = \sqrt{\varepsilon_n}(\vec{V}_\omega)_n + (\vec{P}_\omega)_n; & \text{div}_\omega \vec{E}_n = i\sqrt{\varepsilon_n}(V_\omega)_n^4 + i(P_\omega)_n^4 \\ i \frac{\partial \vec{H}_n}{\partial q^i} + \text{rot}_\omega \vec{E}_n = (\vec{\Lambda}_\omega)_n; & \text{div}_\omega \vec{H}_n = i(\Lambda_\omega)_n^4, \end{cases}$$

où nous avons désigné par l'indice  $\omega$  les opérateurs d'espace formés avec les  $q^i$  et posé:

$$(140) \quad \begin{cases} (P_\omega)_n^k = -\frac{1}{2} \left( \frac{\partial \Phi_{mn}^+}{\partial q^k} \Phi_n^m - \Phi_{mn}^+ \frac{\partial \Phi_n^m}{\partial q^k} \right) \\ (\vec{\Lambda}_\omega)_n = (B_\omega)_n^{234} \vec{u}_q^1 + (B_\omega)_n^{314} \vec{u}_q^2 + (B_\omega)_n^{124} \vec{u}_q^3; & (\Lambda_\omega)_n^4 = -i(B_\omega)_n^{123}, \end{cases}$$

$\vec{u}_q^1, \vec{u}_q^2, \vec{u}_q^3$  étant les vecteurs unitaires des axes  $q^1, q^2, q^3$ . D'autre part, les relations (91) s'écrivent maintenant:

$$(141) \quad \begin{cases} \vec{E}_n = \nabla_\omega (A_\omega)_n^4 - \frac{\partial (\vec{A}_\omega)_n}{\partial q^4} + (\vec{B}_\omega)_n^4 \\ \vec{H}_n = -i[\text{rot}_\omega (\vec{A}_\omega)_n + (\vec{B}_\omega)_n], \end{cases}$$

avec :

$$(\vec{B}_\omega)_n = (B_\omega)_n^{23} \vec{u}_q^1 + (B_\omega)_n^{31} \vec{u}_q^2 + (B_\omega)_n^{12} \vec{u}_q^3; \quad (\vec{B}_\omega)_n^4 = (B_\omega)_n^{44} \vec{u}_q^1 + (B_\omega)_n^{24} \vec{u}_q^2 + (B_\omega)_n^{34} \vec{u}_q^3$$

et il va de soi qu'on peut assujettir le quadrivecteur  $(A_\omega)_n^k$  potentiel du champ électromagnétique aux conditions (92 b) et (94) qui s'écrivent avec les notations actuelles :

$$(142 a, b) \quad \frac{\partial (A_\omega)_n^i}{\partial q^4} + \text{div}_\omega (A_\omega)_n = 0; \quad \square_\omega (A_\omega)_n^k = i\sqrt{\beta_n} (V_\omega)_n^k + i(P_\omega)_n^k.$$

Le système (139) + (141) + (142 a), dans lequel toutes les fonctions sont formées avec les fonctions propres  $\Phi^{mn}$  de l'opérateur laplacien  $\Delta_\omega$  relatif à la forme métrique externe (7), est le système d'équations du champ électromagnétique partiel que correspond à la valeur propre  $\beta_n$ . Le champ électromagnétique total s'obtient naturellement par une simple sommation par rapport à l'indice  $n$ .

Les équations électromagnétiques que nous venons de déduire sont écrites en coordonnées  $q^i$ . Cependant, comme les relations (135) sont très sensiblement réalisées dans l'espace, on peut, en première approximation, remplacer les opérateurs  $\text{rot}_\omega$  et  $\text{div}_\omega$  par les opérateurs  $\text{rot}_s$  et  $\text{div}_s$ . Une comparaison de nos équations électromagnétiques aux équations de Maxwell, montre alors que, conformément à l'interprétation que nous avons donnée plus haut des vecteurs  $(V_\omega)_n^i$ ,  $\sqrt{\beta_n} (\vec{V}_\omega)_n$  est bien la contribution de la valeur propre  $\beta_n$  de l'opérateur  $\Delta_\omega$  au courant électrique total d'espace, tandis que  $\sqrt{\beta_n} (V_\omega)_n^4$  est la contribution de  $\beta_n$  à la densité de charge électrique en un point de l'espace. D'autre part, on voit que  $(\vec{P}_\omega)_n$  et  $i(P_\omega)_n^4$  sont la contribution de  $\beta_n$  à la «polarisation électrique» intégrale de l'Univers, tandis que  $(\vec{\Lambda}_\omega)_n$  et  $i(\Lambda_\omega)_n^4$  doivent être interprétés comme représentant l'«aimantation» intégrale de l'Univers. On déduit d'ailleurs facilement des équations en  $\text{rot}_\omega \vec{H}_n$  et  $\text{div}_\omega \vec{E}_n$ , grâce à (83), la relation qui exprime la conservation de la polarisation électrique :

$$(143) \quad \frac{\partial (P_\omega)_n^4}{\partial q^4} + \text{div}_\omega (\vec{P}_\omega)_n = 0,$$

tandis que les équations en  $\text{rot}_\omega \vec{E}_n$  et  $\text{div}_\omega \vec{H}_n$  conduisent immédiatement à la conservation de l'aimantation :

$$(144) \quad \frac{\partial (\Lambda_\omega)_n^4}{\partial q^4} + \text{div}_\omega (\vec{\Lambda}_\omega)_n = 0.$$

Il est intéressant de faire apparaître dans les équations (139) la contribution  $(\vec{\mathcal{E}}_e)_n$  de  $\beta_n$  à l'induction électrique  $\vec{\mathcal{E}}_e$  ainsi que la contribution  $(\vec{\mathcal{E}}_m)_n$  de  $\beta_n$  à l'induction magnétique. Pour cela, il suffit de poser :

$$(145) \quad i \frac{\partial \vec{\mathcal{P}}_n}{\partial q^4} = -(\vec{P}_\omega)_n; \quad i \frac{\partial \vec{\mathcal{A}}_n}{\partial q^4} = -(\vec{\Lambda}_\omega)_n.$$

On a alors :

$$(146) \quad (\vec{\mathcal{E}}_e)_n = \vec{E}_n + \vec{\mathcal{P}}_n; \quad (\vec{\mathcal{E}}_m)_n = \vec{H}_n + \vec{\mathcal{A}}_n.$$

et les équations (139) prennent la forme suivante, grâce aux relations (143) et (144) :

$$(147) \quad \begin{cases} i \frac{\partial (\vec{\mathcal{E}}_e)_n}{\partial q^4} - \text{rot}_\omega \vec{H}_n = \sqrt{\varepsilon_n} (\vec{V}_\omega)_n; & \text{div}_\omega (\vec{\mathcal{E}}_e)_n = i \sqrt{\beta_n} (V_\omega)_n^4, \\ i \frac{\partial (\vec{\mathcal{E}}_m)_n}{\partial q^4} + \text{rot}_\omega \vec{E}_n = 0; & \text{div}_\omega (\vec{\mathcal{E}}_m)_n = 0. \end{cases}$$

Nous avons déjà écrit plus haut (équation 142 b)) l'équation de propagation des potentiels  $(A_\omega)_n^i$ . Un calcul facile donne aussi les équations de propagation des champs  $\vec{E}_n$  et  $\vec{H}_n$  sous la forme :

$$(148) \quad \begin{cases} \square_\omega \vec{E}_n = i \nabla_\omega [\sqrt{\varepsilon_n} (V_\omega)_n^i + (P_\omega)_n^i] - \text{rot}_\omega (\vec{\Lambda}_\omega)_n - i \frac{\partial}{\partial q^4} [\sqrt{\beta_n} (\vec{V}_\omega)_n + (\vec{P}_\omega)_n] \\ \square_\omega \vec{H}_n = i \nabla_\omega (\Lambda_\omega)_n^i - i \frac{\partial (\vec{\Lambda}_\omega)_n}{\partial q^4} + \text{rot}_\omega [\sqrt{\varepsilon_n} \vec{V}_\omega)_n + (\vec{P}_\omega)_n] \end{cases}$$

Ces équations se réduisent aux équations habituelles pour le «vide» lorsque le courant électrique, la susceptibilité électrique et l'aimantation sont nuls.

Considérons maintenant les fonctions :

$$\vec{S}_n = \vec{E}_n \times \vec{H}_n; \quad J_n = -\sqrt{\beta_n} \vec{E}_n \cdot (\vec{V}_\omega)_n.$$

( $\vec{S}_n$  est le vecteur de Poynting et  $J_n$  la «chaleur de Joule»). Désignons par  $\xi^j$  une longueur mesurée sur la géodésique de (7) issue d'un point tangentiellement à  $q^j$ , et formons les quantités suivantes :

(149)

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{L}_n^{44} &= \frac{i}{2} [\vec{E}_n \cdot (\vec{\mathcal{E}}_e)_n + \vec{H}_n \cdot (\vec{\mathcal{E}}_m)_n] + \int_{\xi_0^4}^{\xi_1^4} \left\{ J_n + \right. \\ &+ \frac{i}{2} \left[ \vec{E}_n \cdot \frac{\partial (\vec{\mathcal{E}}_e)_n}{\partial q^4} - \frac{\partial \vec{E}_n}{\partial q^4} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_e)_n \right] + \frac{i}{2} \left[ \vec{H}_n \cdot \frac{\partial (\vec{\mathcal{E}}_m)_n}{\partial q^4} - \frac{\partial \vec{H}_n}{\partial q^4} \cdot (\vec{\mathcal{E}}_m)_n \right] \left. \right\} d\xi^4, \\ \mathcal{L}_n^{j4} &= \mathcal{L}_n^{4j} = (\vec{E}_n \times \vec{H}_n)^j = S_n^j \quad (\text{pour } j=1, 2, 3) \\ \mathcal{L}_n^{jj} &= i \left[ (E_n^j)^2 + (H_n^j)^2 - \frac{E_n^2 + H_n^2}{2} \right] - i \int_{\xi_0^j}^{\xi_1^j} \left\{ \sqrt{\beta_n} [\vec{E}_n i (V_\omega)_n + \vec{H}_n \times (\vec{V}_\omega)_n] + \right. \\ &+ \left. \vec{E}_n i (P_\omega)_n - \vec{E}_n \times (\vec{\Lambda}_\omega)_n + \vec{H}_n i (\Lambda_\omega)_n + \vec{H} \times (\vec{P}_\omega)_n \right\}^j d\xi^j \quad (\text{pour } j=1, 2, 3) \\ \mathcal{L}_n^{ik} &= \mathcal{L}_n^{ki} = i [E_n^j E_n^k + H_n^j H_n^k] \quad (\text{pour } k, j=1, 2, 3; k \neq j). \end{aligned} \right.$$

Ces fonctions  $\mathcal{L}_n^{ik}$  satisfont aux relations de conservation :

$$(150) \quad \frac{\partial \mathcal{L}_n^{ik}}{\partial q^k} = 0,$$

qui expriment, pour  $i=4$ , la conservation de l'énergie électromagnétique «interne» et pour  $i=1, 2, 3$  la conservation de la quantité de mouvement (ou impulsion) électromagnétique «interne». Lorsque les inductions électriques et magnétiques se confondent avec les champs, les  $\mathcal{L}_n^{ik}$  se réduisent aux composantes du tenseur électromagnétique de Maxwell pour le «vide».

Considérons finalement la «force de Laplace-Lorentz»  $\vec{F}$  qu'on peut mettre sous la forme suivante, en écrivant seulement la contribution de  $\beta_n$  :

$$(151) \quad F_n^i = \sqrt{\beta_n} (V_\omega)_{nk} (M'_\omega)^{ik}, \quad (i=1, 2, 3, 4)$$

$(M'_\omega)^{ik}$  étant le tenseur antisymétrique réel suivant :

$$(152) \quad \left\{ \begin{aligned} (M'_\omega)_n^{14} &= E_n^1; & (M'_\omega)_n^{24} &= E_n^2; & (M'_\omega)_n^{34} &= E_n^3; \\ (M'_\omega)_n^{23} &= -(\mathcal{E}_m)_n^1; & (M'_\omega)_n^{31} &= -(\mathcal{E}_m)_n^2; & (M'_\omega)_n^{12} &= -(\mathcal{E}_m)_n^3. \end{aligned} \right.$$

L'expression (151) de la contribution de  $\beta_n$  à la force de Laplace-Lorentz peut encore s'écrire comme suit :

$$(153) \quad \left\{ \begin{aligned} F_n^4 &= -\sqrt{\beta_n} (\vec{V}_\omega)_n \cdot \vec{E}_n = J_n \\ \vec{F}_n &= \sqrt{\beta_n} (V_\omega)_n^i \vec{E}_n - \sqrt{\beta_n} (\vec{V}_\omega)_n \times (\vec{\mathcal{E}}_m)_n. \end{aligned} \right.$$

Les valeurs propres  $\beta_n$  de l'opérateur  $\Delta_\omega$  tendent vers l'infini quand  $n$  augmente indéfiniment; par contre, les fonctions propres  $\Phi^{mn}$  tendent vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$  plus vite que les  $\beta_n$  ne tendent vers 0. Toutes les fonctions précédentes, que nous avons formé avec les  $\Phi_{mn}$ , tendent donc vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ ; ce sont donc seulement les premiers  $\beta_n$  du spectre de l'opérateur  $\Delta_\omega$  qui contribuent d'une manière sensible à la valeur d'une fonction formée avec les  $\Phi^{mn}$  et comportant une sommation par rapporte à l'indice  $n$  (valeurs totales). Les  $\Phi^{mn}$ , pour des valeurs même relativement petites de  $n$ , n'ont donc que très peu d'influence, aussi bien sur la métrique externe de l'Univers (c'est-à-dire sur sa forme relativement à l'espace pseudo-euclidien à cinq dimensions où il peut être plongé) que sur le champ électrique et le champ magnétique. On peut répéter ces remarques au sujet des fonctions propres  $\Psi^{mn}$  du laplacien, qui tendent aussi vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ . Le champ de gravitation (et la métrique interne de l'Univers) dépendent donc presque seulement des premiers termes spectraux de l'opérateur laplacien. Ce sont là des circonstances qu'il est essentiel de ne pas perdre de vue pour bien comprendre la signification des formules de notre théorie cosmologique.

4. Les masses propres des corpuscules élémentaires. Considérons un opérateur complet. Nous avons expliqué dans II, § 10 que ses valeurs propres sont des propriétés intrinsèques de points singuliers du contenant de l'être mathématique non-arbitraire, les points singuliers étant précisément ceux auxquels doivent être attachés les valeurs propres des opérateurs complets. Nous interprétons physiquement les points singuliers en disant qu'ils sont *les corpuscules élémentaires de l'Univers*. Deux importantes questions se posent alors immédiatement :

1°. Quel est l'opérateur complet dont les valeurs propres représentent la propriété intrinsèque la plus importante des corpuscules élémentaires, c'est-à-dire leur masse propre ?

2°. Quelle est la condition analytique nécessaire et suffisante pour déterminer a priori les points de l'espace-temps où se trouvent les corpuscules élémentaires ?

Occupons-nous d'abord de la première question. Considérons l'équation d'onde du second ordre que la mécanique ondulatoire déduit pour tous les corpuscules élémentaires libres. Cette équation s'écrit avec nos notations :

$$(154) \quad \square \Psi_{mn} = \frac{4\pi^2 c^2}{h^2} (m_0)_n^2 \Psi_{mn},$$

$c$  étant le rapport des unités électromagnétique et électrostatique de charge électrique,  $h$  la constante de Planck et  $(m_0)_n$  la masse propre d'un corpuscule élémentaire. Comparons cette équation à notre équation (56) :

$$(56) \quad \square \Psi_{mn} = \alpha_n \Psi_{mn}$$

On voit donc immédiatement qu'on est en droit de poser :

$$(155) \quad \alpha_n = \frac{4\pi^2 c^2}{h^2} (m_0)_n^2,$$

c'est-à-dire :

$$(156) \quad (m_0)_n = \frac{h}{2\pi c} \sqrt{\alpha_n},$$

dans la théorie cosmologique s'il est possible d'introduire dans cette théorie, d'une manière absolument non-arbitraire, les deux constantes  $c$  et  $h$ . Or, nous verrons un peu plus loin (§ 7) que cela est possible en effet.

D'après (156) les masses propres des corpuscules élémentaires sont proportionnelles aux racines des valeurs propres de l'opérateur laplacien relatif à la métrique interne (2) de l'Univers. Or, nous savons (§ 7, chap II) qu'il y a une infinité dénombrable de valeurs propres du laplacien pour chacune desquelles il existe quatre fonctions propres linéairement indépendantes. *Les corpuscules élémentaires de l'Univers ont donc une infinité dénombrable de masses propres, entièrement déterminées par la métrique interne et la forme de la frontière de l'espace-temps*, d'après les résultats fondamentaux du § 7, chap II. Cette importante liaison « macrocosme-microcosme » sera développée plus loin (§ 8) jusqu'aux résultats numériques. La relation (156) montre aussi que *les masses propres des corpuscules élémentaires augmentent indéfiniment quand  $n \rightarrow \infty$* , puisque  $\alpha_n$  tend aussi vers l'infini pour  $n \rightarrow \infty$ . Cependant, *la contribution des corpuscules élémentaires à la métrique interne de l'Univers et au champ de gravitation diminue et tend très vite vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$* , puisque tel est le cas des fonctions propres  $\Psi_{mn}$  du laplacien dont dépend exclusivement, d'après (44), le tenseur  $T_{ik}$  d'énergie-quantité de mouvement des équations (19 a). Cette circonstance est l'une des principales raisons qui expliquent pourquoi les corpuscules élémentaires de grande masse propre sont restés jusqu'ici inaperçus (cf. les résultats du § 8).

Il est utile de remarquer, avant de finir ce paragraphe, qu'en multipliant, d'après (155), les composantes (44) du tenseur d'énergie-quantité

tité de mouvement par le coefficient constant  $\frac{hc}{2\pi}$  on obtient une expression de ce tenseur ayant les dimensions physiques d'une énergie. D'autre part, en multipliant les vecteurs  $V_n^i$ , étudiés dans les §§ 10 du Chap II et 2 du Chap III, par les coefficients  $(m_0)_n c = \frac{h}{2\pi} \sqrt{\alpha_n}$ , on obtient la contribution de  $\sqrt{\alpha_n}$  au «courant de masse» avec les dimensions classiques d'une quantité de mouvement.

5. La propagation des actions électromagnétiques et les lignes de «longueur» nulle associées aux formes métriques externe et interne. Considérons les équations de propagation des champs ou des potentiels électromagnétiques déduites dans le § 3, par exemple l'équation (142 b) de propagation des potentiels :

$$\square_{\omega} (A_{\omega})_n^k = i\sqrt{\beta_n} (V_{\omega})_n^k + i(P_{\omega})_n^k.$$

L'équation de propagation des potentiels du champ électromagnétique total dérive de celle-ci par une simple sommation par rapport à l'indice  $n$  :

$$(157) \quad \square_{\omega} A_{\omega}^k \equiv \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{\omega} \omega^{ij} \frac{\partial A_{\omega}^k}{\partial x^j} \right) = i \sum_1^{\infty} \left[ \sqrt{\beta_n} (V_{\omega})_n^k + (P_{\omega})_n^k \right],$$

et un théorème bien connu de la théorie des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre et du type hyperbolique normal, comme l'équation (157), nous apprend alors que les «rayons» de la propagation des actions électromagnétiques (rayons lumineux, par exemple) sont les bicaractéristiques de Cauchy de l'équation (157) et que ces bicaractéristiques sont les lignes de «longueur» nulle qui correspondent à la forme quadratique :

$$d\Omega^2 = \omega^{ij} dx_i dx_j$$

c'est-à-dire à la forme métrique externe. Contrairement à ce qu'on admet en Relativité générale, les rayons lumineux ne sont pas les lignes de longueur nulle du  $ds^2$ , sauf dans le cas particulier très important où l'on a en chaque point de l'espace-temps :

$$(158) \quad \omega_{ik} = \chi g_{ik} \quad (i, k = 1, 2, 3, 4),$$

$\chi$  étant un invariant (courbure moyenne en un point de l'espace-temps). Les lignes de courbure de l'espace-temps sont alors indéterminées et la formule de Gauss (25) prend la forme :

$$R_{ijkl} = \chi^2 (g_{ik} g_{jl} - g_{il} g_{jk}).$$

Un théorème connu de Schur nous apprend alors que  $\chi$  est une constante en chaque point de l'espace-temps. On arrive de la sorte au résultat suivant :

*Pour que les rayons de la propagation des actions électromagnétiques (les rayons lumineux, par exemple) soient les lignes de longueur nulle du  $ds^2$  (de la forme métrique interne), il faut et il suffit que l'espace-temps soit une hypersurface à courbure moyenne constante.*

Nous savons qu'en première approximation l'espace-temps réel est un espace-temps de De Sitter-Lanczos qui satisfait à (158), mais en toute rigueur les rayons lumineux sont les lignes de «longueur» nulle du  $d\Omega^2$  et leur marche doit dépendre essentiellement du champ électromagnétique, d'après les résultats du § 3. Refaisons donc, en partant des  $\omega_{ik}$  de la forme métrique externe, le calcul, aujourd'hui classique, qui donne la formule einsteinienne de la déviation des rayons lumineux par la gravitation des grandes masses, comme le soleil. Pour cela, considérons un champ électrostatique pur à surfaces équipotentielles sphériques. On déduit alors l'équation (136) des équations (19 b), et cette équation (136) donne, en dehors des charges :

$$(159) \quad \omega_{44} = -b_\omega + \frac{a_\omega}{r_\omega},$$

avec :

$$r_\omega = \sqrt{(q^1)^2 + (q^2)^2 + (q^3)^2}$$

(on néglige ici, comme dans le calcul d'Einstein,  $\lambda_\omega$  et la courbure des sections spatiales de l'espace-temps, de sorte que les  $dq^i$ , pour  $i=1, 2, 3$  sont intégrables) et :

$$(160) \quad a_\omega = \frac{\mathcal{L}^2}{4\pi} z_\omega \bar{U},$$

$\bar{U}$  étant la «charge électrique» totale qui produit le champ.

Pour les autres  $\omega_{ik}$ , on obtient la solution suivante à symétrie sphérique :

$$(161) \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_{ik} = b_\omega \gamma_{ik} + a_\omega \frac{q^i q^k}{r_\omega^3} \\ \omega_{i4} = \omega_{4i} = 0. \end{array} \right. \quad i, k = 1, 2, 3.$$

Considérons un rayon lumineux venant «de l'infini», appartenant au plan des  $x^1, x^2$  et orienté perpendiculairement à l'axe des  $x^1$  quand il passe le plus près du corps qui produit le champ. La vitesse de la lumière est donnée par l'équation :

$$(162) \quad d\Omega^2 \equiv \omega_{ik} dx^i dx^k = 0.$$



Soit  $\gamma$  le module de cette vitesse, c'est-à-dire :

$$(163) \quad \gamma = \sqrt{\left(\frac{dx^1}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx^2}{dx^4}\right)^2 + \left(\frac{dx^3}{dx^4}\right)^2}.$$

On déduit alors de (162), avec une approximation suffisante, pour le rayon défini ci-dessus :

$$\gamma = \sqrt{-\frac{\phi_{44}}{\phi_{22}}},$$

et la courbure totale de ce rayon sera donnée<sup>1</sup>, avec une bonne approximation, par :

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial x^1} dx^2,$$

ou bien :

$$(164) \quad C = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \gamma}{\partial q^1} dq^2,$$

par suite des relations (135), qui sont toujours valables, en première approximation, sur les sections spatiales de l'espace-temps dans le cas d'un champ électrostatique pur. Comme  $b_\omega$  doit s'annuler lorsque l'espace-temps tend vers un hyperplan, il faut poser :  $b_\omega = \chi$ , de sorte que (164) donne en tenant compte de (159) et (161) :

$$(165) \quad C = \frac{2a_\omega}{\chi \sqrt{\chi} D_m},$$

$D_m$  étant la distance naturelle minima du rayon lumineux au centre du champ.

Considérons maintenant le cas particulier très important où le champ électrostatique à symétrie sphérique est produit par une masse électrisée dont la gravitation est si importante qu'on peut négliger tout-à-fait la gravitation des autres masses. Supposons encore que les surfaces de niveau du champ de gravitation coïncident pratiquement avec les surfaces équipotentielles du champ électrostatique. Tel est le cas du soleil et de toutes les étoiles simples. Dans ces conditions, les potentiels de la gravitation sont donnés, au même degré d'approximation

<sup>1</sup> Cf. A. Einstein: «Les fondements de la théorie de la relativité générale», Hermann, Paris.

que les expressions (159) et (161) des  $\omega_{ik}$  par les expressions bien connues :

$$(166) \quad \left\{ \begin{array}{l} g_{4i} = -1 + \frac{a}{r} \\ g_{ik} = \delta_{ik} + a \frac{x_i x_k}{r^3} \\ g_{i4} = g_{4i} = 0 \end{array} \right\} \quad i, k = 1, 2, 3.$$

avec :

$$r = \sqrt{(x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2},$$

et :

$$a = \frac{z_e M}{4\pi}, \quad (z_e = \text{constante einsteinienne de la gravitation}).$$

$M$  étant la masse totale qui produit le champ de gravitation. En comparant ces valeurs des  $g_{ik}$  aux expressions (150) et (161) des  $\omega_{ik}$  on voit immédiatement que l'on a ici  $\omega_{ik} = \lambda g_{ik}$  pour  $i, k = 1, 2, 3, 4$ . Dans ces conditions, la formule (165) pour la déviation des rayons lumineux par le champ électrostatique devient identique à la formule einsteinienne de la déviation des rayons lumineux par le champ de gravitation :

$$(167) \quad C_e = \frac{2a}{D_m}.$$

On voit donc que, grâce à la condition (135), la déviation einsteinienne est égale à la déviation (165) dans le cas d'un astre comme le Soleil, bien que cet effet doive être attribué toujours au champ électrostatique. Dans l'espace environnant le Soleil ou toute autre étoile simple, les rayons lumineux sont donc, en première approximation, à la fois les lignes de «longueur nulle» du  $d\Omega^2$  (de la forme métrique externe) et les lignes de longueur nulle du  $ds^2$ .

6. Les charges électriques propres des corpuscules élémentaires. Considérons l'équation (48) des fonctions et valeurs propres de l'opérateur laplacien  $\Delta_\omega$  relatif à la métrique externe (7) :

$$(48) \quad \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{\omega} \omega^{ik} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x^k} \right) = \beta_n \Phi_{mn}.$$

Comme cet opérateur est complet, ses valeurs propres  $\beta_n$  représentent (voir § 10 du Chap II) des propriétés intrinsèques des corpuscules élémentaires. D'après les équations électromagnétiques (147), il est évi-

dent que les  $\sqrt{\beta_n}$  sont, à un facteur constant près que nous allons déterminer, les valeurs absolues des charges électriques propres des corpuscules élémentaires. Considérons par exemple l'équation :

$$(168) \quad \operatorname{div}_\omega (\vec{\mathcal{E}}_e)_n = i\sqrt{\beta_n} (V_\omega)_n^4 = -\sqrt{\beta_n} \Phi_{mn} \epsilon_0^4 \epsilon_{nq} \Phi_n^m.$$

En la comparant à l'équation de Maxwell correspondante, on voit facilement qu'en multipliant ses deux membres par un facteur constant ayant les dimensions  $M^{\frac{1}{2}} L^2 T^{-1}$  on obtient au second membre la densité de charge électrique avec les dimensions classiques  $M^{\frac{1}{2}} L^{\frac{3}{2}} T^{-1}$  (en unités électrostatiques), quand on convient de donner aux  $\Phi_{mn}$  les dimensions  $L^{-\frac{3}{2}}$ . Ce facteur constant doit évidemment être formé uniquement avec les constantes fondamentales  $h$ ,  $c$  et  $\delta_0$ . En désignant par  $e_n$  les valeurs absolues des charges élémentaires, il faut donc poser :

$$(169) \quad e_n^2 = \mathcal{A} \delta_0 h c \beta_n,$$

c'est-à-dire :

$$(170) \quad e_n = \pm (\sqrt{\mathcal{A} \delta_0 h c}) \sqrt{\beta_n},$$

$\mathcal{A}$  étant une constante positive sans dimensions (nombre pur) que nous déterminerons plus loin (§ 8).

La transformation (51) montre que le second membre de (168) peut varier entre la limite inférieure négative  $-\sqrt{\beta_n} \sum_1^4 \Phi_{mn}^2$  et la limite supérieure positive  $+\sqrt{\beta_n} \sum_1^4 \Phi_{mn}^2$ . Il y a donc des charges électriques négatives et des charges électriques positives pour tout  $\beta_n$ , et il est clair qu'à la limite inférieure  $-\sqrt{\beta_n} \sum_1^4 \Phi_{mn}^2$  correspond la charge propre élémentaire négative :

$$-e_n = -(\sqrt{\mathcal{A} \delta_0 h c}) \sqrt{\beta_n}$$

et à la limite supérieure  $+\sqrt{\beta_n} \sum_1^4 \Phi_{mn}^2$  la charge propre élémentaire positive :

$$+e_n = +(\sqrt{\mathcal{A} \delta_0 h c}) \sqrt{\beta_n}.$$

En d'autres termes : aux corpuscules élémentaires de masse propre  $(m_0)_n$  et de charge électrique propre  $-e_n$  correspondent toujours des corpus-

*cules élémentaires de même masse propre et de charge électrique égale et de signe contraire* ( $+e_n$ ). On sait expérimentalement que tel est le cas des électrons, mais la théorie cosmologique montre qu'il en est de même pour tous les corpuscules électrisés véritablement élémentaires.

La relation (170) montre que les charges électriques propres des corpuscules élémentaires tendent vers l'infini avec l'indice de numérotage des valeurs propres des opérateurs  $\Delta$  et  $\Delta_\omega$  pour lesquelles ces opérateurs ont quatre fonctions propres linéairement indépendantes. Mais les  $e_n$  tendent vers l'infini moins vite que les masses propres  $(m_0)_n$ . Nous devons insister à nouveau sur le fait important que, malgré l'existence de corpuscules élémentaires de charge électrique propre infiniment grande, leur influence sur le champ électromagnétique est nulle. Plus exactement: l'influence des corpuscules élémentaires de charge  $\pm e_n$  sur le champ électromagnétique diminue et tend vite vers zéro quand l'indice  $n$  tend vers l'infini, puisque tel est le cas des fonctions propres  $\Phi_{mn}$  dont dépend exclusivement le champ électromagnétique. En rapprochant ce résultat du résultat correspondant de la fin du § 4 sur le champ de gravitation, on comprend maintenant parfaitement pourquoi les corpuscules élémentaires de grande masse propre et de grande charge électrique propre sont restés jusqu'ici rebelles à l'observation et doivent même probablement le rester par suite de leur nature même. En effet, un objet, un phénomène physique, n'est observable que par les actions, en dernière analyse gravifiques et électromagnétiques, qu'il exerce directement ou indirectement sur les sens de l'observateur. Si donc les actions gravifiques et électromagnétiques des corpuscules élémentaires tendent vers zéro quand leurs masses cosmologiques et leurs charges électriques propres tendent vers l'infini, leur «observabilité» (physique) tendra aussi vers zéro dans les mêmes conditions. On peut donc affirmer que notre monde physique habituel, celui qui est facilement accessible à nos sens, aidés ou non d'instruments scientifiques, tout en étant celui qui modèle presque entièrement la métrique et la forme de l'Univers, n'est qu'une toute petite partie, qu'une partie infiniment petite, de l'ensemble des contenus de l'être mathématique non-arbitraire, c'est-à-dire de l'ensemble de ce qui est doué d'existence physique dans l'espace-temps (cf. les résultats du § 8).

La théorie des corpuscules élémentaires comporte évidemment la détermination a priori des points de l'espace-temps où doivent être attachées les masses et les charges électriques propres ainsi que les autres propriétés intrinsèques des corpuscules élémentaires. Mais ce problème de la «position des corpuscules» ne sera traité que plus loin en même temps que d'autres questions qui ont un rapport étroit avec lui.

7. Les constantes  $c$  et  $h$ . La présence des constantes  $c$  et  $h$  dans la théorie cosmologique n'est admissible que s'il est possible d'en donner des expressions absolument non-arbitraires dans le cadre de cette théorie. Considérons d'abord la constante  $c$ , qui est le rapport de l'unité électrostatique à l'unité électromagnétique de charge électrique et aussi la vitesse de propagation des actions électromagnétiques dans une région où l'effet de la « matière » électrisée sur cette propagation est insensible. Si nous considérons l'expression (163) du module de la vitesse de propagation des actions électromagnétiques, expression qui devient :

$$\sqrt{-\frac{\omega_{44}}{\omega_{22}}}$$

en plaçant l'axe des  $x^2$  parallèlement à la direction de propagation en un point, alors la constante  $c$  peut naturellement être considérée comme la limite de  $\gamma$  lorsque les  $\omega_{ik}$  tendent vers leurs valeurs pour un espace-temps pseudo-euclidien plan, c'est-à-dire lorsque  $\omega_{ik} \rightarrow 0$ . On a donc :

$$(171) \quad c = \lim_{\omega_{ik} \rightarrow 0} \sqrt{-\frac{\omega_{44}}{\omega_{22}}}$$

en sous entendant que les axes  $x^i$  sont ici des axes orthogonaux et que l'axe des  $x^2$ , par exemple, est tangent à la direction de la propagation. Cette définition de  $c$  introduit, sans aucun arbitraire, cette constante dans la théorie cosmologique.

Pour introduire aussi la constante  $h$  dans cette théorie, considérons un phénomène (rayonnement) *se propageant à la vitesse des actions électromagnétiques*. Désignons par  $\vec{n}$  les vecteurs unitaires des rayons de cette propagation et par  $l$  une constante (arbitraire) ayant les dimensions d'une longueur. Posons  $\vec{u} = \frac{\vec{n}}{l}$  et formons l'invariant  $x^i u_i$ , les  $u_i$

étant les composantes covariantes de  $\vec{u}$ . On peut alors écrire :

$$(172) \quad \Psi_{mn}(x^i) = \varphi_{mn}(x^i u_i) + f_{mn}(x^i).$$

Posons d'ailleurs  $x^4 = ct$  et considérons aussi les composantes contravariantes  $T^{4i}$  du tenseur  $T^{ik}$  qui forme les seconds membres des équations (19 a). Formons alors les fonctions  $\frac{1}{w^i} \int_v T^{4i} dv$ ,  $v$  étant le petit

volume autour de chaque corpuscule (photon) où  $T^{4i} \neq 0$  dans le phénomène (rayonnement) décrit par (172). Envisageons les limites de ces

rappports lorsque les fonctions  $f_{mn}(x^i)$  de (172) tendent vers zéro et les  $\varphi_{mn}$  vers des fonctions périodiques de l'invariant  $x^i u_i$ , en même temps que la métrique de l'espace-temps tend vers une métrique pseudo-euclidienne  $ds^2 = (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2 - c^2 dt^2$ , dans une certaine région de l'Univers. Dans ces conditions, les  $\int T^{ii} dv$  tendent vers les composantes d'un vecteur de l'espace-temps pseudo-euclidien et l'on a nécessairement :

(173)

$$\lim_{u_1} \frac{1}{u_1} \int_x T^{ii} dx = \lim_{u_2} \frac{1}{u_2} \int_x T^{ii} dx = \lim_{u_3} \frac{1}{u_3} \int_x T^{ii} dx = \lim_{u_4} \frac{1}{u_4} \int_x T^{ii} dx = h_g,$$

$h_g$  étant une constante universelle et le passage à la limite étant celui qui vient d'être défini. En nous reportant aux formules (177) et (178) du § 8 de ce Chap., on voit que l'on peut écrire :

$$z_g \int_x T^{ii} dx = \frac{8\pi K}{c^2} m,$$

$K$  étant la constante newtonienne de la gravitation et  $m$  la masse pesante des photons du rayonnement décrit par (172) avec  $f_{mn}(x^i) \rightarrow 0$ .

En posant  $\nu = \frac{c}{l}$ , la dernière relation de (173) donne donc :

$$mc^2 = \frac{h_g}{8\pi} \frac{z_g}{K} c^3 \nu$$

d'où l'on déduit la définition de la constante  $h$  :

$$(174) \quad h = \frac{h_g}{8\pi} \frac{z_g}{K} c^3$$

qui est ainsi étroitement reliée à la structure corpusculaire du rayonnement.

**8. Masses et charges des corpuscules, gravitation et électromagnétisme dans l'espace-temps.** Nous savons (Chap. II, § 11) qu'en première approximation l'espace-temps réel ne diffère que par une petite perturbation d'un espace-temps  $F_0$  de De Sitter-Lanzcos. Les masses et charges propres des corpuscules élémentaires doivent donc être, en première approximation, les masses et charges propres qui correspondent à une petite déformation de  $F_0$ . Dans le § 12 du Chap. II nous

avons déduit que le spectre de l'opérateur laplacien  $\Delta$  est donné pour un  $F_0$  peu déformé, par la relation :

$$\sqrt{\alpha_n} = \frac{2\pi n}{\delta_0}.$$

En utilisant la relation (156), nous aurons donc le spectre suivant de masses propres des corpuscules élémentaires qui sont compatibles avec une petite déformation de  $F_0$  :

$$(175) \quad (m_0)_n = \frac{h}{c\delta_0} n.$$

Rappelons-nous que  $\delta_0$  est le diamètre ( $\delta_0 = 2\mathbf{P}_0 \theta_0$ ) de la surface frontière  $\sigma$  (d'équation  $\theta = \theta_0$ ) du contenant  $F_0$ . Nous savons (Chap. II, §3) qu'une telle frontière existe nécessairement dans l'être mathématique non-arbitraire au point de vue géométrique. Elle doit cependant être «physiquement» inexistante, en ce sens qu'aucune observation ne doit pouvoir la déceler, car il est clair que seul un espace fermé et illimité est physiquement admissible. Dans ces conditions,  $\delta_0$  doit être la plus petite longueur dont la mesure ait un sens. Cette longueur est la «longueur d'onde de Compton»  $\delta_m = h/(m_0)_e c = 2,24 \times 10^{-10}$  cm,  $(m_0)_e$  étant la masse propre (pesante ou d'inertie) de l'électron. En remplaçant cette valeur de  $\delta_0$  dans (175), on voit immédiatement que l'électron correspond exactement au premier terme spectral de l'opérateur laplacien  $\Delta_0$  de l'espace-temps  $F_0$ , c'est-à-dire  $(m_0)_1 = (m_0)_e$ . Toutes les autres masses propres des corpuscules élémentaires compatibles avec une petite perturbation de  $F_0$  sont alors données par  $(m_0)_n = (m_0)_e n$  et sont donc les multiples entiers de la masse propre de l'électron.

Pour comprendre ces résultats, il est *absolument essentiel* de ne pas confondre la notion de masse propre  $(m_0)_n$  des corpuscules élémentaires, que nous avons utilisée jusqu'à présent, avec la notion classique de masse propre pesante (ou d'inertie) des mêmes corpuscules. Considérons en effet l'équation de Laplace-Poisson généralisée qui correspond à (104) lorsque le champ est quasi statique :

$$(176) \quad \Delta_3^0 \gamma_{44} = z_g T - \lambda'_g.$$

On sait, d'après la théorie de la Relativité générale, qu'il faut poser :

$$(177) \quad z_g T = z_e \mu.$$

$\mu$  étant la densité de masse pesante ou gravitationnelle et  $z_e$  la cons-

tante einsteinienne de la gravitation, qui est reliée à la constante classique ( $K$ ) newtonienne par la relation :

$$(178) \quad z_e = \frac{8\pi K}{c^2}.$$

On sait d'autre part que  $\mu = \mu_{in}$ ,  $\mu_{in}$  étant la densité de masse d'inertie. L'équation (176), appliquée *dans le voisinage* d'un corpuscule dont la masse pesante est  $m_p$ , donne la valeur suivante du potentiel gravifique propre  $\gamma'_{ii}$  créé par le corpuscule :

$$(179) \quad \gamma'_{ii} = \frac{1}{4\pi} \frac{z_e m_p}{r},$$

$r$  étant la distance entre le centre du corpuscule et le point où l'on détermine le potentiel. La constante  $\lambda'_g$  est, comme nous l'avons dit plus haut (chap II, § 11), la différence entre la constante cosmologique  $\lambda_g$  qui correspond à l'Univers et la constante cosmologique  $\lambda'_g$  qui correspond à l'espace-temps  $F'_0$ . La fonction  $T$  est donnée par (44), et il est clair, comme nous l'avons déjà fait ressortir plusieurs fois, que sa valeur ne dépend que des premiers termes du spectre de l'opérateur laplacien, c'est-à-dire des premières masses propres  $(m_0)_n$  compatibles avec une petite déformation de  $F'_0$ . Comme  $T_n$  tend très vite vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ , on peut, en première approximation, poser  $T \equiv \sum_1^{\infty} T_n = T_1$ , ce qui revient à dire qu'en première approximation la masse pesante  $m_p$  de (179) est égale à la masse propre de l'ensemble des électrons qui forment le corpuscule  $m_p$ , c'est-à-dire :  $m_p = \nu_e (m_0)_1 = \nu_e (m_0)_e$ ,  $\nu_e$  étant le nombre d'électrons dans  $m_p$ . Autrement dit, la masse propre pesante (ou d'inertie) de l'électron est presque identique à sa masse propre  $(m_0)_1$  qu'on déduit de notre théorie cosmologique. [Pour ne pas confondre les masses propres  $(m_0)_n$  des autres corpuscules avec leurs masses propres pesantes (ou d'inertie) qui, pour  $n \rightarrow \infty$ , tendent vers zéro alors que les  $(m_0)_n$  tendent vers  $\infty$  quand  $n \rightarrow \infty$ , nous dirons que les masses propres qui ont été et seront désignées par  $(m_0)_n$  sont les *masses propres cosmologiques* des corpuscules véritablement élémentaires (ponctuels)].

Considérons maintenant *la moitié en contraction* de l'espace-temps de De Sitter-Lanczos, c'est-à-dire, d'après (97), l'hypersurface  $F_0$  pour  $-\infty \leq \tau \leq 0$ , et donnons-nous la petite perturbation qui représente la différence entre  $F'_0$  et le contenant  $F$  de l'être mathématique non-arbitraire (contenant de l'Univers). A cette perturbation correspondent,



nous l'avons déjà montré, des corpuscules élémentaires dont les masses propres cosmologiques  $(m_0)_n$  ne diffèrent que peu des valeurs (175). Par suite de la contraction de  $F_0$  pour  $-\infty \leq \tau \leq 0$  et du champ de gravitation créé par les corpuscules élémentaires, ceux-ci doivent nécessairement se rapprocher pendant cette phase en contraction de  $F_0$  et se réunir pour former des corpuscules complexes non-élémentaires. Pour analyser ce processus, dont l'importance est énorme dans l'Univers, remarquons d'abord que, du fait que la contribution  $T_n$  des corpuscules élémentaires de masse propre cosmologique  $(m_0)_n$  à la fonction  $T$  tend très vite vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ , le champ de gravitation qui existe autour de ces corpuscules tend très vite vers zéro quand la masse propre cosmologique  $(m_0)_n$  croît. Il est donc clair que la tendance à la réunion des corpuscules élémentaires pour former des corpuscules lourds non-élémentaires diminue très vite en importance quand  $n \rightarrow \infty$ . On peut donc se borner, en première approximation, à considérer seulement la formation de corpuscules lourds non-élémentaires par réunion des corpuscules élémentaires qui correspondent aux tous premiers termes du spectre de l'opérateur laplacien (et spécialement par réunion d'électrons, qui sont les seuls corpuscules véritablement élémentaires dont la masse propre pesante ou d'inertie est appréciable). Le processus que nous analysons s'arrête forcément quand le corpuscule non-élémentaire qui résulte de la réunion de corpuscules élémentaires n'a plus autour de lui de champ de gravitation, ce qui arrive lorsque la masse pesante du corpuscule lourd compense la masse fictive qui correspond à la constante cosmologique  $\lambda'_g$ . Nous pouvons admettre que le processus est achevé partout dans l'Univers à la fin de la phase de contraction du  $F_0$  correspondant, c'est-à-dire pour  $\tau=0$  (voir la formule (97). A ce moment là le champ de gravitation  $\gamma_{44}$  est nul en chaque point de l'espace. Désignons par  $\frac{w(r)}{r}$  la solution élémentaire de l'équation de Laplace  $\Delta_3^0 \left[ \frac{w(r)}{r} \right] = 0$ ,  $\Delta_3^0$  étant l'opérateur laplacien relatif à l'espace  $\Sigma_0^0$  (section de l'espace-temps  $F_0$  par l'hyperplan  $\tau=0$ ). Alors, de l'équation (176) on déduit, en tenant compte de (177) et (178) :

$$(180) \quad \gamma_{44} = \frac{2K}{c^2} \int_{V_3^0} \mu \frac{w(r)}{r} dV_3^0 - \frac{\lambda'_g}{4\pi} \int_{V_3^0} \frac{w(r)}{r} dV_3^0,$$

$V_3^0$  étant le volume de  $\Sigma_0^0$ , c'est-à-dire  $V_3^0 = 2\pi^2 P_0^3$ . Soit  $N_0$  le nombre d'électrons de l'Univers pour  $\tau=0$  et  $M_0$  sa masse pesante totale

pour  $\tau=0$ . On a donc  $M_0 = N_0(m_0)_e$ . Remarquons qu'à la valeur de la première intégrale de (180) ne contribuent évidemment que les points où se trouvent les corpuscules, de sorte que l'on a, pour  $\tau=0$ :

$$\frac{2K}{c^2} \int_{V_3^0} \mu \frac{w(r)}{r} dV_3^0 = \frac{2KM_0}{c^2} \frac{1}{V_3^0} \int_{V_3^0} \frac{w(r)}{r} dV_3^0 = \frac{KM_0}{\pi^2 c^2 \mathbf{P}_0^3} \int_{V_3^0} \frac{w(r)}{r} dV_3^0.$$

Si donc, pour  $\tau=0$ , il n'y a pas de champ de gravitation, la relation (180) donne immédiatement:

$$\frac{KM_0}{\pi^2 c^2 \mathbf{P}_0^3} = \frac{\lambda'_g}{4\pi}$$

ou bien:

$$(181) \quad M_0 = \frac{\pi c^2 \mathbf{P}_0 a}{4K} \quad (\text{avec: } a = \mathbf{P}_0^2 \lambda'_g).$$

La relation (181) est analogue à la relation d'Einstein pour un Univers sphérique et statique, avec cette différence que la constante cosmologique d'Einstein est ici remplacée par la constante cosmologique qui correspond à la différence entre l'espace-temps réel et l'espace-temps  $V_0$ .

Considérons maintenant l'équation électrostatique qui correspond à l'équation (111):

$$(182) \quad \Delta_3^0 \omega'_{44} = \chi^2 z_\omega U - \chi^2 \lambda'_\omega.$$

De cette équation on déduit:

$$(183) \quad \omega'_{44} = \frac{\chi^2 z_\omega}{4\pi} \int_{V_3} U \frac{w(r)}{r} dV_3 - \frac{\chi^2 \lambda'_\omega}{4\pi} \int_{V_3} \frac{w(r)}{r} dV_3.$$

Pour calculer la valeur de la première intégrale, posons:

$$(184) \quad \int_{v_e} U dx_e = \bar{U}_e$$

$v_e$  étant le petit volume sphérique autour de chaque électron où la valeur de  $U$  diffère sensiblement de zéro (conception classique de l'électron, globule d'électricité). Écrivons maintenant l'équation classique du mouvement d'un électron de charge  $e$  et de masse pesante  $(m_0)_e$  sous l'action d'un champ de Coulomb électrostatique pur, créé par une charge égale:

$$(185) \quad \frac{d^2 \vec{\varphi}^i}{dt^2} = \frac{e}{(m_0)_e} \frac{\partial A}{\partial \vec{\varphi}^i} = (K_\omega)_{el} \frac{e}{(m_0)_e} \cdot \frac{e}{r^2} \cos(\vec{r}, \vec{\varphi}^i)$$

$A$  étant le potentiel et  $(K_{\omega})_{cl}$  la constante de Coulomb. De l'équation (136) on déduit immédiatement la valeur suivante du potentiel  $\frac{\omega_{44} c^2}{2\chi}$  en tenant compte de (184)

$$(186) \quad \frac{\omega_{44} c^2}{2\chi} = \frac{\chi c^2 z_{\omega} \bar{U}_c}{8\pi r}.$$

L'équation (137) du mouvement de l'électron sous l'action du champ de Coulomb pur (c'est-à-dire en faisant abstraction de  $\gamma_{\omega}$ ) s'écrit donc :

$$(187) \quad \frac{d^2 \xi^i}{dt^2} = -\frac{c^2}{2\chi} \frac{\partial \omega_{44}}{\partial \xi^i} = \frac{\chi c^2}{8\pi} z_{\omega} \frac{\bar{U}_c}{r^2} \cos(\vec{r}, \vec{\xi}^i).$$

En comparant cette équation à (185) on déduit :

$$(188) \quad \frac{\chi z_{\omega} \bar{U}_c}{(K_{\omega})_{cl} e} = 8\pi \frac{e}{(m_0)_c c^2}.$$

Les corpuscules lourds non-élémentaires qui résultent de la réunion des électrons pendant la phase en contraction de  $F_0$  possèdent forcément, ou bien une charge nulle, ou bien une charge  $e$  égale à celle de l'électron. En tenant compte de (188) on peut donc écrire comme suit la première intégrale de (183) :

$$(189) \quad \frac{\chi^2 z_{\omega}}{4\pi} \int_{V_3} U \frac{w(r)}{r} dV_3 = \frac{2\chi e^2 (K_{\omega})_{cl}}{(m_0)_c c^2} \sum_1^{N_i} \frac{w(r_i) \delta_i}{r_i},$$

en désignant par  $N_i$  le nombre de corpuscules lourds qui existent dans  $V_3$  et  $\delta_i$  étant égal à zéro ou à  $\pm 1$  suivant qu'il s'agit d'un corpuscule neutre, ou positivement ou négativement électrisé. Nous avons vu que lorsque le processus de réunion des électrons pour former les corpuscules lourds est achevé (pour  $\tau=0$ ), il n'y a pas de champ gravifique autour de ces corpuscules, plus exactement  $\gamma_{44}=0$  pour  $\tau=0$ . Nous devons donc admettre aussi que pour  $\tau=0$  il n'y a pas non plus de champ électrique, c'est-à-dire qu'il y a compensation entre le champ électrostatique propre des corpuscules et le champ qui correspond à la densité fictive de charge représentée par la constante  $\chi^2 \gamma'_{\omega}$ . Dans ces conditions, la formule (183) s'applique aussi bien à la totalité du volume  $V_3^0$  qu'à l'une quelconque de ses parties. En posant donc  $\omega'_{44}=0$  et en tenant compte de  $\gamma'_{\omega} > 0$  et de la relation (188), on voit immédiatement que la charge d'une partie quelconque de  $V_3^0$  doit être toujours positive, la densité de cette charge étant d'ailleurs constante dans  $V_3^0$ .

Ceci signifie que *les corpuscules lourds sont, ou bien positivement électrisés (par la charge élémentaire  $+e$ ), ou bien électriquement neutres*, le pourcentage de corpuscules électrisés étant constant dans  $V_3^0$ . Le symbole  $\delta_i$  de la formule (189) ne peut donc prendre, pour  $\tau=0$ , que les valeurs zéro et  $+1$ . Par suite du champ de Coulomb, les électrons négatifs ont tendance à se réunir aux électrons positifs, de sorte que les corpuscules lourds non élémentaires et positivement chargés sont évidemment *beaucoup moins nombreux* que les corpuscules lourds neutres. D'autre part, le fait d'être neutre ou électrisé pour un corpuscule lourd, *pris au hasard dans l'Univers*, peut évidemment être considéré *statistiquement*. Si nous désignons par  $N_l^0$  le nombre total de corpuscules lourds (dus à la réunion d'électrons) qui se trouvent dans l'Univers pour  $\tau=0$ , alors (189), traitée statistiquement, devient pour cette valeur de  $\tau$ :

$$(190) \quad \frac{2\chi e^2 (K_\omega)_{cl}}{(m_0)_e c^2} \left[ \frac{w(r_1) \delta_1}{r_1} + \frac{w(r_2) \delta_2}{r_2} + \dots + \frac{w(r_{N_l^0}) \delta_{N_l^0}}{r_{N_l^0}} \right] = \\ = \frac{\chi e^2 (K_\omega)_{cl} \sqrt{N_l^0}}{\pi^2 (m_0)_e c^2 \mathbf{P}_0^3} \int_{V_3^0} \frac{w(r)}{r} dV_3^0.$$

Comme on a  $\omega'_{41}=0$  pour  $\tau=0$ , la relation (183) donne immédiatement, en tenant compte de (190) et pour cette valeur de  $\tau$ :

$$(191) \quad \frac{\sqrt{N_l^0}}{\mathbf{P}_0} = \frac{\pi \chi'_{\omega} \mathbf{P}_0^2 (m_0)_e c^2}{4 (K_\omega)_{cl} e^2}$$

Mais on a d'une part  $\chi = \frac{1}{\mathbf{P}_0}$  et d'autre part  $(K_\omega)_{cl}=1$  et  $\chi'_\omega = b/\mathbf{P}_0$ ,

$b$  étant un nombre pur voisin de 1. La relation (191) s'écrit donc :

$$(192) \quad \frac{\sqrt{N_l^0}}{\mathbf{P}_0} = \frac{\pi b}{4} \cdot \frac{(m_0)_e c^2}{e^2},$$

et est donc identique, au facteur constant  $\pi b/4$  près qui ne change pas l'ordre de grandeur de  $N_l^0$ , à la célèbre relation d'Eddington. Nous avons donc montré que cette relation est une conséquence de notre théorie cosmologique, ce qui à notre avis est un résultat très important. Un simple coup d'oeil sur la relation (192) montre qu'elle exprime l'égalité de l'énergie de masse et de l'énergie électrique d'un électron placé dans le champ électrostatique propre de l'ensemble des corpuscules lourds de l'Univers pour  $\tau=0$ .

Désignons par  $m_p$  la masse pesante des corpuscules lourds qui résultent de la réunion des électrons. Pour  $\tau=0$ , on a  $M_0=N_0(m_0)_e= N_l^0 m_p$ ,  $(m_0)_e$  étant la masse de l'électron. Appliquons alors les formules précédentes pour calculer les valeurs numériques de  $M_0$  (masse totale de l'Univers pour  $\tau=0$ ), de  $N_0$ ,  $N_l^0$  et surtout de l'important rapport  $m_p/(m_0)_e$  de la masse des corpuscules lourds non élémentaires à la masse de l'électron. Nous avons, par exemple dans le système d'unités c. g. s., les valeurs numériques suivantes :

$$(193) \quad \left\{ \begin{array}{l} K=6,6 \times 10^{-8} (gr)^{-1} (cm)^3 (sec)^{-2}; \quad c=3 \times 10^{10} (cm) (sec)^{-1} \\ (m_0)_e=9,02 \times 10^{-28} gr; \quad e=4,8 \times 10^{-10} (u. e. s.) [(gr)^{\frac{1}{2}} (cm)^{\frac{3}{2}} (sec)^{-1}]. \end{array} \right.$$

Quant à  $P_0$ , les observations astronomiques et toutes les études cosmologiques d'Einstein, de De Sitter, de Friedmann et de Lemaître, etc., s'accordent pour lui assigner l'ordre de grandeur  $10^8-10^9$  parsecs, c'est-à-dire  $10^{27}$  cm. Des formules (181) et (192) on déduit immédiatement :

$$(194) \quad \frac{m_p}{(m_0)_e} = \frac{4a}{\pi b^2} \cdot \frac{e^4}{K (m_0)_e^2 c^2 P_0}.$$

En tenant compte des valeurs numériques précédentes on trouve donc :

$$(195) \quad \text{Ordre de grandeur de } \frac{m_p}{(m_0)_e} = \frac{4a}{\pi b^2} \times 10^3.$$

Comme on a  $dP/d\tau=0$  pour  $\tau=0$ , nous admettrons que la masse totale de l'Univers pour  $\tau=0$  est égale à la masse totale d'un Univers sphérique et statique d'Einstein de même rayon  $P_0$ . La relation (181) donne alors  $a=1$ . On connaît par ailleurs la relation ( $\gamma'_\omega=\gamma'_g/\gamma$ ), de sorte que  $\gamma'_\omega \equiv b/P_0 = a/P_0 \gamma$ , d'où :  $b=a=1$ . Alors (195) donne :

$$(196) \quad \text{Ordre de grandeur de } \frac{m_p}{(m_0)_e} = 10^3,$$

et pour obtenir la valeur expérimentale exacte  $m_p/(m_0)_e=1847$ , il suffit de poser dans (194) la valeur parfaitement admissible :

$$(197) \quad P_0=530 \times 10^6 \text{ parsecs} = 1,6 \times 10^{27} \text{ cm}.$$

Les mêmes valeurs numériques donnent d'ailleurs pour  $N_0$  (nombre total d'électrons de l'Univers pour  $\tau=0$ ) et pour  $N_l^0$  (nombre total de corpuscules lourds non élémentaires de l'Univers pour  $\tau=0$ ) en utili-

sant la formule (181) avec  $a=1$  et les relations  $M_0=N_0(m_0)_e=N_l^0 m_p$  :

$$(198) \quad N_0 = \frac{\pi c^2 P_0}{4K(m_0)_e} = 6 \times 10^{82}; \quad N_l^0 = \frac{\pi c^2 P_0}{4K m_p} = 3,2 \times 10^{79}$$

nombres dont l'ordre de grandeur est précisément celui que l'on admet généralement.

Nous avons ainsi démontré par notre théorie cosmologique :

1° *que des corpuscules lourds comme les protons, les neutrons et les atomes d'hydrogène (ceux-ci n'étant en somme que des neutrons de plus grandes dimensions) existent nécessairement dans l'Univers ;*

2° *que ces corpuscules lourds ont précisément une masse théorique égale à la masse expérimentale des protons, neutrons et atomes d'hydrogène et doivent être identifiés avec eux.*

3° *que les protons, neutrons (et atomes d'hydrogène) ne sont pas des corpuscules véritablement élémentaires (ponctuels) et sont formés par des électrons réunis intimement.*

4° *qu'il n'y a pas des protons ayant une charge électrique négative, ou du moins qu'il n'y en avait pas pour  $\tau=0$ , c'est-à-dire lorsque  $\mathbf{P}(\tau)$  était égal à  $\mathbf{P}_0$ .*

On voit que l'existence des protons, neutrons et atomes d'hydrogène est essentiellement conditionnée par l'existence des deux constantes cosmologiques  $\lambda_g$  et  $\lambda_\omega$  des équations fondamentales (19 a) et (19 b). La constante cosmologique einsteinienne  $\lambda_g$  est d'ailleurs insuffisante pour démontrer l'existence et les propriétés des corpuscules lourds ; il faut lui associer l'autre constante cosmologique  $\lambda_\omega$  que la Relativité n'envisage pas, parce qu'elle n'étudie que les propriétés de la métrique interne. Ce fait est à mon avis une raison suffisante pour ajouter le système (19 b) au système einsteinien (19 a), indépendamment même de notre principe fondamental sur l'identité de l'existence physique et de l'existence mathématique non-arbitraire, dont la traduction mathématique est précisément le système d'équations (19 a)+(19 b).

La masse des protons, neutrons et atomes d'hydrogène, que nous avons déduit théoriquement, est, d'après le raisonnement même qui démontre l'existence de ces corpuscules, une limite supérieure pour la masse pesante des corpuscules lourds non-élémentaires qui peuvent exister dans l'Univers. En parlant de corpuscules lourds non-élémentaires nous ne pensons évidemment pas aux noyaux des atomes, qui ne sont que des ensembles de protons et de neutrons, réunis par l'inter-

action d'échange (de mésons) entre protons et neutrons. Si à chaque moment du temps cosmique le processus de réunion d'électrons qui donne lieu aux corpuscules lourds (protons et neutrons) était complètement achevé comme pour  $\tau=0$ , alors il n'y aurait jamais dans l'Univers des corpuscules de masse pesante intermédiaire entre celle de l'électron et celle des protons et neutrons. L'existence, expérimentalement bien établie, des « électrons lourds » (appelés aussi mésons), prouve justement que le processus fondamental dont il est question n'était pas complètement achevé pour  $\tau=0$  (c'est-à-dire lorsque  $\mathbf{P}=\mathbf{P}_0$ ), ou bien qu'il ne l'est plus. Les mésons rentrent donc facilement dans notre théorie et doivent nécessairement être interprétés *comme des protons et neutrons incomplets, très probablement en voie de désagrégation (perdant donc peu à peu leurs électrons constituants)*.

Nous ne voulons pas développer dans ce mémoire les conséquences cosmogoniques des résultats de ce paragraphe et passons à la détermination de la valeur du coefficient  $\mathfrak{A}$  de la relation (169) entre les charges propres des corpuscules véritablement élémentaires et les valeurs propres de l'opérateur laplacien associé à la forme métrique externe de l'Univers. Pour faire cette détermination, il suffit d'utiliser la relation (192) et de se rappeler que l'on a (175) dans  $F_0$  et  $\beta_n = \mathbf{P}_0 \alpha_n$ . On obtient alors immédiatement :

$$(199) \quad \mathfrak{A} = \frac{b}{16 \pi \sqrt{N_l^0}}$$

ou bien si on pose  $b=1$  comme précédemment :

$$(200) \quad \mathfrak{A} = \frac{1}{16 \pi \sqrt{N_l^0}}.$$

Il va de soi qu'il ne faut pas confondre les charges électriques propres des corpuscules élémentaires, données par (170), avec les charges électriques au sens classique, de même qu'il est essentiel de ne pas confondre les masses propres cosmologiques  $(m_0)_n$  avec les masses pesantes (ou d'inertie) classiques. Les charges électriques au sens classique  $[(e_n)_{cl}]$  des corpuscules élémentaires sont reliées à la fonction  $U$  (appelée énergie électromagnétique externe dans le § 3) par la formule :

$$(201) \quad \frac{1}{8\pi} \left| \frac{\chi \omega \bar{U}_n}{(K\omega)_{cl} (e_n)_{cl}} \right| = \frac{|e|}{(m_0)_e c^2}$$

qui est une généralisation immédiate de (188) et où  $e$  et  $(m_0)_e$  représentent comme toujours la charge et la masse (au sens classique) de

l'électron. On voit donc que les charges au sens classique tendent rapidement vers zéro quand  $n \rightarrow \infty$ , puisque tel est le cas pour  $U_n$ , contribution de  $e_n$  à la valeur de  $U$ . Les charges  $e_n$  (qu'on peut appeler charges propres élémentaires cosmologiques) tendent au contraire vers l'infini quand  $n \rightarrow \infty$ . Comme les masses propres cosmologiques, les charges électriques au sens classique  $(e_n)_{cl}$  ne sont sensibles que pour les toutes premières valeurs de l'indice de numérotage des valeurs propres  $(\alpha_n, \beta_n)$  des opérateurs laplaciens, et spécialement pour  $n=1$ , qui correspond à l'électron. C'est donc seulement pour l'électron que la charge au sens classique, donnée, d'après (201), par :

$$(e_n)_{cl} = \gamma \chi_{\omega} (m_0)_c c^2 \bar{U}_n \frac{1}{8\pi |e|}$$

se confond pratiquement avec la charge propre cosmologique; c'est-à-dire :

$$e \equiv (e_1)_{cl} \approx e_1$$

et nous avons d'ailleurs posé  $e = e_1$  dans la détermination du coefficient  $\mathcal{A}$  de (170).

Avant de finir ce paragraphe il est intéressant de calculer le pourcentage (constant dans l'espace pour  $\tau=0$ ) de protons, c'est-à-dire le rapport  $\frac{N_p^0}{N_l^0}$ ,  $N_p^0$  étant le nombre total de protons dans l'Univers pour  $\tau=0$ . De la relation (181) et de l'équation (183) dans laquelle on pose  $\omega'_{ii} = 0$ , puisque  $\tau=0$ , on déduit immédiatement :

$$\frac{N_p^0}{N_l^0} = \frac{1}{N_l^0} \pi \mathbf{P}_0^3 \gamma \chi_{\omega} (m_0)_c c^2 = \frac{\pi b}{4N_l^0} \mathbf{P}_0 \frac{(m_0)_c c^2}{e^2},$$

et la relation (192) donne alors ( $a=b=1$ ) :

$$(202) \quad \frac{N_p^0}{N_l^0} = \frac{1}{\sqrt{N_l^0}}$$

c'est-à-dire la valeur numérique suivante pour  $N_p^0/N_l^0$  :

$$(203) \quad \frac{N_p^0}{N_l^0} = 1,7 \times 10^{-10}.$$

Il y avait donc environ 1 proton pour  $0,6 \times 10^{10}$  corpuscules lourds (neutrons + atomes d'hydrogène + protons) dans l'Univers au début de sa phase expansive.



## IV — MÉCANIQUE ONDULATOIRE COSMOLOGIQUE

1. Ondes et corpuscules. Principes fondamentaux de la mécanique ondulatoire cosmologique. La dualité ondes-corpuscules, qui est fondamentale pour la mécanique ondulatoire «classique», se retrouve dans notre théorie cosmologique et permet d'en déduire une mécanique ondulatoire relativiste et cosmologique en accord avec la relativité générale. On doit remarquer dès maintenant qu'il y a dans la théorie cosmologique deux sortes de fonctions ondulatoires pour «un corpuscule» de masse propre  $(m_0)_n$  et de charge électrique propre  $\pm e_n$  (ce sont d'une part les fonctions propres  $\Psi_{mn}$  de l'opérateur laplacien  $\Delta$  qui correspond à la métrique interne et à  $(m_0)_n$ , et d'autre part les fonctions propres  $\Phi_{mn}$  de l'opérateur laplacien  $\Delta_\omega$  qui correspond à la métrique externe et à  $\pm e_n$ ), tandis que la mécanique ondulatoire classique ne considère que des fonctions d'onde d'une seule sorte.

Les  $\Psi_{mn}$  et  $\Phi_{mn}$  satisfont, comme on sait, aux équations (38) et (50). Les équations (38) peuvent évidemment être interprétées comme des «équations de Dirac» généralisées, compatibles avec la relativité générale, tandis que les équations (50) sont des «équations de Dirac» généralisées relatives à la forme métrique externe, d'où nous avons déduit toutes les grandeurs électromagnétiques.

Il faut attirer ensuite l'attention sur un autre point essentiel, à savoir : tandis que l'introduction des quatre fonctions d'onde qui satisfont aux équations de Dirac dans la mécanique ondulatoire «classique» de l'électron est arbitraire et ne se justifie que par ses conséquences, l'existence de quatre fonctions d'onde linéairement indépendantes satisfaisant à des équations de Dirac généralisées, pour chaque valeur propre  $\alpha_n$  du laplacien ou  $\beta_n$  de l'opérateur  $\Delta_\omega$ , est un des points fondamentaux de la théorie cosmologique et fait l'objet de l'un de ses théorèmes.

Comme les fonctions d'onde  $\Psi_{mn}$  et  $\Phi_{mn}$  sont des fonctions propres non-arbitraires des opérateurs  $\Delta$  et  $\Delta_\omega$ , toute opération de normalisation qu'on ferait subir à ces fonctions leur ferait perdre évidemment leur caractère absolument non-arbitraire (c'est-à-dire ferait en sorte que leur valeur en chaque point ne pourrait plus être entièrement déterminée par la métrique, interne ou externe, de l'espace-temps et par la connaissance de la surface frontière de l'espace-temps). Les fonctions d'onde ne pouvant être soumises à des opérations de normalisation, il est impossible de leur accorder, comme aux fonctions d'onde de la mécanique ondulatoire classique, le caractère de fonctions de probabilité de présence des masses élémentaires  $(m_0)_n$  ou des charges

électriques élémentaires  $\pm e_n$ ). Ceci est tout-à-fait naturel, puisqu'on ne voit pas comment pourraient intervenir des fonctions de probabilité pour décrire les phénomènes essentiels dans un Univers que la théorie cosmologique identifie complètement à l'être mathématique non-arbitraire. Il serait absurde d'accorder aux  $\Psi_{mn}$  et aux  $\Phi_{mn}$  la signification de fonctions de probabilité, alors qu'on forme avec les  $\Psi_{mn}$  le tenseur  $T_{ik}$  d'énergie-quantité de mouvement et avec les  $\Phi_{mn}$  le tenseur électromagnétique  $U_{ik}$  des équations fondamentales (19 a) et (19 b) de l'être mathématique non-arbitraire.

Nous avons appris (voir les §§ 6 et 10 du chap. II et tout le chap. III) à déduire des  $\Psi_{mn}$  et des  $\Phi_{mn}$  d'importantes grandeurs scalaires, vectorielles, tensorielles, dont nous avons donné l'interprétation physique. En particulier, toutes les grandeurs électromagnétiques sont formées uniquement avec les  $\Phi_{mn}$  et les valeurs propres correspondantes  $\beta_n$  (charges électriques propres). Mais nous devons maintenant chercher à déterminer la signification des fonctions d'onde  $\Psi_{mn}$  et  $\Phi_{mn}$  au point de vue de la présence des corpuscules élémentaires dans un élément de volume de l'Univers. La réponse à cette question va résoudre non seulement la question de l'interprétation physique des fonctions d'onde en elles-mêmes, mais encore le problème de la «position des corpuscules».

Pour résoudre ce problème, il faut d'abord indiquer les équivalents cosmologiques des deux principes fondamentaux de la mécanique ondulatoire <sup>1</sup>:

*Premier principe.* Les valeurs que peut prendre une grandeur (propriété intrinsèque ou extrinsèque) attachée à un corpuscule élémentaire sont les valeurs propres de l'opérateur linéaire et hermitique correspondant.

*Remarque.* Il faut distinguer, comme nous l'avons déjà dit, entre opérateurs complets (ou spatio-temporels) et opérateurs incomplets. Dans le premier cas, les valeurs propres correspondantes représentent des propriétés intrinsèques des corpuscules élémentaires; dans l'autre cas, les valeurs propres correspondantes représentent des propriétés extrinsèques des corpuscules élémentaires.

Comme exemples de propriétés intrinsèques, on peut citer les deux plus importantes: la masse propre  $(m_0)_n$  et la charge électrique propre  $(\pm e_n)$  qui correspondent respectivement aux opérateurs  $\Delta$  et  $\Delta_\omega$

<sup>1</sup> Cf. par exemple les ouvrages de L. de Broglie, surtout «L'électron magnétique», pag. 209 et suivantes, Hermann, Paris, 1934.

et que nous avons étudié en détail. Comme exemples de propriétés extrinsèques, on peut citer la position des corpuscules élémentaires, leur quantité de mouvement, leur spin, les fréquences propres de leurs vibrations dans un système, etc., chaque propriété correspondant à un opérateur incomplet que nous déterminerons.

Avant d'énoncer le second principe fondamental de la mécanique ondulatoire cosmologique, il est nécessaire de définir l'intensité des différentes valeurs possibles d'une grandeur «attachée» à un corpuscule. Considérons par exemple le spectre de raies de l'atome d'hydrogène, c'est-à-dire le spectre des valeurs propres de l'opérateur qui correspond à la grandeur «fréquences propres de vibration de l'électron» dans un système formé par un électron négatif et un proton. Pour caractériser complètement le spectre, il faut connaître non seulement la fréquence des raies mais aussi leur intensité, ceci en faisant abstraction de leur largeur. On peut donc dire qu'à chaque terme du spectre des valeurs propres de l'opérateur «fréquence des vibrations de l'électron dans l'atome d'hydrogène» est attaché un nombre (ou une fonction) qui est l'intensité de chaque valeur propre de l'opérateur fréquence. Ce fait est général, et on peut dire qu'à chaque valeur possible d'une grandeur attachée à un corpuscule élémentaire, et qui correspond à un certain opérateur, est associé un nombre (ou une fonction) qui représente l'intensité des différentes valeurs possibles de la grandeur, c'est-à-dire l'intensité des différents termes du spectre (discontinu et continu) des valeurs propres de l'opérateur correspondant.

Considérons maintenant les quatre fonctions propres  $\Psi_{mn}$  relatives à la valeur propre  $\alpha_n$  du laplacien. Ces fonctions peuvent s'écrire :  $\Psi_{mn} = \Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m)$ ,  $m$  étant au second membre une variable discontinue pouvant prendre les valeurs 1, 2, 3, 4. Soit  $O$  un opérateur complet ou incomplet dont nous désignons par  $a$  les valeurs propres et qui peut agir non seulement sur les variables spatio-temporelles, mais encore sur la variable discontinue  $m$ . Supposons que  $\Psi_n$  admet un développement suivant les fonctions propres  $\varphi$  de  $O$ . En désignant par  $\xi$  l'ensemble des variables continues et discontinues que  $O$  fait intervenir, et par  $\tau$  l'ensemble des variables que  $O$  ne fait pas intervenir, le développement en question peut s'écrire :

$$(204) \quad \Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = \sum_{\mu, \nu} c_{\mu\nu}^n(\tau) \varphi_{\mu\nu}(\xi) + \sum_{\delta a, \nu} c_{\nu}^n(a, \tau) \left[ \frac{1}{\delta a} \int_a^{a+\delta a} \varphi_{\nu}(a, \xi) da \right] \delta a,$$

l'intégrale se rapportant au spectre continu, l'indice  $\mu$  servant à numé-

roter les valeurs propres du spectre discontinu de  $O$  et l'indice  $\nu$  les fonctions propres linéairement indépendantes de  $O$  pour chacune de ses valeurs propres. De même, nous pourrons écrire comme suit le développement des quatre fonctions propres  $\Phi_{mn}$  de l'opérateur  $\Delta_\omega$  suivant les fonctions propres de  $O$ :

$$(205) \quad \Phi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = \sum_{\mu, \nu} (c_\omega^\mu)_{\mu\nu} [\eta] \varphi_{\mu\nu}(\xi) + \sum_{\delta a, \nu} (c_\omega^\nu)_\nu [a, \eta] \left[ \frac{1}{\delta a} \int_a^{a+\delta a} \varphi_\nu(a, \xi) da \right] \delta a.$$

Convenons maintenant de représenter par  $\int dm$  une sommation par rapport à l'indice  $m$  lorsque  $n$  comprend cette variable discontinue, c'est-à-dire lorsque  $O$  n'agit pas sur  $m$ . Ceci étant dit, le second principe de la mécanique ondulatoire cosmologique s'énonce comme suit, pour les corpuscules élémentaires de fonctions d'onde  $\Psi_{mn}$  et  $\Phi_{mn}$ :

*Second principe.* 1<sup>o</sup>). Dans le spectre discontinu d'un opérateur linéaire et hermitique  $O$  qui correspond à une grandeur non électromagnétique (grandeur mécanique) attachée aux corpuscules, l'intensité de l'une quelconque des valeurs possibles de cette grandeur est la somme  $\int \sum_\nu |c_{\mu\nu}^\nu(\eta)|^2 dm$  des carrés des modules des coefficients de  $\varphi_{\mu\nu}$  dans le développement de  $\Psi_n$  suivant les fonctions propres de  $O$ . Dans le spectre continu, l'intensité des valeurs de la grandeur, comprises entre  $a$  et  $a + \delta a$ , est la quantité  $\int \sum_\nu |c_\nu^\nu(a, \eta)|^2 \delta a dm$ .

2<sup>o</sup>). Dans le spectre discontinu d'un opérateur linéaire et hermitique  $O_\omega$  qui correspond à une grandeur électromagnétique attachée aux corpuscules, l'intensité de l'une quelconque des valeurs possibles de cette grandeur est la somme  $\int \sum_\nu |(c_\omega^\nu)_{\mu\nu} [\eta]|^2 dm$  des carrés des modules des coefficients de  $\varphi_{\mu\nu}$  dans le développement de  $\Phi_n$  suivant les fonctions propres de  $O_\omega$ . Dans le spectre continu, l'intensité des valeurs de la grandeur, comprises entre  $a$  et  $a + \delta a$ , est la quantité  $\int \sum_\nu |(c_\omega^\nu)_\nu [a, \eta]|^2 \delta a dm$ .

Considérons, par exemple, l'intensité des masses propres des corpuscules élémentaires, c'est-à-dire l'intensité des valeurs propres du laplacien. Dans ce cas, le développement (204) se réduit à:

$$\Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = \Psi_{mn}(x^1, x^2, x^3, x^4),$$

et l'on a pour expression de l'intensité de la masse propre  $(m_0)_n$  dans le spectre des masses propres :

$$\int \sum_m |c_{mn}^n|^2 dm = 4.$$

De même l'intensité de la charge électrique propre  $e_n$  dans le spectre des charges électriques propres (opérateur  $\Delta_\omega$ ) est donnée par :

$$\int \sum_m |(e_\omega)_{mn}^n|^2 dm = 4.$$

Nous pouvons maintenant traiter le problème de la «*position des corpuscules*». Cherchons d'abord les valeurs propres de l'opérateur qui correspond à la grandeur extrinsèque «*coordonnée  $x^i$  d'une masse propre élémentaire  $(m_0)_n$* ». Cet opérateur n'est autre que la coordonnée  $x^i$  elle-même et l'équation de ses fonctions et valeurs propres s'écrit :

$$x^i \varphi = a^i \varphi.$$

La solution est la fonction de Dirac  $\delta(x^i - a^i)$  dont on connaît les propriétés. L'opérateur  $x^i$  a donc un spectre purement continu (ce qui est évident, puisque les masses propres élémentaires peuvent prendre toutes les positions), et comme les «*différentielles propres*» :

$$\frac{1}{\delta a^i} \int_{a^i}^{a^i + \delta a^i} \delta(x^i - a^i) da^i$$

forment un système de fonctions orthonormales complet, on peut écrire

$$\Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = \Psi_n(a^i, \eta) = c^n(a^i, \eta)$$

D'après le second principe, l'intensité des valeurs de la coordonnée  $x^i$  des masses élémentaires  $(m_0)_n$ , comprises entre  $a^i$  et  $a^i + \delta a^i$ , est alors donnée par :

$$\int |c^n(a^i, \eta)|^2 \delta a^i dm \equiv \sum_m |c^n(a^i, \eta)|^2 \delta a^i = \sum_m |\Psi_n(a^i, \eta)|^2 \delta a^i = \sum_m \Psi_{mn}^2 \delta a^i.$$

Cette quantité est donc l'*intensité de la présence* d'un corpuscule élémentaire (de masse propre  $(m_0)_n$ ) entre  $x^i = a^i$  et  $x^i = a^i + \delta a^i$ . L'intensité de la présence d'un corpuscule élémentaire de masse propre  $(m_0)_n$  dans l'élément de volume d'espace  $\delta x^1 \delta x^2 \delta x^3$  autour du point  $P(x^1, x^2, x^3, x^4)$  est donc la quantité  $\sum_m \Psi_{mn}^2(x^1, x^2, x^3, x^4) \delta x^1 \delta x^2 \delta x^3$  et l'on peut dire que  $\sum_m \Psi_{mn}^2$  est la *densité d'intensité de présence* d'un corpuscule élémentaire.

taire de masse propre  $(m_0)_n$ . Il est alors évident que les points des sections spatiales de l'espace-temps qui sont effectivement occupés, pour une certaine valeur de  $x^4$ , par les corpuscules élémentaires de masse propre  $(m_0)_n$  sont les points où la densité d'intensité de présence  $\sum_m \Psi_{mn}^2$  est maxima. Ces points engendrent, dans l'espace-temps, des lignes, qui sont les lignes d'Univers ou trajectoires d'espace-temps des corpuscules élémentaires de masse propre  $(m_0)_n$ .

Le raisonnement précédent peut être répété sans changement avec les fonctions propres  $\Phi_{mn}$  pour arriver à la notion de *densité d'intensité de présence des corpuscules élémentaires de charge électrique propre*  $\pm e_n$ . Cette densité est évidemment la fonction  $\sum_m \Phi_{mn}^2$ , de sorte que les points des sections spatiales de l'espace-temps qui sont effectivement occupés, pour une certaine valeur de  $x^4$ , par les corpuscules élémentaires de charge électrique propre  $\pm e_n$  sont les points où la fonction  $\sum_m \Phi_{mn}^2$  est maxima. Ces points engendrent donc, dans l'espace-temps, les lignes d'Univers des corpuscules élémentaires de charge électrique propre  $\pm e_n$ .

Du fait que les maxima de  $\sum_m \Phi_{mn}^2$  ne coïncident que fortuitement avec les maxima de  $\sum_m \Psi_{mn}^2$  sur les sections spatiales de l'espace-temps, on peut déduire de ce qui précède un très important résultat: *les points des sections spatiales de l'espace-temps où se trouvent les masses propres élémentaires  $(m_0)_n$  ne coïncident que fortuitement avec les points où se trouvent les charges électriques élémentaires  $\pm e_n$* . En d'autres termes, le corpuscule «élémentaire» électrisé classique, doué d'une certaine masse propre non-nulle et d'une charge électrique propre est toujours en réalité *un couple* de corpuscules ponctuels véritablement élémentaires, l'un avec une masse propre  $(m_0)_n$  et sans charge électrique, l'autre avec une charge électrique  $\pm e_n$  et sans masse propre, ces deux corpuscules ne coïncidant qu'accidentellement mais restant en général très rapprochés l'un de l'autre, comme nous allons le voir immédiatement. Considérons les deux équations (45) et (48) des fonctions propres des opérateurs  $\Delta$  et  $\Delta_\omega$ :

$$(45) \quad \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \Psi_{mn}}{\partial x^k} \right) = \alpha_n \Psi_{mn},$$

et:

$$(48) \quad \frac{1}{\sqrt{\omega}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{\omega} \omega^{ik} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x^k} \right) = \beta_n \Phi_{mn}.$$

On sait que les  $\alpha_n$  sont proportionnels aux carrés des masses propres élémentaires et que les  $\beta_n$  sont proportionnels aux carrés des charges propres élémentaires. Supposons que l'espace-temps satisfait à la condition (158) :  $\omega_{ik} = \gamma g_{ik}$ . L'équation (48) devient.

$$\frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial x^i} \left( \sqrt{g} g^{ik} \frac{\partial \Phi_{mn}}{\partial x^k} \right) = \chi_i \beta_n \Phi_{mn},$$

de sorte que ses fonctions propres deviennent identiques aux fonctions propres de l'équation (45) et d'autre part  $\alpha_n = \gamma \beta_n$ . Dans ce cas, la densité d'intensité de présence des masses propres élémentaires est égale en chaque point de l'espace-temps à la densité d'intensité des charges électriques élémentaires. En d'autres termes, tout corpuscule élémentaire de masse propre  $(m_0)_n$  et sans charge coïncide alors constamment avec un corpuscule élémentaire sans masse propre et de charge électrique propre  $\pm e_n$  (pour la même valeur de  $n$ ), de sorte que la notion de corpuscule élémentaire électrisé classique se confond, dans ces conditions, avec la conception de corpuscule élémentaire qui découle de la théorie cosmologique. Or, on sait que l'espace-temps satisfait effectivement, en première approximation, à la condition  $\omega_{ik} = \gamma g_{ik}$ , ce qui permet d'affirmer qu'en général à un point où se trouve un corpuscule neutre de masse  $(m_0)_n$  correspond un point très rapproché où se trouve un corpuscule sans masse et de charge  $\pm e_n$  (pour la même valeur de  $n$ ), l'éloignement de ces deux points étant d'ailleurs d'autant plus grand que les variations de la courbure moyenne de l'espace-temps sont plus grandes.

Pour compléter l'étude de la position des corpuscules élémentaires, il faut déterminer quels sont, parmi les maxima de la densité d'intensité de présence  $\sum_m \Phi_{mn}^2$  des charges électriques élémentaires, ceux qui sont occupés par des corpuscules élémentaires de charge négative  $-e_n$  et ceux qui, par contre, sont occupés par des corpuscules élémentaires de charge  $+e_n$  (égale et de signe contraire). Considérons à nouveau l'équation électromagnétique (168). La densité de charge électrique étant, d'après cette équation, égale, à un facteur constant positif près, à la quantité  $-\sqrt{\beta_n} \Phi_{mn} \epsilon_0^4 \epsilon_{nq}^4 \Phi_n^m$ , on voit immédiatement qu'un maximum de la densité d'intensité de présence des charges élémentaires est occupé par un corpuscule à charge négative lorsque la fonction  $\Phi_{mn} \epsilon_0^4 \epsilon_{nq}^4 \Phi_n^m$  est positive et inversement. Prenons les axes «géodésiques» locaux  $q^1, q^2, q^3$  dans leur orientation principale relative à la valeur propre  $\beta_n$  de l'opérateur  $\Delta_\omega$ ; les supports des axes locaux  $q^1$  et  $q^4$  sont alors en coïncidence et nous dirigerons  $q^1$  vers les «temps propres» croissants

des charges. Dans ces conditions, la fonction  $\Phi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_{nq}^i \Phi_n^m$  devient égale en valeur absolue à la densité d'intensité de présence  $\sum_m \Phi_{mn}^2$  des corpuscules, car on a maintenant  $\epsilon_0^i \epsilon_{nq}^i = \pm 1$ , ou bien, d'après la transformation (51):  $\frac{\partial q^i}{\partial q_n^i} = \pm 1$ . Un maximum de la densité d'intensité de présence des charges est donc occupé par un corpuscule élémentaire de charge  $-e_n$  (ou  $+e_n$ ) si l'on a en ce maximum  $\frac{\partial q^i}{\partial q_n^i} = +1$  (ou  $\frac{\partial q^i}{\partial q_n^i} = -1$ ).

Remarquons qu'avec cette orientation des axes locaux  $q^i$ , la contribution des corpuscules à la densité partielle ( $U_n^{4i}$ ) d'énergie électromagnétique «externe» est nulle, d'après l'expression (55) du tenseur  $U^{ik}$ , mais il y a forcément autour des corpuscules, et dans leur voisinage immédiat, une surface fermée, presque sphérique, où  $U_n^{4i}$  est maximum. Il y a donc autour des corpuscules une sorte de «barrière» d'énergie marquant la limite de ce que la conception classique désigne par corpuscule élémentaire, alors que le véritable corpuscule élémentaire doit être considéré comme rigoureusement ponctuel.

D'après l'équation (168), l'espace-temps peut être divisé en régions occupées par des charges négatives et en régions occupées par des charges positives. Cette distribution continue de charges est en quelque sorte l'«écho» de la présence des charges des corpuscules élémentaires, mais n'est pas une fonction ou grandeur «attachée» aux corpuscules, au même titre que les charges propres  $\pm e_n$  (Voir § 2).

Il en est de même pour les masses propres  $(m_0)_n$ . Si nous considérons en effet l'équation de continuité des masses (82), qu'on peut écrire comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial \rho^i} (\sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^i \Psi_n^m) = -\text{div}_s (\sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^i \Psi_n^m)$$

on voit immédiatement que tout se passe comme si des masses de densité égale, à un facteur constant positif près, à  $\sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^i \Psi_n^m$  se trouvaient répandues d'une manière continue dans l'espace-temps. On peut du reste, d'après (39), admettre que certains maxima de la densité d'intensité de présence des masses propres (ceux pour lesquels on a  $\Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^i \Psi_n^m > 0$ ) sont occupés par des corpuscules élémentaires de masse propre positive  $+(m_0)_n$ , tandis que d'autres maxima (ceux pour lesquels on a  $\Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^i \Psi_n^m < 0$ ) sont occupés par des corpuscules élémentaires de masse propre négative  $-(m_0)_n$ . D'une manière analogue à ce que nous avons fait pour les corpuscules d'électricité, prenons



les axes géodésiques locaux  $\varphi^1, \varphi^2, \varphi^3$  dans leur orientation principale  $\varphi_n^1, \varphi_n^2, \varphi_n^3$  relative à la valeur propre  $\alpha_n$  du laplacien ; les supports des axes locaux  $\varphi^i$  et  $\varphi^n$  sont alors en coïncidence et nous dirigerons  $\varphi^4$  vers les « temps propres » croissants des masses. Dans ces conditions, la fonction  $\Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^m \Psi_n^m$  devient égale, en valeur absolue, à la densité d'intensité de présence  $\sum_m \Psi_{mn}^2$  des corpuscules, car on a maintenant  $\epsilon_0^i \epsilon_n^i = \pm 1$ ,

ou bien, d'après (39) :  $\frac{\partial \varphi^4}{\partial \varphi_n^4} = \pm 1$ . Un maximum de la densité d'intensité

de présence des masses élémentaires est donc occupé par un corpuscule de masse propre  $+(m_0)_n$  (ou  $-(m_0)_n$ ) si l'on a en ce maximum  $\frac{\partial \varphi^4}{\partial \varphi_n^4} = +1$  (ou  $\frac{\partial \varphi^4}{\partial \varphi_n^4} = -1$ ). Remarquons aussi qu'avec cette orientation

des axes locaux  $\varphi^i$ , la contribution des masses propres à la densité partielle ( $T_n^{44}$ ) d'énergie est nulle sur les corpuscules, d'après l'expression (44) du tenseur  $T^{ik}$ , mais il y a forcément autour des corpuscules et dans leur voisinage immédiat une « barrière » d'énergie (surface fermée sur laquelle  $T_n^{44}$  est maximum).

Les équations (130) montrent que la densité de masse (positive et négative) joue par rapport au champ des « moments de rotation et de translation des masses » le même rôle que la densité de charge par rapport au champ électromagnétique. L'existence de masses propres positives et négatives permet seule d'ailleurs de comprendre le phénomène, expérimentalement bien établi, de l'apparition et de la disparition par paires de corpuscules de même masse (absolue) et de charges électriques contraires.

La solution que nous venons de donner du problème de la position des corpuscules assigne à chaque corpuscule élémentaire une position et une vitesse bien définies à chaque instant. Ce fait est cependant parfaitement compatible, comme nous le verrons plus loin, avec les relations d'Heisenberg sur les incertitudes inévitables dans les *mesures simultanées* de la position et de la vitesse d'un corpuscule élémentaire. Il faut enfin souligner le fait que la théorie cosmologique établit une distinction radicale entre masse et électricité. Il n'y a pas de corpuscule élémentaire ayant à la fois une masse et une charge électrique, sauf si l'espace-temps satisfaisait rigoureusement à  $\omega_{ik} = \gamma g_{ik}$  ( $\gamma = \text{constante}$ ), mais même alors il faudrait plutôt dire que les corpuscules élémentaires neutres et de masse propre non nulle occuperaient les mêmes points de l'espace-temps que les corpuscules élémentaires dénués de masse et de charge électrique non nulle.

2. Grandeurs attachées aux corpuscules élémentaires et champs d'espace-temps correspondants. Dans le paragraphe précédent, nous avons déjà rencontré deux champs d'espace-temps qui correspondent aux masses propres et deux autres champs qui correspondent aux charges propres. Il s'agit des densités d'intensité de présence  $\sum_m \Psi_{mn}^2$  et  $\sum_m \Phi_{mn}^2$  des masses et des charges et des densités de masse  $\sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^i \Psi_{mn}^m$  et de charge électrique  $\sqrt{\beta_n} \Phi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^i \Phi_{mn}^m$ . Ce fait est général. A chaque opérateur dont les valeurs propres sont, d'après le premier principe de la mécanique ondulatoire cosmologique, les valeurs possibles d'une propriété ou grandeur attachée aux corpuscules, correspondent des champs d'espace-temps (densités de valeur moyenne). Soit  $O$  l'opérateur qui correspond à la propriété mécanique  $\alpha$  des corpuscules et appliquons l'opération (76) aux quatre fonctions propres  $\Psi_n = \Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m)$  de l'opérateur laplacien (fonctions d'onde des masses élémentaires  $(m_0)_n$ ). Il vient :

$$(206) \quad \bar{O}(\Psi_n) = \int_V \Psi_{mn} \cdot O \cdot \Psi_n^m dv,$$

avec une sommation par rapport à l'indice muet  $m$ . Nous dirons alors que les fonctions  $\Psi_{mn} \cdot O \cdot \Psi_n^m$  sont les champs d'espace-temps qui correspondent à la grandeur mécanique  $\alpha$ . De même, soit  $O_\omega$  l'opérateur qui correspond à une grandeur électromagnétique  $\alpha_\omega$  attachée aux corpuscules et dont les valeurs possibles sont les valeurs propres de  $O_\omega$ . Appliquons alors l'opération (76) aux quatre fonctions propres  $\Phi_n = \Phi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m)$  de l'opérateur  $\Delta_\omega$  (fonctions d'onde des charges élémentaires); il vient :

$$(207) \quad \bar{O}_\omega(\Phi_n) = \int_V \Phi_{mn} \cdot O \cdot \Phi_n^m dv,$$

avec une sommation par rapport à l'indice muet  $m$ . Nous dirons que les fonctions  $\Phi_{mn} \cdot O_\omega \cdot \Phi_n^m$  sont les champs d'espace-temps qui correspondent à la grandeur électromagnétique  $\alpha_\omega$  attachée aux corpuscules.

Considérons par exemple les opérateurs  $\sqrt{\alpha_n} \epsilon_0^i \epsilon_n^i = \sqrt{\alpha_n} \cdot I$  et  $\sqrt{\beta_n} \epsilon_0^i \epsilon_n^i = \sqrt{\beta_n} \cdot I$ . Les champs correspondants ( $\sqrt{\alpha_n} \sum_m \Psi_{mn}^2$  et  $\sqrt{\beta_n} \sum_m \Phi_{mn}^2$ ) ne sont autres, aux facteurs constants  $\sqrt{\alpha_n}$  et  $\sqrt{\beta_n}$  près, que les densités d'intensité de présence des masses et des charges élémentaires. De même, aux opérateurs  $i\sqrt{\alpha_n} \epsilon_0^i \epsilon_n^k$  et  $i\sqrt{\beta_n} \epsilon_0^i \epsilon_n^k$  qui sont, d'après les équations (38) et (50), identiques respectivement aux opérateurs  $-i\epsilon_0^i \epsilon_n^k \epsilon_n^j \frac{\partial}{\partial x^j}$

et  $-i\epsilon_0^i \epsilon_{nq}^k \epsilon_{ng}^j \frac{\partial}{\partial q^j}$ , correspondent les champs d'espace-temps  $i\sqrt{\alpha_n} \Psi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_n^m$

et  $i\sqrt{\beta_n} \Phi_{mn} \epsilon_0^i \epsilon_{nq}^k \Phi_n^m$  qui sont, à des facteurs positifs constants près, les densités des courants de masse et de charge électrique dont il a été question dans les §§ précédents.

3. Impulsion d'Univers, spin et «magnétisme propre» des corpuscules élémentaires. Nous allons chercher quels sont les opérateurs qui correspondent à ces différentes grandeurs intrinsèques et extrinsèques attachées aux corpuscules. Considérons d'abord l'impulsion d'Univers. Si on désigne par  $Y^k$  les coordonnées cartésiennes de Minkowski de l'espace-temps pseudo-euclidien, l'opérateur *covariant* de la mécanique ondulatoire classique qui correspond à l'impulsion d'Univers attachée à un corpuscule élémentaire a l'expression :

$$p_k = \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial Y^k}.$$

Comme dans la théorie cosmologique ce sont les axes locaux  $\varphi^k$  qui jouent le rôle des variables  $Y^k$ , l'opérateur «Impulsion d'Univers» de la mécanique ondulatoire cosmologique sera le suivant :

$$(208) \quad p_k = \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial \varphi^k}.$$

D'une manière générale, à tout opérateur de la mécanique ondulatoire classique construit avec les  $Y^k$  correspond un opérateur de la mécanique ondulatoire cosmologique obtenu en remplaçant les  $Y^k$  par les  $\varphi^k$ . Ainsi, par exemple, en associant les opérateurs  $p_k$  aux opérateurs  $\partial \varphi^k$  (qui représentent de petites longueurs mesurées, à partir de l'origine, sur les  $\varphi^k$ , de sorte que  $\frac{\partial \partial \varphi^k}{\partial \varphi^k} = 1$ ), on obtient l'équivalent cosmologique d'une importante relation opératorielle de la mécanique ondulatoire classique :

$$(209 a) \quad \partial_{\varphi^k} p_k - p_k \partial_{\varphi^k} = \frac{h}{2\pi}.$$

Considérons maintenant l'opérateur tensoriel :

$$(210 a) \quad i\epsilon_0^i \left( \epsilon_n^i \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \varphi_k} + \epsilon_n^k \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial \varphi_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \varphi_k} \epsilon_n^i - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial \varphi_i} \epsilon_n^k \right)$$

dans lequel les  $\rightarrow$  indiquent les fonctions auxquelles les opérateurs  $\frac{\partial}{\partial \xi_i}$  sont appliqués. Les champs d'espace-temps correspondants sont les tenseurs  $T_n^{ik}$  d'énergie-quantité de mouvement que figurent dans les équations fondamentales (19 a).

Il y a lieu de rappeler ici que la mécanique ondulatoire classique ne fait intervenir que les fonctions d'onde des corpuscules de masse (introduites d'ailleurs a priori), tandis que la mécanique ondulatoire cosmologique dispose des fonctions d'onde non-arbitraires  $\Psi_{mn}$  des masses élémentaires et  $\Phi_{mn}$  des charges électriques élémentaires. On peut alors faire correspondre à chaque opérateur mécanique construit avec les  $\xi^k$  un opérateur électromagnétique construit avec les  $q^k$ . Ainsi, par exemple, à côté de l'opérateur « Impulsion mécanique d'Univers » il y a lieu de considérer un opérateur « Impulsion électromagnétique » dont l'expression est évidemment :

$$(208 b) \quad (p_\omega)_k = \frac{h}{2\pi} \frac{\partial}{\partial q^k},$$

et dont les valeurs propres sont les valeurs possibles de l'impulsion électromagnétique d'Univers attachée à une charge élémentaire  $\pm e_n$ . Le champ d'espace-temps correspondant :

$$\frac{h}{2\pi} \Phi_{mn} \frac{\partial}{\partial q^k} \Phi_n^m,$$

est la densité d'impulsion électromagnétique d'Univers répandue dans l'espace-temps. De même, à l'opérateur (210 a) on peut faire correspondre l'opérateur :

$$(210 b) \quad i \epsilon_n^i \left( \epsilon_{nq}^i \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q^k} + \epsilon_{nq}^k \frac{\overrightarrow{\partial}}{\partial q_i} - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q^k} \epsilon_{nq}^i - \frac{\overleftarrow{\partial}}{\partial q_i} \epsilon_{nq}^k \right)$$

dont les champs d'espace-temps sont les tenseurs électromagnétiques  $U_n^{ik}$  qui figurent dans les équations fondamentales (19 b). Enfin, l'analogie électromagnétique de la relation opératorielle (209 a) s'écrit comme suit,

$$(209 b) \quad \partial q^k (p_\omega)_k - (p_\omega)_k \partial q^k = \frac{h}{2\pi}.$$

Il est intéressant de remarquer que les expressions (208) et (208 b) des opérateurs  $p_k$  et  $(p_\omega)_k$  permettent d'écrire comme suit les équations (38) et (50) en tenant compte de (156) e (170) :

$$-\frac{1}{c} \epsilon_n^j p_j \Psi_{mn} = (m_0)_n \Psi_{mn},$$

et :

$$-2\pi \sqrt{\frac{\partial c \delta_0}{h}} \epsilon_{nq}^j (p_\omega)_j \Phi_{mn} = e_n \Phi_{mn},$$

On voit donc que ce sont les opérateurs  $\frac{1}{c} \epsilon_n^j p_j$  et  $-2\pi \sqrt{\frac{\partial c \delta_0}{h}} \epsilon_{nq}^j (p_\omega)_j$  qui correspondent, sans coefficients constants, aux masses propres et aux charges électriques propres des corpuscules élémentaires.

Il est utile de remarquer que, du fait que les  $dz^i$  et les  $dq^i$  ne sont pas intégrables, la détermination des fonctions propres des opérateurs qui font intervenir les  $z^i$  et les  $q^i$  ne peut être faite qu'après avoir écrit ces opérateurs en coordonnées générales  $x^i$ . C'est ce que nous avons fait avec les opérateurs laplacien  $\Delta$  et  $\Delta_\omega$  (opérateur laplacien de la forme métrique externe), en passant des équations (45) et (47) aux équations (56) et (48).

Considérons maintenant les opérateurs  $\epsilon_0^i \gamma_n^{ijk}$  dont les valeurs propres sont  $\pm 1$ . Affectons ces opérateurs du coefficient constant  $\frac{h}{4\pi}$  (la raison de ce coefficient apparaîtra plus tard) et formons les opérateurs suivants :

$$(211) \quad \mathfrak{L}_n = \partial_{z^i} p_j - \partial_{z^j} p_i - \frac{h}{4\pi} \epsilon_0^i \gamma_n^{ijk}.$$

Ces opérateurs correspondent au «moment de rotation total» des corpuscules élémentaires, qui est égal à la somme du «moment de rotation orbital» (rapporté ici à un point infiniment voisin du corpuscule) et du «moment de rotation propre» ou «spin» des corpuscules (opérateurs  $-\frac{h}{4\pi} i \epsilon_0^i \gamma_n^{ijk}$ ). Les champs d'espace-temps qui correspondent au spin ont l'expression  $-\frac{h}{4\pi} \Psi_{mn}^* i \epsilon_0^i \gamma_n^{ijk} \Psi_m$ , de sorte qu'ils sont égaux (au facteur  $-\frac{h}{4\pi}$  près) aux vecteurs d'espace-temps  $W_n^i$  de densité de spin, que nous avons défini plus haut (tableau (79)) et qui satisfont aux relations (86). On a en effet :

$$W_n^i = \Psi_{mn}^+ \gamma_n^{ijk} \Psi_m = i \Psi_{mn}^* \epsilon_0^i \gamma_n^{ijk} \Psi_m,$$

et d'autre part (86) s'écrit :

$$\frac{\partial}{\partial z^i} \left( \frac{h}{4\pi} W_n^i \right) = -[(m_0)_n c] (I_2)_n.$$

Il est très intéressant de calculer les développements de

$$\Psi_n = \Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m)$$

suivant les fonctions propres des opérateurs qui interviennent dans ces valeurs des composantes de la densité de spin. Considérons, par exemple, l'opérateur  $-i\epsilon_0^4 \epsilon_0^2 \epsilon_0^3 \epsilon_0^1$  relatif à la composante de la densité de spin suivant  $\varphi_n^1$  et cherchons d'abord ses fonctions propres, qui sont les solutions  $\varphi_{\mu\nu}(m)$  de l'équation :

$$-(i\epsilon_0^4 \epsilon_0^2 \epsilon_0^3 \epsilon_0^1) \varphi_{\mu\nu}(m) = a_{\mu\nu} \varphi_{\mu\nu}(m) = -(i\epsilon_0^2 \epsilon_0^3) \varphi_{\mu\nu}(m).$$

En tenant compte des valeurs (36) des éléments des matrices  $\epsilon_0^2$  et  $\epsilon_0^3$  on trouve :

$$\begin{cases} i\varphi(3) = a\varphi(1); & -i\varphi(4) = a\varphi(2) \\ -i\varphi(1) = a\varphi(3); & i\varphi(2) = a\varphi(4) \end{cases}$$

d'où l'on déduit qu'il n'y a que les deux valeurs propres  $\pm 1$  et qu'il existe, pour chacune de ces valeurs propres, deux fonctions propres  $\varphi_{\mu 1}$  et  $\varphi_{\mu 2}$  définies par :

$$(212) \quad \begin{array}{l} \mu=1 \quad \begin{cases} \varphi_{11}(1) = -1; & \varphi_{11}(2) = -1; & \varphi_{11}(3) = -i; & \varphi_{11}(4) = i \\ \varphi_{12}(1) = -i; & \varphi_{12}(2) = i; & \varphi_{12}(3) = 1; & \varphi_{12}(4) = 1 \end{cases} \\ (a_{\mu} = -1) \left\{ \begin{array}{l} \mu=2 \quad \begin{cases} \varphi_{21}(1) = 1; & \varphi_{21}(2) = -i; & \varphi_{21}(3) = -i; & \varphi_{21}(4) = 1 \\ \varphi_{22}(1) = -i; & \varphi_{22}(2) = 1; & \varphi_{22}(3) = -1; & \varphi_{22}(4) = i. \end{cases} \end{array} \right. \\ (a_{\mu} = +1) \left\{ \begin{array}{l} \mu=2 \quad \begin{cases} \varphi_{21}(1) = 1; & \varphi_{21}(2) = -i; & \varphi_{21}(3) = -i; & \varphi_{21}(4) = 1 \\ \varphi_{22}(1) = -i; & \varphi_{22}(2) = 1; & \varphi_{22}(3) = -1; & \varphi_{22}(4) = i. \end{cases} \end{array} \right. \end{array}$$

Ces fonctions sont normées et orthogonales, car on a :

$$\int \varphi_{\mu\nu}^*(m) \varphi_{\mu'\nu'}(m) dm \equiv \sum_m \varphi_{\mu\nu}^*(m) \varphi_{\mu'\nu'}(m) = \begin{cases} 4 & \text{pour } \mu = \mu'; \nu = \nu' \\ 0 & \text{pour } \mu \neq \mu'; \nu \neq \nu' \end{cases}$$

D'après (204) le développement de  $\Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m)$  suivant les  $\varphi_{\mu\nu}$  s'écrit :

$$\Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = c_{11}^n(\eta) \varphi_{11}(m) + c_{12}^n(\eta) \varphi_{12}(m) + c_{21}^n(\eta) \varphi_{21}(m) + c_{22}^n(\eta) \varphi_{22}(m).$$

d'où l'on déduit, grâce à (212) :

$$\begin{cases} -4ic_{12}^n = (\Psi_{1n} - i\Psi_{3n}) - (\Psi_{2n} + i\Psi_{4n}); & -4c_{11}^n = (\Psi_{1n} - i\Psi_{3n}) + (\Psi_{2n} + i\Psi_{4n}), \\ 4ic_{22}^n = (\Psi_{4n} + i\Psi_{2n}) - (\Psi_{1n} + i\Psi_{3n}); & 4c_{21}^n = (\Psi_{4n} + i\Psi_{2n}) + (\Psi_{1n} + i\Psi_{3n}), \end{cases}$$

En appliquant le second principe fondamental de la mécanique ondulatoire cosmologique, on voit immédiatement que :

$$|c_{21}|^2 + |c_{22}|^2 = \frac{1}{16} \{ |\Psi_{1n} + \Psi_{4n}|^2 + |\Psi_{1n} - \Psi_{4n}|^2 + |\Psi_{2n} + \Psi_{3n}|^2 + |\Psi_{2n} - \Psi_{3n}|^2 \}$$

est l'intensité des valeurs positives ( $+h/4\pi$ ) de la composante du spin suivant  $q_n^1$  (axe local  $q^1$  dans son orientation principale) tandis que :

$$|c_{11}|^2 + |c_{12}|^2 = \frac{1}{16} \{ |\Psi_{1n} + \Psi_{2n}|^2 + |\Psi_{1n} - \Psi_{2n}|^2 + |\Psi_{3n} + \Psi_{4n}|^2 + |\Psi_{3n} - \Psi_{4n}|^2 \}$$

est l'intensité des valeurs négatives ( $-h/4\pi$ ) de la même composante du spin pour les corpuscules élémentaires de masse propre cosmologique  $(m_0)_n$ . Ces résultats, et ceux que l'on peut obtenir facilement en répétant le calcul précédent pour les autres composantes du spin, précisent la signification physique des fonctions d'onde non-arbitraires  $\Psi_{mn}$  des corpuscules élémentaires.

Aux opérateurs mécaniques (211) on peut faire correspondre les opérateurs électromagnétiques :

$$(213) \quad (\mathcal{W}_\omega)_n = \partial q^i (p_\omega)^j - \partial q^j (p_\omega)^i - \frac{h}{4\pi} i \epsilon_0^4 \gamma_{nq}^{ijk},$$

qui définissent un «moment de rotation électromagnétique total» des corpuscules élémentaires d'électricité, somme d'un «moment orbital de rotation» (rapporté ici à un point dans le voisinage du corpuscule) et d'un «moment de rotation électromagnétique propre» ou «spin électromagnétique» des corpuscules d'électricité (opérateurs  $i \epsilon_0^4 \gamma_{nq}^{ijk}$ ). Les champs d'espace-temps qui correspondent au spin électromagnétique

ont pour expression  $-\frac{h}{4\pi} \Phi_{mn}^* i \epsilon_0^4 \gamma_{nq}^{ijk} \Phi_n^m$ , de sorte qu'ils sont égaux, au facteur  $\frac{h}{4\pi}$  près, aux vecteurs d'espace-temps  $(W_\omega)_n^i$  de densité de spin

électromagnétique, que nous avons définis plus haut (tableau 80) et qui satisfont aux relations (87).

En plaçant les axes locaux  $q^i$  dans leur orientation principale en chaque point (pour une certaine valeur de l'indice  $n$ ) alors on a, par suite des relations (28) et en tenant compte de  $\epsilon_{nq}^i = \epsilon_0^i$  pour  $q^i = q_n^i$ :

$$\begin{aligned} (W_\omega)_n^1 &= i \Phi_{mn}^* \epsilon_0^2 \epsilon_0^3 \Phi_n^m, & (W_\omega)_n^3 &= i \Phi_{mn}^* \epsilon_0^1 \epsilon_0^2 \Phi_n^m, \\ (W_\omega)_n^2 &= i \Phi_{mn}^* \epsilon_0^3 \epsilon_0^1 \Phi_n^m, & (W_\omega)_n^4 &= i \Phi_{mn}^* \epsilon_0^4 \epsilon_0^2 \epsilon_0^1 \epsilon_0^3 \Phi_n^{*m}. \end{aligned}$$

Telles sont, pour  $q^i = q_n^i$ , les composantes de la densité de spin qui correspond aux corpuscules élémentaires d'électricité de charge propre cosmologique  $\pm e_n$ . En répétant le calcul fait plus haut, on voit que

$$\frac{1}{16} \{ |\Phi_{1n} + \Phi_{4n}|^2 + |\Phi_{1n} - \Phi_{4n}|^2 + |\Phi_{2n} + \Phi_{3n}|^2 + |\Phi_{2n} - \Phi_{3n}|^2 \}$$

est l'intensité des valeurs positives ( $+h/4\pi$ ) tandis que :

$$\frac{1}{16} \{ |\Phi_{1n} + \Phi_{2n}|^2 + |\Phi_{1n} - \Phi_{2n}|^2 + |\Phi_{3n} + \Phi_{4n}|^2 + |\Phi_{3n} - \Phi_{4n}|^2 \}$$

est l'intensité des valeurs négatives ( $-h/4\pi$ ) de la composante, suivant  $q_n^1$ , du spin électromagnétique. Ces résultats, et les résultats analogues pour les autres composantes, précisent la signification physique des fonctions d'onde non-arbitraires  $\Phi_{mn}$  des corpuscules élémentaires d'électricité.

Il nous reste à déterminer les moments magnétique et électrique des corpuscules d'électricité. Nous avons étudié, dans les paragraphes 2 et 3 du Chap. III, les tenseurs antisymétriques  $M_n^{ik}$  et  $(M_\omega)_n^{ik}$ , et nous avons vu qu'il faut attribuer aux  $M_n^{ik}$  la signification de tenseurs des moments de rotation et de translation qui correspondent aux corpuscules élémentaires sans charge et de masse propre  $(m_0)_n$ , tandis que les  $(M_\omega)_n^{ik}$  sont les tenseurs des champs électromagnétiques partiels qui correspondent aux corpuscules élémentaires d'électricité de charge  $\pm e_n$ . Ni les  $M_n^{ik}$ , ni les  $(M_\omega)_n^{ik}$  ne peuvent donc représenter les moments magnétique et électrique des corpuscules d'électricité, quels que soient d'ailleurs les facteurs constants dont on les affecte. Pour représenter les moments magnétique et électrique il reste donc une seule possibilité, qui consiste à former les tenseurs électromagnétiques  $(\mathcal{N}_\omega)_n^{ik} = \Phi_{mn}^+ \gamma_n^{ik} \Phi_n^m =$   
 $= \frac{i}{2} \Phi_{mn}^+ (\epsilon_n^i \epsilon_n^k - \epsilon_n^k \epsilon_n^i) \Phi_n^m$ . Les composantes de ces tenseurs, lorsqu'on

place les axes  $\zeta^i$  dans leur orientation principale, dépendent uniquement des fonctions contenus de base  $\Phi_{mn}$  et sont donc des grandeurs électromagnétiques. En les multipliant par les facteurs constants  $e_n h/4\pi (m_0)_n c$  (magnétons élémentaires de Bohr pour des corpuscules de charge  $e_n$ ), on obtient les tenseurs qui, dans la mécanique ondulatoire cosmologique, généralisent le tenseur des moments magnétique et électrique de la mécanique ondulatoire de l'électron de Dirac. Les opérateurs correspondants  $\frac{ie_n h}{8\pi (m_0)_n c} (\epsilon_n^j \epsilon_n^k - \epsilon_n^k \epsilon_n^j)$  n'ont que les deux valeurs propres  $\pm e_n h/4\pi (m_0)_n c$ .

Il est essentiel de remarquer que ces valeurs propres, de même que celles des spins mécanique et électromagnétique, n'ont pas d'existence physique réelle, puisqu'elles sont les valeurs propres d'opérateurs dont les fonctions propres ne sont pas des fonctions-contenus de l'être mathématique non-arbitraire. Il s'agit donc là de grandeurs purement mathématiques « attachées » aux corpuscules élémentaires, qu'il faut cependant



introduire dans la théorie cosmologique parce que les champs d'espace-temps et les intensités correspondantes sont doués d'existence physique et jouent d'ailleurs un rôle important dans l'Univers.

4. Grandeurs simultanément et non simultanément mesurables. Considérons les opérateurs linéaires et hermitiques dont les fonctions propres sont des fonctions-contenus de l'être mathématique non-arbitraire. Les valeurs propres des ces opérateurs sont alors douées d'existence physique et représentent les valeurs que peuvent prendre les propriétés intrinsèques ou extrinsèques réelles des corpuscules élémentaires. Ces grandeurs sont en principe *mesurables*, en entendant par *mesure précise d'une grandeur attachée à un corpuscule* une opération qui permet de déterminer la valeur propre de l'opérateur correspondant qui est effectivement réalisée sur le corpuscule en un point de sa ligne d'Univers. Ainsi donc, la condition nécessaire et suffisante pour qu'une mesure précise d'une grandeur soit possible en un point de la ligne d'Univers d'un corpuscule et donne pour cette grandeur la valeur  $a_\mu$  est que l'intensité de toutes les autres valeurs propres (différentes de  $a_\mu$ ) de l'opérateur qui correspond à cette grandeur soient nulles. C'est seulement en de tels points que l'on peut dire que l'une des valeurs propres est effectivement réalisée. Pour tous les autres points de la ligne d'Univers du corpuscule, toutes les valeurs propres existent simultanément, quoique d'une manière en quelque sorte virtuelle. Soit  $O_1$  l'opérateur qui correspond à une grandeur  $a_1$  attachée aux corpuscules. En un point de l'espace-temps où la mesure précise de  $a_1$  est possible, on a évidemment un développement de  $\Psi_n$  se réduisant à :

$$(214) \quad \Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = c_{\mu\nu}^{n1}(\eta)(\varphi_1)_{\mu\nu}(\xi)$$

$(\varphi_1)_{\mu\nu}$  étant les fonctions propres de  $O_1$ , s'il s'agit d'un corpuscule dénué de charge électrique et de masse propre  $(m_0)_n$ , ou bien un développement de  $\Phi_n$  se réduisant à :

$$(215) \quad \Phi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = b_{\mu\nu}^{n1}(\eta)(\varphi_1)_{\mu\nu}(\xi),$$

s'il s'agit d'un corpuscule d'électricité dénué de masse et de charge propre  $\pm e_n$ . Soit d'autre part  $O_2$  l'opérateur qui correspond à une autre grandeur  $a_2$  attachée aux corpuscules. En un point de l'espace-temps où la mesure précise de  $a_2$  est possible, on a le développement suivant :

$$(216) \quad \Psi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = c_{\mu\nu}^{n2}(\eta)(\varphi_2)_{\mu\nu}(\xi),$$

s'il s'agit des corpuscules dénués de charge et de masse propre  $(m_0)_n$ , et:

$$(217) \quad \Phi_n(x^1, x^2, x^3, x^4, m) = b_{\mu\nu}^{n2}(\tau) (\varphi_2)_{\omega\nu}(\xi),$$

s'il s'agit au contraire des corpuscules d'électricité de charge propre  $\pm e_n$ . Si la mesure simultanée, au même point de l'espace-temps, des grandeurs  $a_1$  et  $a_2$  est possible, on doit donc avoir en ce point:

$$\Psi_n = c_{\mu\nu}^{n1}(\tau) (\varphi_1)_{\mu\nu}(\xi) = c_{\mu\nu}^{n2}(\tau) (\varphi_2)_{\mu\nu}(\xi)$$

pour les corpuscules de masse propre  $(m_0)_n$ , et:

$$\Phi_n = b_{\mu\nu}^{n1}(\tau) (\varphi_1)_{\mu\nu}(\xi) = b_{\mu\nu}^{n2}(\tau) (\varphi_2)_{\mu\nu}(\xi),$$

pour les corpuscules d'électricité de charge  $\pm e_n$ . En tenant compte des équations  $O_1(\varphi_1)_{\mu\nu} = (a_1)_{\mu}(\varphi_1)_{\mu\nu}$ , et  $O_2(\varphi_2)_{\mu\nu} = (a_2)_{\nu}(\varphi_2)_{\mu\nu}$ , des fonctions et valeurs propres des opérateurs  $O_1$  et  $O_2$ , on déduit immédiatement de (214) et de (216) la condition:

$$O_1 O_2 = O_2 O_1.$$

Donc, pour que deux grandeurs soient simultanément mesurables (en un point de l'espace-temps), il faut et il suffit: 1° que les développements des fonctions d'onde suivant les fonctions propres des opérateurs correspondants se réduisent à (214) et (216) [ou (215) et (217)]; 2° que ces opérateurs soient permutables.

Les relations opératorielles (209 a) et (209 b) montrent donc que la position et la quantité de mouvement des corpuscules ne sont pas des grandeurs simultanément mesurables. La mesure simultanée de ces grandeurs comporte toujours des incertitudes, et l'on déduit de (209 a) les relations d'Heisenberg:

$$(218 a) \quad \delta p^i \delta p^i \geq h$$

qui ne sont applicables en toute rigueur qu'aux corpuscules dénués de charge électrique et de masse propre  $(m_0)_n$ , tandis qu'à (209 b) correspondent les relations:

$$(218 b) \quad \delta q^i \delta (p_\omega)^i \geq h,$$

applicables aux corpuscules élémentaires dénués de masse et de charge électrique propre  $\pm e_n$ . Si l'on avait exactement  $\omega_{ik} = \gamma g_{ik}$ , alors les relations (218 b) se confondraient avec les relations (218 a). On sait d'ailleurs que dans ce cas les corpuscules élémentaires de masse occuperaient constamment les mêmes points de l'espace-temps que les corpuscules élémentaires d'électricité.

La conception de mesure précise d'une grandeur introduite dans ce § appelle certaines remarques importantes. La théorie classique fait une distinction radicale entre observateur et processus observé, entre observateur et « monde extérieur », c'est-à-dire en somme entre sujet et objet. Dans la théorie cosmologique aucune distinction de ce genre n'est permise et n'a de sens. En effet, les fonctions-contenus fondamentales  $\Psi_{mn}$  et  $\Phi_{mn}$  de l'Univers, qui interviennent dans tout le développement de cette théorie, sont les fonctions d'onde de *tous* les corpuscules élémentaires de l'espace-temps et représentent les contenus de l'Univers, y compris tous ses observateurs et instruments de mesure. L'observation et la mesure précise d'une grandeur quelconque n'est pas une opération arbitraire agissant arbitrairement sur l'Univers; c'est au contraire un événement comme tous les autres événements qui se réalise en chaque point des lignes d'Univers des corpuscules élémentaires où les développements des fonctions d'onde non-arbitraires  $\Psi_{mn}$  (ou  $\Phi_{mn}$  s'il s'agit d'une grandeur électromagnétique) prennent la forme (214) ou (215).

5. Mécanique ondulatoire cosmologique des systèmes de corpuscules. Les équations fondamentales de la mécanique ondulatoire classique ne peuvent être écrites facilement que dans le cas d'un système formé par un seul corpuscule (le champ électromagnétique agissant sur le corpuscule jouant le rôle d'une donnée). Le problème se complique énormément dans le cas général des ensembles de corpuscules et il faut alors avoir recours à des artifices (introduction d'espaces de configuration, etc.) peu conformes à la réalité et jusqu'ici rebelles aux exigences de la Relativité. Rien de semblable n'arrive dans la Physique cosmologique parce que les fonctions-contenus de base  $\Psi_{mn}$  et  $\Phi_{mn}$ , invariants et absolument non-arbitraires, *sont les fonctions d'onde de l'ensemble des corpuscules élémentaires de l'Univers*. Il n'y a aucune distinction à faire ici entre le problème d'un corpuscule et le problème d'un ensemble de corpuscules; plus exactement, il n'y a ici, en toute rigueur, que le problème de l'ensemble des corpuscules élémentaires de l'Univers. En admettant que l'on a résolu préalablement le problème de l'intégration du système fondamental des équations (19 a) + (19 b) + (25) + (26) de l'être mathématique non-arbitraire et déterminé ensuite les solutions non-arbitraires des équations (45) et (48), tout problème que l'on peut se poser sur un système « matériel » quelconque ou sur ses rayonnements électromagnétiques et gravifiques se trouve par cela même résolu. Considérons par exemple un système quelconque d'atomes complexes émettant un rayonnement analysé par le

«spectrographe», qui détermine l'énergie du rayonnement en fonction de sa fréquence. La détermination théorique de cette fonction est immédiate si l'on a préalablement résolu le problème (cosmologique) de la détermination des fonctions propres non-arbitraires  $\Phi_{mn}$  de l'opérateur laplacien  $\Delta_\omega$  attaché à la forme métrique externe de l'Univers. En effet, si l'on connaît les  $\Phi_{mn}$  dans la région occupée par le système d'atomes dont il s'agit de déterminer le rayonnement, alors on connaît aussi dans cette région le tenseur électromagnétique du champ total  $M_\omega^{jk}$  qui, d'après (80), est donné par :

$$M_\omega^{jk} = \frac{i}{2} \sum_1^\infty \Phi_{mn}^+ (\epsilon_{nq}^j \epsilon_{nq}^k - \epsilon_{nq}^k \epsilon_{nq}^j) \Phi^{mn},$$

d'où l'on déduit, par les relations (138), les composantes des champs électrique et magnétique. De la décomposition des  $M_\omega^{jk}$  en intégrale de Fourier, qui correspond à la décomposition du rayonnement par le spectrographe, et qui s'écrit :

$$M_\omega^{jk} = \int_{-\infty}^{+\infty} \mu_\omega^{jk}(\nu) e^{2\pi i \nu t} d\nu$$

avec :

$$\mu_\omega^{jk}(\nu) = \int_0^{+\infty} M_\omega^{jk} e^{-2\pi i \nu t} dt$$

on déduit l'énergie du rayonnement en fonction de la fréquence  $\nu$ , car cette intensité est, d'après des résultats classiques, la fonction :

$$\frac{\overline{E}^2 + \overline{H}^2}{2}$$

où les barres indiquent des moyennes prises sur un grand nombre de périodes.

Pour ne pas allonger démesurément ce mémoire, nous devons arrêter ici l'exposé de la mécanique ondulatoire cosmologique. Nous espérons pouvoir reprendre sous peu cet exposé avec quelques questions importantes qui n'ont pu être traitées dans ce travail.

Décembre 1944.

## TABLE DES MATIÈRES

### I — PRÉLIMINAIRES

|  |   |
|--|---|
| 1. Les êtres mathématiques complets . . . . .        | 1 |
| 2. Les êtres mathématiques arbitraires . . . . .     | 2 |
| 3. Les êtres mathématiques non-arbitraires . . . . . | 3 |
| 4. L'existence physique . . . . .                    | 4 |

### II — ANALYSE DE L'ÊTRE MATHÉMATIQUE NON-ARBITRAIRE

|  |    |
|--|----|
| 1. Définitions . . . . .   | 5  |
| 2. Équations de l'être mathématique non-arbitraire . . . . .   | 9  |
| 3. Théorème: Le contenant d'un être mathématique non-arbitraire est un espace de Riemann à quatre dimensions et de classe un . . . . . | 11 |
| 4. Il n'existe qu'un seul être mathématique non-arbitraire dans l'ensemble $E_n$ . . . . .   | 12 |
| 5. Tableau des inconnues du problème de l'être mathématique non-arbitraire . . . . .   | 13 |
| 6. Détermination des fonctions-contenus tensorielles $T_{ik}$ et $U_{ik}$ . . . . .  | 13 |
| 7. Les fonctions propres de l'opérateur laplacien et le caractère de la métrique du contenant . . . . .                                | 19 |
| 8. Les fonctions propres de l'opérateur $\Delta_\omega$ et le caractère de la métrique externe du contenant . . . . .                  | 25 |
| 9. Le principe variationnel qui correspond aux équations (19 a, b), (38, 43) et (50, 54) . . . . .                                     | 25 |
| 10. Les fonctions-contenus et les nombres-contenus de l'être mathématique non-arbitraire . . . . .                                     | 27 |
| 11. Solution approchée des équations de l'être mathématique non-arbitraire . . . . .   | 35 |
| 12. Le spectre et les fonctions propres des opérateurs $\square_0$ et $\square_\omega^0$ . . . . .                                     | 42 |

### III — LE PROBLÈME COSMOLOGIQUE GÉNÉRALISÉ

|  |    |
|--|----|
| 1. Nature du problème. . . . .   | 46 |
| 2. Gravitation et «matière». . . . .   | 47 |
| 3. Le champ électromagnétique . . . . .  | 50 |
| 4. Les masses propres des corpuscules élémentaires . . . . .   | 57 |
| 5. La propagation des actions électromagnétiques et les lignes de «longueur» nulle associées aux formes métriques externe et interne . . . . . | 59 |

|   |    |
|---|----|
| 6. Les charges électriques propres des corpuscules élémentaires . . . . .                           | 63 |
| 7. Les constantes $c$ et $h$ . . . . .  | 65 |
| 8. Masses et charges des corpuscules, gravitation et électromagnétisme dans l'espace-temps. . . . . | 66 |

#### IV — MÉCANIQUE ONDULATOIRE COSMOLOGIQUE

|  |    |
|--|----|
| 1. Ondes et corpuscules . . . . .  | 77 |
| 2. Grandeurs attachées aux corpuscules élémentaires et champs d'espace-temps correspondants. . . . . | 86 |
| 3. Impulsion d'Univers, spin et «magnétisme» propre des corpuscules élémentaires . . . . .           | 87 |
| 4. Grandeurs simultanément et non simultanément observables . . . . .                                | 93 |
| 5. Mécanique ondulatoire cosmologique des systèmes de corpuscules . . . . .                          | 95 |

## L'INFLUENCE DES FORCES DE SCHWINGER SUR DES PROCESSUS NUCLÉAIRES

par J. L. RODRIGUES MARTINS

(Reçu le 15 Janvier 1946)

### S O M M A I R E :

I. Les expériences nous fournissent deux indications sur les termes d'interaction entre les spins qui sont susceptibles de renverser la direction du spin des particules nucléaires: *a*) La détermination du moment quadripolaire du deuteron (1); *b*) La diffusion de résonance des protons  $j = \frac{1}{2}$  par les états du compound  $\text{Li}_5$  (2). Ces termes sont du type

$$(1) \quad g(r) \cdot \frac{(\vec{\sigma}_1 r) \cdot (\vec{\sigma}_2 r)}{r^2}.$$

Des solutions rigoureuses d'un problème de deux corps peuvent être trouvées si nous posons

$$(2) \quad g(r) = \frac{3}{2} \cdot \frac{h^2}{8\pi^2 \mu} \cdot \frac{\lambda}{r^2}$$

et nous trouvons, par comparaison avec la valeur expérimentale du moment quadripolaire du deuteron, la valeur numérique du paramètre  $\lambda$ :

$$(3) \quad \lambda = \frac{1}{5}.$$

II. Appliquant les solutions trouvées plus haut au problème de la diffusion triplet d'un neutron par un proton, on trouve que les forces (1) donnent lieu, sous certaines conditions, à des processus de renversement des spins avec une probabilité de l'ordre unité, même si les forces (1) sont faibles para rapport aux forces de liaison nucléaires. Ce résultat indique que les mesures de TSIEN sont compatibles avec les résultats de KELLOG, RABI, RAMSAY et ZACHARIAS. Le moment cinétique orbital ne peut donc être considéré comme une intégrale approchée du mouvement dans des processus nucléaires.

## § 1 — INTRODUCTION

Les données expérimentales sur la liaison des particules nucléaires ont donné lieu à l'étude de quatre types de forces (*Wigner, Bartlett, Heisenberg et Majorana*). Ces théories du champ nucléaire (champ de mésons) de *Yukawa, Heitler*, etc., ont conduit à des forces d'un type plus générale qui implique, en particulier, des termes d'interaction du type

$$(1,1) \quad g(r) \cdot \frac{(\vec{\sigma}_1 \vec{r}) \cdot (\vec{\sigma}_2 \vec{r})}{r^2}$$

qui, suivant ces théories, sont du même ordre de grandeur que les forces indiquées plus haut. Contrairement aux types de forces les plus simples, ces termes (forces de Schwinger) [3] ne commutent pas avec  $(\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$ ; ils ne laissent donc pas inchangée, pendant le mouvement, la direction du spin total.

Comme nous verrons plus loin, des termes du type (1,1) ont pour conséquence qu'il n'existe plus d'états  ${}^3S_1$  purs, mais que des états tel que l'état fondamental du deuteron, représentent un mélange  ${}^3S_1 + {}^3D_1$ . *Kellog, Rabi, Ramsay et Zacharias* [1] ont pu vérifier qualitativement ce résultat théorique. Ils ont trouvé que le moment quadrupolaire du deuteron est

$$Q = \int \Psi \cdot r^2 (3 \cos^2 \theta - 1) \cdot \Psi d\tau = 2,71 \times 10^{-27} \text{ cm}^2$$

D'autre part, *Beck et Tsien* [2] ont trouvé que la diffusion de résonance des protons  $j = \frac{1}{2}$  par les états du compound  $\text{Li}_5$  doit être décrite par une superposition d'ondes  $S_{\frac{1}{2}}$  et  $P_{\frac{1}{2}}$  avec une probabilité de renversement de l'ordre unité, ce qui, suivant les idées courantes, indiquerait que les forces (1,1) sont du même ordre de grandeur que les forces de liaison nucléaires.

C'est pour étudier l'influence du couplage (1,1) sur la distribution angulaire des neutrons diffusés, que nous avons étudié en détail les propriétés d'un système de deux particules nucléaires, dont l'interaction contient des termes du type :

$$(1,2) \quad V(r) \cdot 1 + f(r) \cdot (\vec{\tau}_1 \vec{\tau}_2) + g(r) \cdot \frac{(\vec{r} \vec{\tau}_1) \cdot (\vec{r} \vec{\tau}_2)}{r^2}$$

$\vec{\sigma}_1$  et  $\vec{\sigma}_2$  étant les opérateurs de Pauli pour chaque particule,  $r$  la distance relative,  $f(r)$ ,  $g(r)$  et  $V(r)$  des fonctions potentielles à déterminer.



## § 2 — LES SOLUTIONS SINGULET ET TRIPLET

L'équation d'onde d'un système de deux particules dont l'interaction a la forme (1, 2) peut s'écrire, en coordonnées relatives,

$$(2,1) \quad \left\{ H_0 + f(r) \cdot (\vec{\sigma}_1 \vec{\sigma}_2) + g(r) \frac{(\vec{\sigma}_1 \vec{r}) \cdot (\vec{\sigma}_2 \vec{r})}{r^2} \right\} \Psi = 0$$

$H_0$  est l'opérateur  $\frac{\hbar^2}{8\pi^2 \mu} [\Delta_1 + \Delta_2] - V(r) + E$ ,  $\mu$  la masse réduite du mouvement relatif.

La fonction d'onde est censée avoir 4 composantes correspondantes aux quatre orientations des deux spins :

$$(2,2) \quad \hat{\Psi} = \begin{vmatrix} \Psi^{\alpha\alpha} & \Psi^{\alpha\beta} \\ \Psi^{\beta\alpha} & \Psi^{\beta\beta} \end{vmatrix}$$

Voici les solutions trouvées :

1. Solutions de singulet. Ces solutions sont antisymétriques dans les spins

$$(2,3) \quad \hat{\Psi} = \begin{vmatrix} 0 & +\varphi \\ -\varphi & 0 \end{vmatrix}$$

et satisfont à l'équation

$$(2,4) \quad \{ H_0 - 3f(r) - g(r) \} \varphi = 0$$

dont les solutions sont du type

$$(2,5) \quad \varphi = \chi_l^{(r)}, P_l^m(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi}$$

$P_l^m(\cos \theta)$  est une fonction sphérique,  $\chi_l^{(r)}$  une fonction du type des fonctions de Bessel, et qui satisfait à l'équation

$$(2,6) \quad \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} + \frac{8\pi^2 \mu}{\hbar^2} \left[ E - V(r) - 3f(r) - g(r) - \frac{\hbar^2}{8\pi^2 \mu} \cdot \frac{l(l+1)}{r^2} \right] \right\} \chi_l^{(r)} = 0.$$

2. Solutions triplets. Ces solutions sont symétriques dans les spins

$$(2,7) \quad \hat{\Psi} = \begin{vmatrix} \Psi^{\alpha\alpha} & \varphi \\ \varphi & \Psi^{\beta\beta} \end{vmatrix}$$

et satisfont à l'équation

$$(2,8) \quad \vec{J}^2 \cdot \hat{\Psi} = j(j+1) \frac{\hbar^2}{4\pi^2} \cdot \hat{\Psi}$$

$\vec{J}$  étant le moment cinétique total

$$(2,9) \quad \vec{J} = \vec{M} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \cdot (\vec{\sigma}_1 + \vec{\sigma}_2)$$

qui est une intégrale du mouvement pour l'interaction (1,2).

Voici les solutions générales trouvées, correspondantes à chaque pair de valeurs  $j, m$ .

a)  $j=l$  (états purs)

$$(2,10) \quad \begin{aligned} \Psi^{\alpha\alpha} &= \frac{\alpha_2}{N_2} \cdot \chi_j(r) \cdot P_j^{m-1}(\cos \theta) \cdot e^{i(m-1)\varphi} \\ \varphi &= \frac{\beta_2}{N_2} \cdot \chi_j(r) \cdot P_j^m(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi} \\ \Psi^{\beta\beta} &= \frac{\gamma_2}{N_2} \cdot \chi_j(r) \cdot P_j^{m+1}(\cos \theta) \cdot e^{i(m+1)\varphi} \end{aligned}$$

$\alpha_2, \beta_2$  e  $\gamma_2$  étant données par

$$(2,11) \quad \begin{aligned} \alpha_2 &= m(m-1) - l(l+1) \\ \beta_2 &= -m \\ \gamma_2 &= 1. \end{aligned}$$

La partie radiale de ces solutions satisfait à l'équation

$$(2,12) \quad \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} (E - V + f + g) \right\} \chi_l(r) = 0.$$

b)  $l=j-1$  et  $l=j+1$  (états mixtes)

$$(2,13) \quad \begin{aligned} \Psi^{\alpha\alpha} &= \frac{\alpha_1}{N_1} \cdot \chi_{j+1}(r) \cdot P_{j+1}^{m-1}(\cos \theta) \cdot e^{i(m-1)\varphi} + \frac{\alpha_3}{N_3} \cdot \chi_{j-1}(r) \cdot P_{j-1}^{m-1}(\cos \theta) \cdot e^{i(m-1)\varphi} \\ \varphi &= \frac{\beta_1}{N_1} \cdot \chi_{j+1}(r) \cdot P_{j+1}^m(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi} + \frac{\beta_3}{N_3} \cdot \chi_{j-1}(r) \cdot P_{j-1}^m(\cos \theta) \cdot e^{im\varphi} \\ \Psi^{\beta\beta} &= \frac{\gamma_1}{N_1} \cdot \chi_{j+1}(r) \cdot P_{j+1}^{m+1}(\cos \theta) \cdot e^{i(m+1)\varphi} + \frac{\gamma_3}{N_3} \cdot \chi_{j-1}(r) \cdot P_{j-1}^{m+1}(\cos \theta) \cdot e^{i(m+1)\varphi}. \end{aligned}$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_3, \beta_3$  et  $\gamma_3$  étant données par

$$\alpha_1 = l(l+1) + m(m-1) - 2lm \quad \alpha_3 = l(l+1) + m(m+1) + 2lm$$

$$(2,14) \quad \begin{array}{ll} \beta_1 = l - m & \beta_3 = -(m + l + 1) \\ \gamma_1 = 1 & \gamma_3 = 1 \end{array}$$

$N_1$ ,  $N_2$  e  $N_3$  sont les facteurs de normalization, donnés par la condition de normalization à l'unité

$$(2,15) \quad \int \Psi \cdot \Psi^* d\tau = \int \{ |\Psi^{\alpha\alpha}|^2 + 2|\varphi|^2 + |\Psi^{\beta\beta}|^2 \} r^2 \sin \theta dr d\theta d\varphi = 1.$$

Voici les expressions trouvées :

$$(2,16) \quad \begin{aligned} N_1^2 &= \left\{ \alpha_1^2 \cdot \frac{(j+m)!}{(j-m+2)!} + 2\beta_1^2 \frac{(m+j+1)!}{(j-m+1)!} + \gamma_1^2 \frac{(j+m+2)!}{(j-m)!} \right\} \frac{4\pi}{2j+3} \\ N_2^2 &= \left\{ \alpha_2^2 \frac{(j+m-1)!}{(j-m+1)!} + 2\beta_2^2 \cdot \frac{(m+j)!}{(j-m)!} + \gamma_2^2 \frac{(j+m+1)!}{(j-m-1)!} \right\} \frac{4\pi}{2j+1} \\ N_3^2 &= \left\{ \alpha_3^2 \frac{(j+m-2)!}{(j-m)!} + 2\beta_3^2 \frac{(m+j-1)!}{(j-m-1)!} + \gamma_3^2 \cdot \frac{(j+m)!}{(j-m-2)!} \right\} \frac{4\pi}{2j-1} \end{aligned}$$

Les parties radiales de (2,13) satisfont au système d'équations :

$$(2,17) \quad \begin{aligned} \frac{2j}{(2j+1)} \cdot g \cdot \chi_{j-1}(r) + \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{(j+1)(j+2)}{r^2} + \right. \\ \left. + \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} \left[ E - V - f - \frac{g}{2j+1} \right] \right\} \cdot \chi_{j+1}(r) = 0 \\ \frac{2(j+1)}{(2j+1)} \cdot g \cdot \chi_{j+1}(r) + \left\{ \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial r} - \frac{j(j-1)}{r^2} + \right. \\ \left. + \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} \left[ E - V - f - \frac{g}{2j+1} \right] \right\} \chi_{j-1}(r) = 0. \end{aligned}$$

On peut conclure immédiatement de (2,17) que c'est le dernier terme de l'interaction (2,1) — forces de Schwinger — qui est responsable de la coexistence des états triplets  $l=j-1$  et  $l=j+1$ , tels que  ${}^3S_1$  et  ${}^3D_1$  dans l'état fondamental du deuteron. Pour estimer cet effet nous allons résoudre le système (2,17), dans le cas particulier  $j=1$ .

§ 3 — SOLUTIONS RIGOUREUSES DES ÉQUATIONS (2,17) POUR  $J=1$ 

Pour obtenir de solutions rigoureuses du système (2, 17) nous posons

$$(3,1) \quad \frac{2}{3} \cdot \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} \cdot g = \frac{\lambda}{r^2}$$

$$H_0 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{8\pi^2 \mu}{h^2} \left[ E - V + f - \frac{g}{3} \right].$$

Le système (2,17) s'écrira donc

$$(3,2) \quad H_0 \cdot \chi_2(r) = \frac{1}{r^2} [6 \cdot \chi_2(r) - \lambda \cdot \chi_0(r)]$$

$$H_0 \cdot \chi_0(r) = -\frac{1}{r^2} \cdot 2 \cdot \lambda \cdot \chi_2(r)$$

et, par la transformation linéaire

$$(3,3) \quad Y(r) = \alpha \cdot \chi_2(r) + \beta \cdot \chi_0(r)$$

$$Z(r) = \gamma \cdot \chi_2(r) + \delta \cdot \chi_0(r)$$

peut alors être ramené sur axes principaux

$$(3,4) \quad H_0 \cdot Y(r) = \frac{a}{r^2} \cdot Y(r)$$

$$H_0 \cdot Z(r) = \frac{b}{r^2} \cdot Z(r)$$

si nous introduisons les relations

$$(3,5) \quad \alpha \cdot \delta - \beta \cdot \gamma \neq 0 \quad \begin{cases} (6 \cdot \alpha - 2 \cdot \lambda \cdot \beta) \cdot \beta + \alpha^2 \cdot \lambda = 0 \\ (6 \cdot \gamma - 2 \cdot \lambda \cdot \delta) \cdot \delta + \gamma^2 \cdot \lambda = 0 \end{cases}$$

On peut alors résoudre sans difficulté le système (3,4), pour une valeur donnée de  $\lambda$ , et déterminer ensuite  $\chi_0(r)$  et  $\chi_2(r)$  à l'aide des expressions

$$(3,6) \quad \chi_2(r) = \frac{\delta \cdot Y - \beta \cdot Z}{\alpha \cdot \delta - \beta \gamma} \quad \chi_0(r) = \frac{-\gamma \cdot Y + \alpha \cdot Z}{\alpha \cdot \delta - \beta \gamma}$$

$$\alpha = \cos \theta \quad \beta = \sin \theta \quad \gamma = \sin \varphi \quad \delta = \cos \varphi$$

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{3}{2\lambda} - \sqrt{\frac{9}{4\lambda^2} + \frac{1}{2}} \quad \operatorname{tg} \varphi = -\frac{3}{\lambda} + \sqrt{\frac{9}{\lambda^2} + 2}.$$

#### § 4 — LE MOMENT QUADRUPOLAIRE DE L'ÉTAT FONDAMENTAL DU DEUTERON

Nous avons défini le moment quadripolaire de la même façon que *Kellog*, *Rabi*, *Ramsay* et *Zacharias*, par la valeur moyenne de l'expression  $\frac{r^2}{4} \cdot (3 \cos^2 \theta - 1)$ , où  $r$  est la coordonnée du proton par rapport au centre de gravité du deuteron. En utilisant la valeur expérimentale du moment quadripolaire du deuteron dans l'état fondamental ( $j=1$ ), on peut écrire l'équation

$$(4,1) \quad Q = \int |\Psi^{zz}| \cdot \frac{r^2}{4} (3 \cos^2 \theta - 1) \cdot \Psi + 2 \cdot \frac{r^2}{4} (3 \cos^2 \theta - 1) \cdot \varphi + \\ + \Psi^{\beta\beta} \cdot \frac{r^2}{4} (3 \cos^2 \theta - 1) \Psi^{\beta\beta} | r^2 dr d(\cos \theta) d\varphi = 2,71 \times 10^{-27} \text{ cm}^2.$$

En introduisant dans cette équation les solutions triplets trouvées en fonction du paramètre  $\lambda$ , on trouve alors en première approximation ( $\lambda^2 \ll 1$ )

$$(4,2) \quad \lambda \approx \frac{1}{5}.$$

Nous avons ensuite déterminé l'ordre de grandeur de  $g(r)$  par rapport aux forces de liaison nucléaires

$$(4,3) \quad \frac{g}{u} \sim \frac{1}{10}.$$

#### § 5 — LE PROBLÈME DE LA DIFFUSION TRIPLET

L'équation d'onde (2,1) nous permet également d'écrire des processus de collision de deux particules. On peut immédiatement écrire les expressions pour les ondes planes incidentes au dehors du rayon d'action des forces nucléaires :

I. *Ondes incidentes.* a) *Ondes singulets.* Ces solutions de l'équation (2,1) sont antisymétriques dans les spins; le spin total correspondant est donc zero, aucune modification de la théorie habituelle de la diffusion n'ayant lieu :

$$(5,1) \quad \bar{\Psi} = \left\| \begin{array}{cc} 0 & + \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikr \cos \theta} \\ - \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikr \cos \theta} & 0 \end{array} \right\|$$

b) *Ondes triplets*. Ces solutions sont symétriques dans les spins; nous avons à distinguer les trois possibilités du spin total par rapport à la direction de l'onde incidente ( $m = +1, 0, -1$ )

$$(5,2) \quad \text{a) } m = +1 \quad \hat{\Psi} = \begin{vmatrix} e^{ikr \cos \theta} & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$(5,3) \quad \text{b) } m = -1 \quad \hat{\Psi} = \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & e^{ikr \cos \theta} \end{vmatrix}$$

$$(5,4) \quad \text{c) } m = 0 \quad \hat{\Psi} = \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikr \cos \theta} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} e^{ikr \cos \theta} & 0 \end{vmatrix}$$

À l'aide de la formule de *Rayleigh*

$$(5,5) \quad e^{ikr \cos \theta} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \sum_l i^l (2l+1) \cdot \zeta_l(r) \cdot P_l^0(\cos \theta)$$

nous décomposerons chacune des ondes planes triplets; en utilisant ensuite les solutions (2,10) et (2,13) on peut écrire chaque onde plane sous la forme de une série infinie construite de façon à mettre ensemble les trois états  $l=j+1$ ,  $l=j$  et  $l=j-1$  correspondantes à chaque valeur du moment cinétique total  $j$ . Mais, comme ce qui nous intéresse ici est étudier le couplage entre les états  ${}^3S_1$  et  ${}^3D_1$  dans le processus de diffusion, donc nous n'avons utilisé dans chaque série infinie que les termes les plus bas correspondantes aux valeurs  $l=0$  et  $l=2$ .

Les ondes incidentes triplet prennent alors la forme :

$$(5,6) \quad \begin{aligned} \text{a) } m = +1 & \\ \Psi^{\alpha\alpha} &= a_2 \cdot X_2(r) \cdot Y_2^0(\cos \theta) + c_0 \cdot X_0(r) \cdot Y_0^0(\cos \theta) \\ \Psi^{\alpha\beta} &= \Psi^{\alpha\beta} = \Psi^{\beta\beta} = 0 \\ \text{b) } m = 0 & \\ \Psi^{\alpha\alpha} &= \Psi^{\beta\beta} = 0 \\ \Psi^{\alpha\beta} &= \Psi^{\beta\alpha} = a_2 \cdot X_2(r) \cdot Y_2^0(\cos \theta) + c_0 \cdot X_0(r) \cdot Y_0^0(\cos \theta) \\ \text{c) } m = -1 & \\ \Psi^{\alpha\alpha} &= \Psi^{\alpha\beta} = \Psi^{\beta\alpha} = 0 \\ \Psi^{\beta\beta} &= a_2 \cdot X_2(r) \cdot Y_2^0(\cos \theta) + c_0 \cdot X_0(r) \cdot Y_0^0(\cos \theta) \end{aligned}$$

$Y_0^0(\cos \theta)$  e  $Y_2^0(\cos \theta)$  sont les fonctions sphériques normalisées

$$(5,7) \quad \begin{aligned} Y_0^0(\cos \theta) &= \frac{\alpha_3 \gamma_3}{N_3} \cdot P_0^0(\cos \theta) \\ Y_2^0(\cos \theta) &= \frac{\alpha_1 \gamma_1}{N_1} \cdot P_0^0(\cos \theta) \end{aligned}$$

$X_0(r)$  e  $X_2(r)$  des fonctions du type des fonctions de Bessel,  $a_l$  et  $c_l$ , des coefficients dont les valeurs peuvent être obtenues en utilisant la formule de *Rayleigh* :

$$(5,8) \quad \begin{aligned} \text{a) } m=+1 & \\ a_l &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{i^l}{2l} \cdot N_1 \\ c_l &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{i^l}{2(l+1)} \cdot N_3 \\ \text{b) } m=0 & \\ a_l &= \sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{i^l}{(l+1)} \cdot N_1 \\ c_l &= -\sqrt{\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{i^l}{(l+1)} \cdot N_3 \\ \text{c) } m=-1 & \\ a_l &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{i^l(l-1)}{2} \cdot N_1 \\ c_l &= \sqrt{\frac{\pi}{2}} \cdot \frac{1}{k} \cdot \frac{i^l(l+2)}{2} \cdot N_3 \end{aligned}$$

II. *Les ondes planes diffusées.* L'onde diffusée sera écrite, comme d'habitude, sous la forme d'une série analogue à celle des ondes incidentes, où nous remplacerons  $a_2$  et  $c_0$  par les coefficients de diffusion  $\bar{a}_2$  et  $\bar{c}_0$  et où les ondes stationnaires  $X_2(r)$  et  $X_0(r)$  seront remplacées par les ondes divergentes

$$(5,9) \quad \begin{aligned} X_2^+(r) &= -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \left\{ \left( \frac{3}{k^2 r^2} - 1 \right) + \frac{3}{kr} \right\} \cdot \frac{e^{ikr}}{r} \\ X_0^+(r) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot \frac{e^{i(kr - \frac{\pi}{2})}}{r} \end{aligned}$$

Les expressions des ondes diffusées seront donc

$$a) \quad m = +1$$

$$\Psi^{zz} = \bar{a}_2 \cdot X_2^{(+)}(r) \cdot Y_2^0(\cos \theta) + \bar{c}_0 \cdot X_0^{(+)}(r) \cdot Y_0^0(\cos \theta)$$

$$\Psi^{z\beta} = \Psi^{\beta z} = \Psi^{\beta\beta} = 0$$

$$b) \quad m = -0$$

$$(5,10) \quad \Psi^{z\beta} = \Psi^{\beta z} = \bar{a}_2 \cdot X_2^{(+)}(r) \cdot Y_2^0(\cos \theta) + \bar{c}_0 \cdot X_0^{(+)}(r) \cdot Y_0^0(\cos \theta)$$

$$\Psi^{zz} = \Psi^{\beta\beta} = 0$$

$$c) \quad m = -1$$

$$\Psi^{\beta\beta} = \bar{a}_2 \cdot X_2^{(+)}(r) \cdot Y_2^0(\cos \theta) + \bar{c}_0 \cdot X_0^{(+)}(r) \cdot Y_0^0(\cos \theta)$$

$$\Psi^{zz} = \Psi^{z\beta} = \Psi^{\beta z} = 0$$

III. *Les ondes stationnaires à l'intérieur.* Le système (3,4) admet immédiatement les deux solutions particulières

$$(5,11) \quad a) \quad Z(r) = 0; \quad Y(r) = J_n + \frac{1}{2} \quad (n \sim 2)$$

$J_n + \frac{1}{2}$  étant une solution de l'équation de *Bessel*

$$(5,12) \quad H_0 \cdot Y(r) = \frac{a}{r^2} Y(r)$$

$$(5,13) \quad b) \quad Y(r) = 0; \quad Z(r) = J_n + \frac{1}{2} \quad (n \sim 0)$$

$J_n$  étant une solution de l'équation

$$(5,14) \quad H_0 \cdot Z(r) = \frac{b}{r^2} \cdot Z(r).$$

Les solutions  $\chi_0(r)$  et  $\chi_2(r)$  correspondantes seront obtenues à l'aide des relations (3,3)

$$(5,15) \quad a) \quad \chi_2 = A \cdot Y(r); \quad \chi_0 = B \cdot Y(r).$$

$$(5,16) \quad b) \quad \chi_2 = A' \cdot Z(r); \quad \chi_0 = B' \cdot Z(r)$$

$A, A', B$  et  $B'$  étant données par les relations

$$(5,17) \quad A = \frac{\delta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \approx 1 - \frac{\lambda^2}{24} \quad B = -\frac{\beta}{\alpha\delta - \beta\gamma} \approx \frac{\lambda}{3}$$

$$A' = -\frac{\gamma}{\alpha\delta - \beta\gamma} \approx \frac{\lambda}{6} \quad B' = \frac{\alpha}{\alpha\delta - \beta\gamma} \approx 1.$$



Les expressions de l'onde stationnaire à l'intérieur prennent alors la forme final

$$\begin{aligned}
 \text{a) } & m = +1 \\
 & \Psi^{zz} = [T \cdot A \cdot Y(r) + S \cdot A' \cdot Z(r)] \cdot Y_2^0(\cos \theta) + \\
 & \quad + [T \cdot B \cdot Y(r) + S \cdot B'(r)] \cdot Y_0^0(\cos \theta) \\
 \text{b) } & m = 0 \\
 (5,18) \quad & \Psi^{z\beta} = \Psi^{\beta z} = [T \cdot A \cdot Y(r) + S \cdot A' \cdot Z(r)] \cdot Y_2^0(\cos \theta) + \\
 & \quad + [T \cdot B \cdot Y(r) + S \cdot B' \cdot Z(r)] \cdot Y_0^0(\cos \theta) \\
 \text{c) } & m = -1 \\
 & \Psi^{\beta\beta} = [T \cdot A \cdot Y(r) + S \cdot A' \cdot Z(r)] \cdot Y_2^0(\cos \theta) + \\
 & \quad + [T \cdot B \cdot Y(r) + S \cdot B' \cdot Z(r)] \cdot Y_0^0(\cos \theta)
 \end{aligned}$$

T, S, T' et S' sont des facteurs qui mesurent les amplitudes des fonctions d'onde à l'intérieur du noyau.

#### § 6 — LES CONDITIONS AUX LIMITES

L'onde résultante à l'extérieur et l'onde stationnaire à l'intérieur doivent satisfaire aux conditions de continuité aux limites ( $r=R$ , R étant la largeur de notre modèle simplifié, trou de potentiel rectangulaire). Nous allons écrire ces conditions dans le cas  $m=+1$ ; on obtiendra ensuite des expressions analogues pour  $m=-1$  et  $m=0$ . L'onde résultante pour  $m=-1$  s'écrit

$$(6,1) \quad \text{a) } m = +1 \\
 \Psi^{zz} = [a_2 X_2 + \bar{a}_2 X_2^{(+)}] \cdot Y_2^0(\cos \theta) + [c_0 X_0 + \bar{c}_0 X_0^{(+)}] \cdot Y_0^0(\cos \theta)$$

ce qui nous permet d'obtenir immédiatement le système d'équations correspondantes aux conditions aux limites

$$\begin{aligned}
 (6,2) \quad & T \cdot A \cdot Y(R) + S \cdot A' \cdot Z(R) = a_2 X_3(R) + \bar{a}_2 X_2^{(+)}(R) \\
 & T \cdot B \cdot Y(R) + S \cdot B' \cdot Z(R) = c_0 X_0(R) + \bar{c}_0 X_0^{(+)}(R) \\
 & T \cdot A \cdot Y'(R) + S \cdot A' \cdot Z'(R) = a_2 X_2'(R) + \bar{a}_2 X_2^{(+)'}(R) \\
 & T \cdot B \cdot Y'(R) + S \cdot B' \cdot Z'(R) = c_0 X_0'(R) + \bar{c}_0 X_0^{(+)'}(R)
 \end{aligned}$$

$X'(R)$ ,  $X^{(+)'}(R)$ ,  $Y'(R)$  et  $Z'(R)$  sont les dérivées, par rapport à  $r$ , de  $X$ ,  $X^{(+)}$ ,  $Y$  et  $Z$ .

En résolvant ce système on obtient les coefficients de diffusion  $\alpha$  et  $\bar{c}$ , et les facteurs T et S :

(6,3)

$$\bar{\alpha}_2 = \frac{c_0 \cdot A A' \cdot [X_0, X_0^{(+)}] \cdot [Y, Z] + a_2 \cdot \{A' B \cdot [X_2, Z] \cdot [X_0^+, Y] - A B' \cdot [X_2, Y] \cdot X_0^{(+)} \cdot Z\}}{A B' \cdot [X_2^{(+)} \cdot Y] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Z] - A' B \cdot [X_2^{(+)} \cdot Z] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Y]}$$

$$\bar{c}_0 = \frac{c_0 \cdot \{A B' \cdot [X_0, Z] \cdot [X_2^{(+)} \cdot Y] - A' B \cdot [X_0, Y] \cdot [X_2^{(+)} \cdot Z]\} + a_2 \cdot B B' \cdot [X_2, X_2^{(+)}] \cdot [Y, Z]}{A B' \cdot [X_2^{(+)} \cdot Y] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Z] - A' B \cdot [X_2^{(+)} \cdot Z] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Y]}$$

$$T = \frac{a_2 \cdot B' \cdot [Z, X_0^{(+)}] \cdot [X_2, X_2^{(+)}] - c_0 \cdot A' \cdot [Z, X_2^{(+)}] \cdot [X_0, X_0^{(+)}]}{A B' \cdot [X_2^{(+)} \cdot Y] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Z] - A' B \cdot [X_2^{(+)} \cdot Z] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Y]}$$

(6,4)

$$S = \frac{a_2 \cdot B \cdot [Y, X_0^{(+)}] \cdot [X_2, X_2^{(+)}] - c_0 \cdot A \cdot [Y, X_2^{(+)}] \cdot [X_0, X_0^{(+)}]}{A' B \cdot [X_2^{(+)} \cdot Y] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Z] - A' B \cdot [X_2^{(+)} \cdot Z] \cdot [X_0^{(+)} \cdot Y]}$$

$a_2$  et  $c_2$  nous donnent les amplitudes des ondes S et D incidentes ; les expressions tels que  $[X, Y]$ , par exemple, sont définies par

$$[X, Y] = XY' - X'Y.$$

### § 7 — DISCUSSION DES RÉSULTATS

Les tableaux I-II indiquent l'ordre de grandeur des différents facteurs de (6,3) qui déterminent l'ordre de grandeur de la section efficace pour les résonances S et D et hors de résonance, pour différents valeurs du rapport  $\frac{n}{K^2 R^2}$  où  $n$  est un paramètre numérique qui caractérise le couplage entre les spins ( $\lim_{\rho \rightarrow 0} n = 0, n \approx 0,05$ ).

Nous pouvons distinguer deux types de minima du dénominateur commun de (6,3) et (6,4) correspondant dans le cas limite  $n \rightarrow 0$  respectivement aux résonances S et D.

a) Condition d'une résonance S

$$\bar{Z}' = -\eta^2 \cdot \frac{2\bar{Y}'Z}{\bar{Y}' + 2Y + 2Y\eta^2}.$$

b) Condition d'une résonance D

$$\bar{Y}' + 2Y = \frac{K^2 R^2}{3} \cdot (\bar{Y}' + 3Y) + \frac{6\bar{Z}'Y - 2K^2 R^2 Z (\bar{Y}' + 3Y)}{3(\bar{Z}' - 2\eta^2 Z)} \cdot \eta^2$$

où nous posons

$$\bar{Z}' = \left[ r \frac{dZ}{dr} \right]_R, \quad \bar{Y}' = \left[ r \frac{dY}{dr} \right]_R, \quad \eta^2 = \frac{\lambda^2}{10}.$$

Les tableaux III-IV ont été établis de façon analogue ; on y trouve l'ordre de grandeur des amplitudes des fonctions  $\chi_0$  et  $\chi_2$  à l'intérieur du noyau, dans les mêmes conditions que celles des tableaux I-II. Pour faciliter l'interprétation de ces tableaux, nous avons dessiné sché-

Les courbes :

..... représentent la fonction  $\chi_2$   
 ———— représentent la fonction  $\chi_0$   
 à droite correspondent à une résonance D  
 à gauche correspondent à une résonance S

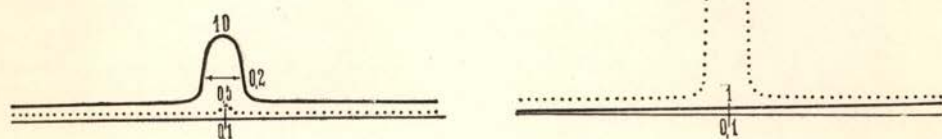


Fig. 1

$$\gamma_1 = 0$$

matiquement les courbes (Figs. 1, 2, 3 et 4) qui décrivent la variation des amplitudes des fonctions  $\chi_0$  et  $\chi_2$  avec les différents valeurs de  $kR$ .

Pour la discussion nous avons à distinguer deux cas essentiellement différents, à savoir le cas  $(kR)^2 > \eta$  et le cas  $(kR)^2 < \eta$ . En particulier, le domaine  $(kR)^2 \sim \eta$  présentera un intérêt considérable pour nous.

$$1^{\circ}. (kR)^2 < \eta.$$

Ce cas comprend le comportement des particules incidentes extrêmement lentes, telles que les neutrons thermiques. Les tableaux et la figure 2 nous apprennent que le couplage entre le spin et le moment orbital, caractérisé par le paramètre  $\eta$ , doit être considéré, dans ce cas, comme couplage fort. En effet, on se rend facilement compte que les résonances dites S ne sont guère modifiées, tandis que les résonances dites D se trouvent être élargies par le couplage de telle manière qu'elles aussi se comportent comme des résonances S. Nous devons donc nous attendre à ce que des particules lentes, satisfaisant à la condition  $(kR)^2 > \eta$ , ne donnent lieu qu'à une diffusion S ordinaire, de distribution sphérique.

$$2^{\circ}. (kr)^2 > \eta.$$

Les courbes :

..... représentent la fonction  $\chi_2$

— représentent la fonction  $\chi_0$

à droite correspondent à une résonance D

à gauche correspondent à une résonance S

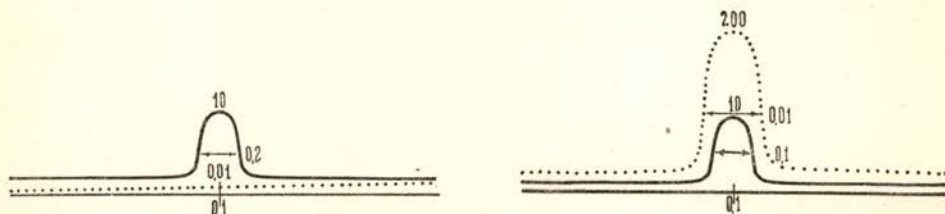


Fig. 2

$$k^2 R^2 < \eta$$

Ce cas se rapporte à des particules incidentes relativement rapides, dont la longueur d'onde peut, toutefois, encore dépasser considérablement les dimensions nucléaires. On se rend facilement compte que dans ce cas, le couplage montre toutes les caractéristiques d'un couplage faible. Nous pouvons même arriver à une description qualitative suffisante si nous négligeons le couplage entièrement ( $\eta \rightarrow 0$ ) et si nous distinguons simplement entre résonances S et D, sans tenir compte de la faible interaction entre elles.

3°.  $(kR)^2 \sim \eta$ .

Ce domaine limite entre les deux cas 1° et 2°, présente pour nous un intérêt considérable. En effet, il est caractérisé par le fait que le couplage est déjà assez fort pour impliquer une interaction sensible entre les résonances S et D, mais pas encore suffisamment fort pour faire disparaître les différences caractéristiques entre ces deux types

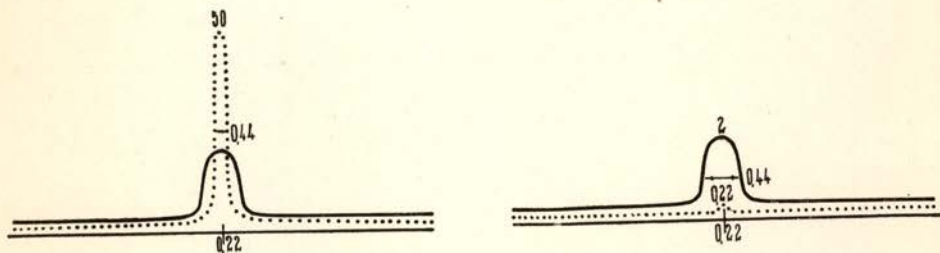


Fig. 3

$$k^2 R^2 \sim \eta$$

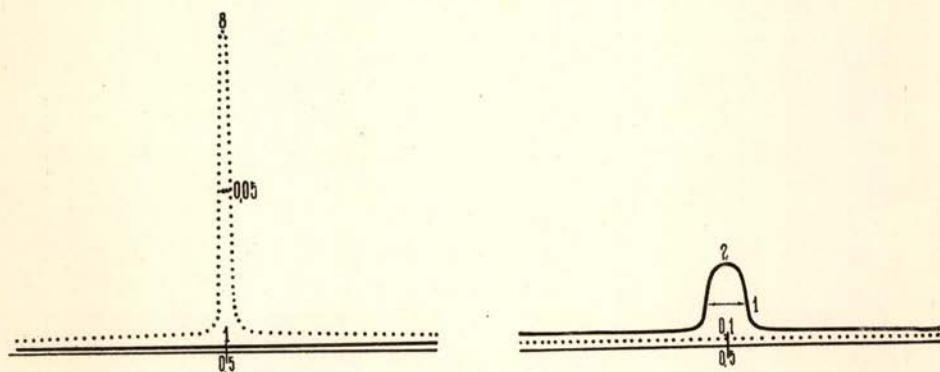


Fig. 4

$$k^2 R^2 > \eta$$

de résonances. Les figures 1 et 3 nous apprennent que dans ce cas, c'est à dire, pour des énergies comprises entre  $10^3$  et  $10^6$  eV, les résonances S ne sont pratiquement modifiées par le couplage, tandis qu'une résonance D entraîne, par le couplage, une résonance S du même ordre de grandeur. C'est dans ce cas, donc, que nous devons nous attendre à trouver des conditions de diffusion dans lesquelles plusieurs ondes partielles seront simultanément excitées par une résonance simple (renversement du spin).

TABLEAU I  
Hors de résonance

| Coefficients $\bar{c}_0$ et $\bar{a}_2$<br>Valeurs de $\gamma_1/(KR)^2$ |             | $c_0 \times (\dots)$        | $a_2 \times (\dots)$  |
|---|-------------|-----------------------------|-----------------------|
| $\gamma_1 = 0$  | $\bar{c}_0$ | R                           | O *                   |
|   | $\bar{a}_2$ | O *                         | R (KR) <sup>4</sup>   |
| $(KR)^2 < \gamma_1$   | $\bar{c}_0$ | R                           | $\gamma_1 R (KR)^2$ * |
|   | $\bar{a}_2$ | $\gamma_1 \cdot R (KR)^2$ * | R (KR) <sup>4</sup>   |
| $(KR)^2 \sim \gamma_1$  | $\bar{c}_0$ | R                           | R (KR) <sup>4</sup> * |
|   | $\bar{a}_2$ | R (KR) <sup>4</sup> *       | R (KR) <sup>4</sup>   |
| $(KR)^2 > \gamma_1$   | $\bar{c}_0$ | R                           | $\gamma_1 R (KR)^2$ * |
|   | $\bar{a}_2$ | $\gamma_1 R (KR)^2$ *       | R (KR) <sup>4</sup>   |

TABLEAU II  
En résonance

| Coefficients $\bar{c}_0$ et $\bar{a}_2$<br>Types de résonance<br>Valeurs de $\gamma_1/(KR)^2$ |          | $c_1 \times (\dots)$ | $a_2 \times (\dots)$ |
|---|----------|----------------------|----------------------|
| $\gamma_1 = 0$  | <b>S</b> | $\bar{c}_0$          | $\lambda$            |
|   |          | $\bar{a}_2$          | O *                  |
|   | <b>D</b> | $\bar{c}_0$          | $\lambda (KR)$       |
|   |          | $\bar{a}_2$          | O *                  |

TABLEAU II  
(SUITE)

| Coefficients $\bar{c}_0$ et $\bar{a}_2$<br>Types de résonance<br>Valeurs de $\eta/(KR)^2$ |          | $c_0 \times (\dots)$ | $a_2 \times (\dots)$                                    |   |
|---|----------|----------------------|---|---|
| $(KR)^2 < \eta$   | <b>S</b> | $\bar{c}_0$          | $\lambda$   | $\eta \cdot \lambda (KR)^2 *$                         |
|   |          | $\bar{a}_2$          | $\eta \lambda (KR)^2 *$                                 | $\lambda \{ (KR)^5 + \eta^2 (KR)^4 \}$                |
|   | <b>D</b> | $\bar{c}_0$          | $\frac{\eta^2 - (KR)^5}{\eta^2 + (KR)^4} \cdot \lambda$ | $\frac{\eta (KR)^2}{\eta^2 + (KR)^4} \cdot \lambda *$ |
|   |          | $\bar{a}_2$          | $\frac{\eta (KR)^2}{\eta^2 + (KR)^4} \cdot \lambda *$   | $\frac{(KR)^4}{\eta^2 + (KR)^4} \cdot \lambda$        |
| $(KR)^2 \sim \eta$  | <b>S</b> | $\bar{c}_0$          | $\lambda$   | $\lambda \cdot (KR)^4 *$                              |
|   |          | $\bar{a}_2$          | $\lambda (KR)^4 *$                                      | $\lambda (KR)^5$                                      |
|   | <b>D</b> | $\bar{c}_0$          | $\frac{KR-1}{2} \cdot \lambda$                          | $\frac{\lambda}{2} *$                                 |
|   |          | $\bar{a}_2$          | $\frac{\lambda}{2} *$                                   | $\frac{\lambda}{2}$                                   |
| $(KR)^2 > \eta$   | <b>S</b> | $\bar{c}_0$          | $\lambda$   | $\lambda \eta (KR)^2 *$                               |
|   |          | $\bar{a}_2$          | $\eta \lambda (KR)^2 *$                                 | $\lambda (KR)^5$                                      |
|   | <b>D</b> | $\bar{c}_0$          | $\lambda (KR)$  | $\frac{\eta}{(KR)^2} \cdot \lambda *$                 |
|   |          | $\bar{a}_2$          | $\frac{\eta}{(KR)^2} \cdot \lambda *$                   | $\frac{\eta^2}{(KR)^4} \cdot \lambda$                 |

NOTE. Les termes marqués d'un \* sont dus à des processus de renversement du spin pendant la collision.

TABLEAU III  
Hors de résonance

| Les fonctions $\lambda_0$ et $\lambda_2$<br>Valeurs de $\eta/K^2 R^2$ |               | $c_0 \times (\dots)$ | $a_2 \times (\dots)$           |
|---|---------------|----------------------|--------------------------------|
| $\eta = 0$  | Y             | 0                    | 0                              |
|   | $\lambda_0$ — |                      |                                |
|   | Z             | 1                    | 0                              |
|   | —             |                      |                                |
| $K^2 R^2 < \eta$  | Y             | $\eta^2$             | $-\eta \cdot (KR)^2$           |
|   | $\lambda_0$ — |                      |                                |
|   | Z             | $1 + \eta^2$         | $-\eta (KR)^2$                 |
|   | —             |                      |                                |
| $K^2 R^2 \sim \eta$   | Y             | $\eta$               | $-(1 + \eta^2) \cdot K^2 R^2$  |
|   | $\lambda_0$ — |                      |                                |
|   | Z             | $\eta$               | $-\eta^2 \cdot K^2 R^2$        |
|   | —             |                      |                                |
| $K^2 R^2 > \eta$  | Y             | $K^4 R^4$            | $-K^4 R^4$                     |
|   | $\lambda_0$ — |                      |                                |
|   | Z             | $1 + K^4 R^4$        | $-K^4 R^4$                     |
|   | —             |                      |                                |
| $K^2 R^2 \sim \eta$   | Y             | $K^2 R^2$            | $-(1 + K^4 R^4) \cdot K^2 R^2$ |
|   | $\lambda_0$ — |                      |                                |
|   | Z             | $K^2 R^2$            | $-K^6 R^6$                     |
|   | —             |                      |                                |
| $K^2 R^2 > \eta$  | Y             | $\eta^2$             | $-\eta (KR)^2$                 |
|   | $\lambda_0$ — |                      |                                |
|   | Z             | $1 + \eta^2$         | $-\eta (KR)^2$                 |
|   | —             |                      |                                |
| $K^2 R^2 > \eta$  | Y             | $\eta$               | $-(1 + \eta^2) \cdot K^2 R^2$  |
|   | $\lambda_0$ — |                      |                                |
|   | Z             | $\eta$               | $-\eta^2 \cdot K^2 R^2$        |
|   | —             |                      |                                |



TABLEAU IV  
En résonance

| Les fonctions $\gamma_0$ et $\gamma_2$<br>Valeurs de $\eta/K^2 R^2$<br>Types de résonance |          | $c_0 \times (\dots)$ | $a_2 \times (\dots)$              |                               |
|---|----------|----------------------|-----------------------------------|-------------------------------|
| $\eta = 0$  | <b>S</b> | $\gamma_0$ — Y       | 0                                 | 0                             |
|   |          | Z                    | $\frac{1}{KR}$                    | 0                             |
|   |          | $\gamma_2$ — Y       | 0                                 | $-K^2 R^2$                    |
|   |          | Z                    | 0                                 | 0                             |
|   | <b>D</b> | $\gamma_0$ — Y       | 0                                 | 0                             |
|   |          | Z                    | 1                                 | 0                             |
|   |          | $\gamma_2$ — Y       | 0                                 | $\frac{1}{K^3 R^3}$           |
|   |          | Z                    | 0                                 | 0                             |
| $K^2 R^2 < \eta$  | <b>S</b> | $\gamma_0$ — Y       | $\frac{\eta^2}{KR}$               | $\eta \cdot K^2 R^2$          |
|   |          | Z                    | $(1 + \eta^2) \cdot \frac{1}{KR}$ | $-\eta \cdot KR$              |
|   |          | $\gamma_2$ — Y       | $\eta \cdot \frac{1}{KR}$         | $-(1 + \eta^2) \cdot K^2 R^2$ |
|   |          | Z                    | $\eta \cdot \frac{1}{KR}$         | $-\eta^2 \cdot KR$            |
|   | <b>D</b> | $\gamma_0$ — Y       | $\frac{1}{KR}$                    | $-\frac{KR}{\eta}$            |
|   |          | Z                    | $1 + \eta^2$                      | $-\frac{KR}{\eta}$            |
|   |          | $\gamma_2$ — Y       | $\frac{1}{\eta \cdot KR}$         | $-\frac{KR}{\eta^2}$          |
|   |          | Z                    | $\eta$                            | $-KR$                         |

TABLEAU IV  
 (SUITE)

| Les fonctions $\gamma_0$ et $\gamma_2$<br>Valeurs de $\eta/K^2 R^2$<br>Types de résonance |   | $e_0 \times (\dots)$ | $a_2 \times (\dots)$                        |  |
|---|---|----------------------|---|--|
| $K^2 R^2 \sim \eta$   | S | $\gamma_0$ — Y       | $K^3 R^3$                                   | $-K^4 R^4$                                     |
|   |   | Z                    | $(1+K^4 R^4) \cdot \frac{1}{KR}$            | $-K^3 R^3$                                     |
|   |   | $\gamma_2$ — Y       | $KR$  | $-(1+K^4 R^4) \cdot K^2 R^2$                   |
|   |   | Z                    | $KR$  | $-K^5 R^5$                                     |
|   | D | $\gamma_0$ — Y       | $\frac{1}{2KR}$                             | $-\frac{1}{2 \cdot KR}$                        |
|   |   | Z                    | $1+K^4 R^4$                                 | $-\frac{1}{2 \cdot KR}$                        |
|   |   | $\gamma_2$ — Y       | $\frac{1}{2K^3 R^3}$                        | $-\frac{1+K^4 R^4}{2 \cdot R^3 K^3}$           |
|   |   | Z                    | $K^2 R^2$                                   | $\frac{1 \cdot KR}{2}$                         |
| $K^2 R^2 > \eta$  | S | $\gamma_0$ — Y       | $\frac{\eta^2}{KR}$                         | $\eta \cdot K^2 R^2$                           |
|   |   | Z                    | $(1+\eta^2) \cdot \frac{1}{KR}$             | $-\eta \cdot KR$                               |
|   |   | $\gamma_2$ — Y       | $\frac{\eta}{KR}$                           | $-(1+\eta^2) \cdot K^2 R^2$                    |
|   |   | Z                    | $\frac{\eta}{KR}$                           | $-\eta^2 \cdot KR$                             |
|   | D | $\gamma_0$ — Y       | $\frac{\eta}{(K^4 R^4 + \eta^2) \times KR}$ | $\frac{\eta \cdot KR}{(K^4 R^4 + \eta^2)}$     |
|   |   | Z                    | $1+\eta^2$                                  | $\frac{\eta \cdot KR}{(K^4 R^4 + \eta^2)}$     |
|   |   | $\gamma_2$ — Y       | $\frac{\eta}{(\eta^2 + K^4 R^4) KR}$        | $\frac{(1+\eta^2) \cdot KR}{K^4 R^4 + \eta^2}$ |
|   |   | Z                    | $\eta$                                      | $\frac{\eta^2 \cdot KR}{K^4 R^4 + \eta^2}$     |

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. G. Beck, qui m'a proposé ce sujet et qui m'a toujours aidé de ses conseils et discussions, pour l'intérêt qu'il n'a cessé de porter à ce travail.

LABORATOIRE DE PHYSIQUE  
FACULTÉ DES SCIENCES DE COIMBRA

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] KELLOG, RABI, RAMSAY et ZACHARIAS. *Physical Review*, **55** (1939) pgs. 318.
- [2] G. BECK et TSIEN. *Cahiers de Physique* 2 série, tome 8 (1942), pgs. 19-21.
- [3] BETHE. *Physical Review*, **55** (1939) pg. 1261.  
SCHWINGER. *Physical Review*, **55** (1939), pg. 235.



## SUR L'EXPRESSION $\lambda = h/mv$ DE LA LONGUEUR DES ONDES DE DE BROGLIE ASSOCIÉES AUX CORPUSCULES EN MOUVEMENT \*

par RODRIGO SARMENTO DE BEIRES (À PÔRTO)

(Reçu le 31 Janvier 1946)

C'est à Louis de Broglie qui revient le mérite d'avoir réussi le premier à associer utilement un «paquet d'ondes» à un corpuscule en mouvement. Parti des relations définissant une transformation particulière de Lorenz, Louis de Broglie a été amené à fixer pour la longueur  $\lambda$  de l'onde associée à un corpuscule de masse  $m$ , en mouvement rectiligne de vitesse  $v$ , la valeur

$$(1) \quad \lambda = \frac{h}{mv}$$

$h$  représentant la constante de Planck.

Peu de temps après, Erwin Schrödinger est arrivé au même résultat par une toute autre voie et — ce qui a dû surprendre les physiciens de l'époque — indépendamment de la théorie de la relativité sur laquelle De Broglie avait fondé ses raisonnements.

En lisant les ouvrages sur la Mécanique Ondulatoire on a pourtant l'impression (nous l'avons eue du moins) qu'il aurait été possible de fixer pour  $\lambda$  une expression autre que celle choisie par Louis de Broglie.

Le but de la présente note c'est précisément de montrer que la relation de De Broglie donne la valeur de  $\lambda$  la seule possible, si l'on consent d'admettre les trois hypothèses suivantes qui, à l'époque, étaient à la base même de la Mécanique Ondulatoire :

a) l'énergie du corpuscule doit être un multiple entier du quantum de Planck (quantification sous sa forme primitive),

b) le «paquet d'ondes» associé au corpuscule possède une vitesse de groupe égale à la vitesse du corpuscule (principe de l'onde pilote),

\* Je remercie Mr. le professeur Mira Fernandes d'une très intéressante remarque qu'il a bien voulu me faire sur la conclusion de cette note.

c) les principes de Fermat (ou du chemin optique minimum) et de Maupertuis (ou de la moindre action pour des mouvement isoénergétiques) sont équivalents au sens que nous indiquerons plus loin.

Désignons par E l'énergie du corpuscule; l'hypothèse a) nous permet d'écrire

$$(2) \quad E = nh\nu$$

avec  $n$  entier,  $\nu$  étant la fréquence.

L'hypothèse b) donne, d'autre part

$$(3) \quad \frac{1}{v} = \frac{d}{d\nu} \left( \frac{\nu}{u(\nu)} \right)$$

car  $v$  est la vitesse du corpuscule,  $u(\nu)$  représente celle de propagation et le second membre de (3) est l'expression de la vitesse de groupe d'un paquet d'ondes (Lord Rayleigh).

Supposons enfin que le rapport des intégrales de Maupertuis et de Fermat, au lieu d'être constant, dépend de la fréquence. S'il en est ainsi, en effet, l'annulation de la variation de l'un entraîne encore celle de l'autre et les deux principes seront équivalents (hypothèse c)).

Désignons, alors, par  $F(\nu)$  une fonction inconnue de la fréquence, par  $2T$  la force vive du corpuscule et par  $s$  l'arc de la trajectoire sur laquelle nous avons fixé deux points d'abscisses  $s_0$  et  $s_1$  correspondants aux instants  $t_0$  et  $t_1$ , d'ailleurs quelconques. Nous aurons, d'après ce que nous venons de dire :

$$\int_{t_0}^{t_1} 2T \cdot dt = m \int_{s_0}^{s_1} v \cdot ds = mF(\nu) \int_{s_0}^{s_1} \frac{ds}{u}$$

et par suite

$$\int_{s_0}^{s_1} m \left( v - \frac{F(\nu)}{u} \right) ds = 0,$$

quel que soit le trajet, d'où :

$$(4) \quad uv = F(\nu).$$

Posons

$$F(\nu) = \frac{\nu}{G(\nu)}$$

$G(\nu)$  étant, tout comme  $F(\nu)$ , une fonction à déterminer.

De (3) et (4) on tire, successivement,

$$\frac{d}{d\nu} \left( \frac{\nu}{u} \right) = \frac{d}{d\nu} (vG(\nu)) = \frac{1}{v} \quad vG(\nu) \frac{d\nu}{d\nu} + \nu^2 \frac{dG}{d\nu} = 1$$

ou

$$\frac{1}{2} G(\nu) \frac{d(\nu^2)}{d\nu} + \nu^2 \frac{dG}{d\nu} = 1.$$

Or,

$$m\nu^2 = 2(E(\nu) - U),$$

—U étant la fonction des forces correspondante à la sollicitation du corpuscule; par conséquent:

$$\frac{1}{m} G(\nu) \frac{dE}{d\nu} + 2 \frac{E(\nu) - U}{m} \frac{dG}{d\nu} = 1.$$

Mais  $E = nh\nu$ , donc:

$$nh G(\nu) + 2(nh\nu - U) \frac{dG}{d\nu} = m,$$

d'où:

$$\frac{dG}{m - nhG} = \frac{d\nu}{2(nh\nu - U)}.$$

En intégrant on obtient

$$G(\nu) = \frac{1}{nh} \left( m - \sqrt{\frac{C}{nh\nu - U}} \right)$$

ou bien, en éliminant U:

$$G(\nu) = \frac{1}{nh} \left( m - \frac{1}{v} \sqrt{\frac{2C}{m}} \right).$$

La longueur d'onde étant donnée par

$$\lambda = \frac{u}{\nu}$$

il en résulte, pour  $n=1$ ,

$$\lambda = \frac{h}{mv - \sqrt{\frac{2C}{m}}}.$$

Si,  $v$  tendant vers zéro,  $\lambda$  doit croître au delà de toute limite, la constante C est nulle et nous arrivons à la relation de Louis de Broglie.





## MESURES SUR DES FILMS MINCES EN ARGENT

par A. VAN ITTERBEEK et L. DE GREVE

(Reçu le 2 Juin 1946)

1. Introduction. Depuis quelque temps nous étudions dans notre laboratoire [1] les propriétés électriques et magnétiques des films minces. Ces films sont obtenus soit par pulvérisation cathodique soit par évaporation directe dans le vide. Le présent travail traite l'influence des phénomènes de cristallisation sur la résistance électrique. Une étude analogue fut déjà publiée il y a quatre ans par SUHRMANN et SCHNACKENBERG [2]. Ils sont parvenus à établir qu'il existe une relation simple entre la vitesse de cristallisation et la température  $\Theta$  de DEBYE. Nous avons mesuré la vitesse de cristallisation en fonction de l'épaisseur des films et de la température. En ce que concerne ce dernier facteur, nous avons trouvé qu'effectivement on peut poser  $Q_a = k \cdot \Theta$  ( $Q_a$  énergie d'activation pour la cristallisation,  $k$  la constante de Boltzmann).

La seconde partie de ce travail traite la variation de la résistance électrique des films lorsque des gaz y sont occlus. Notre but initial était de mesurer la chaleur d'adsorption des gaz sur des films, en observant la variation de la résistance laquelle se produirait immédiatement lorsque le gaz est admis sur le film. En effet la chaleur d'adsorption dégagée devrait produire une augmentation de la résistance. Nous avons bien constaté une augmentation brusque de la résistance, mais celle-ci resta tout le temps. Une explication possible est que le gaz pénètre à l'intérieur des trous du métal et produit ainsi une augmentation de la résistance résiduelle. Nous avons déjà pu observer par nos travaux antérieurs que cette résistance résiduelle est très grande.

Nous avons étudié systématiquement l'augmentation de la résistance pour différentes épaisseurs des films et différents gaz (oxygène, hydrogène, hélium, azote, éthylène et ammoniaque).

2. Technique expérimentale. Fig. 1 représente l'appareil dans lequel se fait l'évaporation. Dans cette figure *S* est un fil en tungstène de 0,5 mm. Un courant de 10 amp. passe à travers ce fil. Des petits rubans d'argent très pur, fourni par la Maison PAUWELS Frères de Bruxelles, sont enroulés sur la partie centrale de *S*. *K* représente une

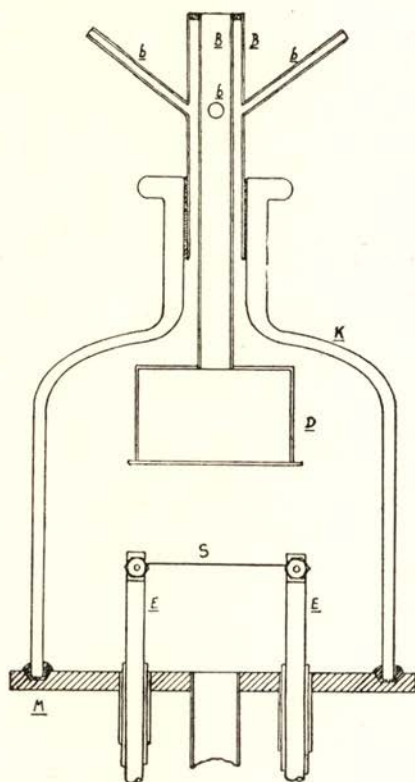


Fig. 1

cloche en verre laquelle repose dans une rainure *M* tournée dans un disque en cuivre massif. Cette rainure est remplie de cire molle pour vide de Leybold. Les films sont déposés sur des lames en verre de pyrex (épaisseur 0,5 mm, longueur 40 mm, largeur 4 mm). Ces lames sont attachées à la boîte *D*, en cuivre rouge, laquelle contient le liquide réfrigérant pour les mesures aux basses températures. *B* représente un tube en maillechord. Les fils conducteurs de la résistance passent à travers les tubes *b*, les sorties étant remplies de cire dure pour vide. L'assemblage des appareils est donné dans la figure 2. Le vide est contrôlé au moyen d'un manomètre à conductibilité thermique de PIRANI.

Le vide est meilleur que  $10^{-6}$  mm Hg. Le dégazement de la cloche se fait par ionisation appliquée au moyen d'un oscillateur de Tesla. Avant

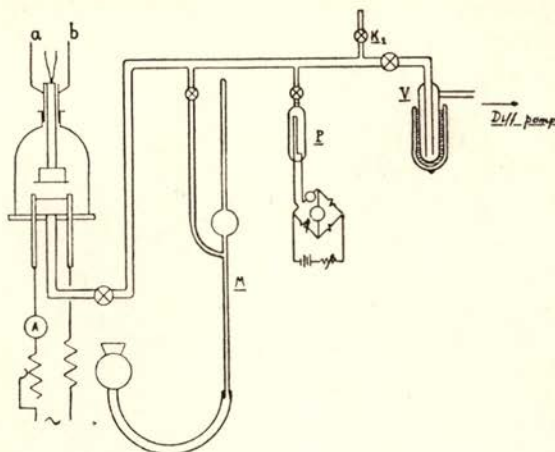


Fig. 2

la formation des films le vide est fait dans la cloche pendant 24 heures environ.

La formation des films se fait de la manière suivante. Nous évaporons en premier lieu des dépôts épais sur les deux extrémités du support en verre, la partie milieu restant couverte (voir fig. 3). Nous avons observé que dans le cas où les dépôts sont obtenus par pulvérisation cathodique la soudure des films s'opère difficilement. Cela n'arrive pas lorsque les bouts argentés sont obtenus par évaporation directe. Après cette première opération d'évaporation le support est enlevé de l'appareil et nous glissons des petits blocs en cuivre massif, auxquels sont soudés les fils conducteurs, sur les deux extrémités. Entre les vis de serrage et la lame sont placées des petites plaques en cuivre rouge de sorte que le contact porte sur une plus grande surface (voir figure 3). Le film est déposé entre les deux extrémités argentées.

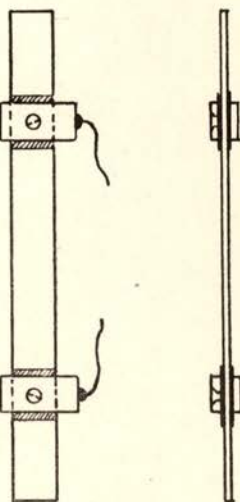


Fig. 3

La résistance des films est mesurée au moyen d'un pont de Wheatstone. L'épaisseur des films se détermine par pesée au moyen de la balance de Sartorius.

3. Mesures du phénomène de cristallisation. Différents expérimentateurs ont déjà observé que pendant un certain temps après la formation des films par évaporation, la résistance diminue d'une façon continue. Ce phénomène est expliqué comme étant dû à une cristallisation

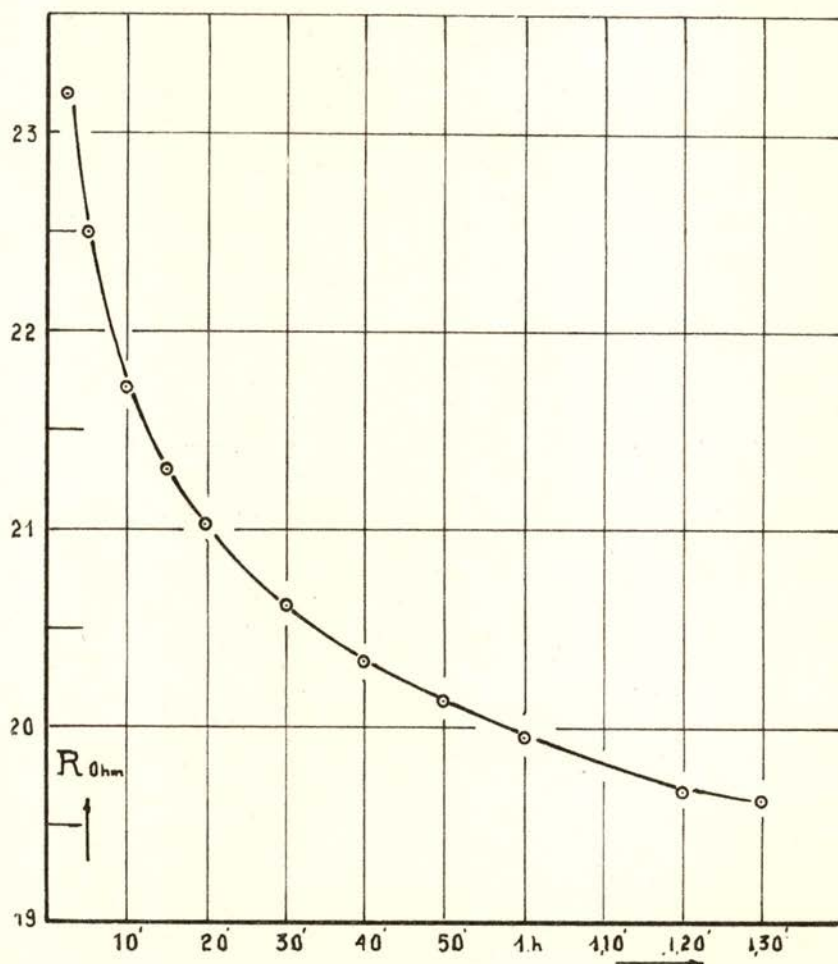


Fig. 4

continue du métal. Les études faites jusqu'ici et aussi la nôtre consistent à mettre ce phénomène en rapport avec les constantes physiques du métal en question.

SUHRMANN et SCHNACKENBERG ont montré que la variation de la résistance en fonction du temps peut être représentée au moyen de la for-

mule empirique suivante :

$$(1) \quad R - R_{\infty} = \frac{1}{K \cdot t + \frac{1}{R_0 - R_{\infty}}}$$

ou

$$(2) \quad \frac{1}{R - R_{\infty}} = K \cdot t + \frac{1}{R_0 - R_{\infty}}$$

$R_0$  étant la résistance correspondant à  $t=0$  et  $R_{\infty}$  pour  $t$  très grand. La vitesse de cristallisation  $K$  dépend du degré de cristallisation, de sorte que  $K$  n'est défini que pour un intervalle de temps déterminé et pas très long. Il en résulte aussi que la notation  $R_{\infty}$  n'a pas beaucoup de sens. On peut seulement dire que  $K$ ,  $R_0$  et  $R_{\infty}$  sont des paramè-

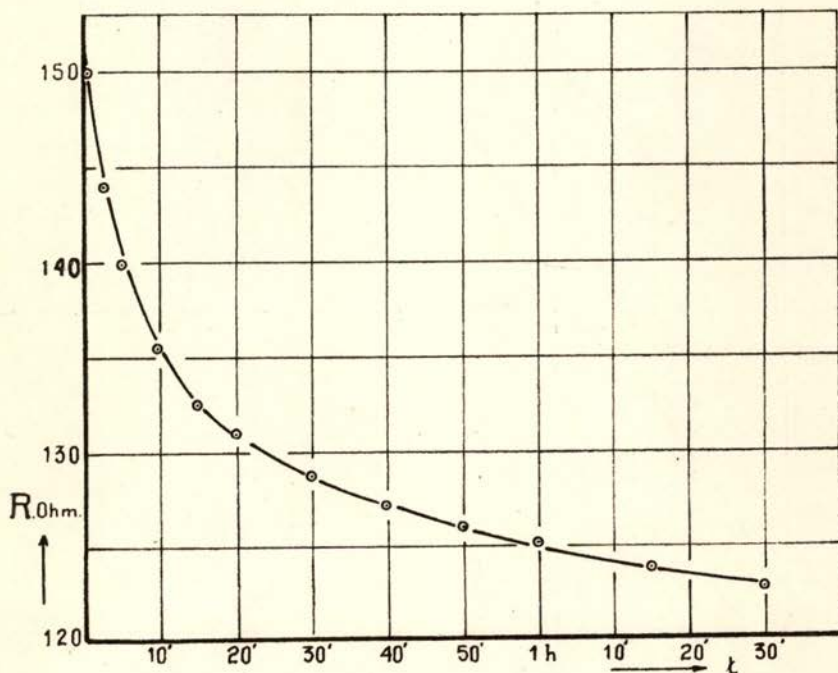


Fig. 5

tres qui définissent la courbe  $R(t)$  dans un intervalle déterminé. Cet intervalle est dans nos mesures de l'ordre de 2 heures environ. Nous avons trouvé qu'effectivement pour nos films la fonction  $R(t)$  peut être représentée au moyen de l'équation (1). Dans les figures 4 ( $Ag_1$ ) et 5 ( $Ag_7$ ) nous avons tracé quelques courbes correspondant à deux de

nos films. Pour déterminer les facteurs  $K$ ,  $R_0$  et  $R_\infty$ , nous procédons graphiquement de la façon suivante. Nous faisons d'abord sur les courbes

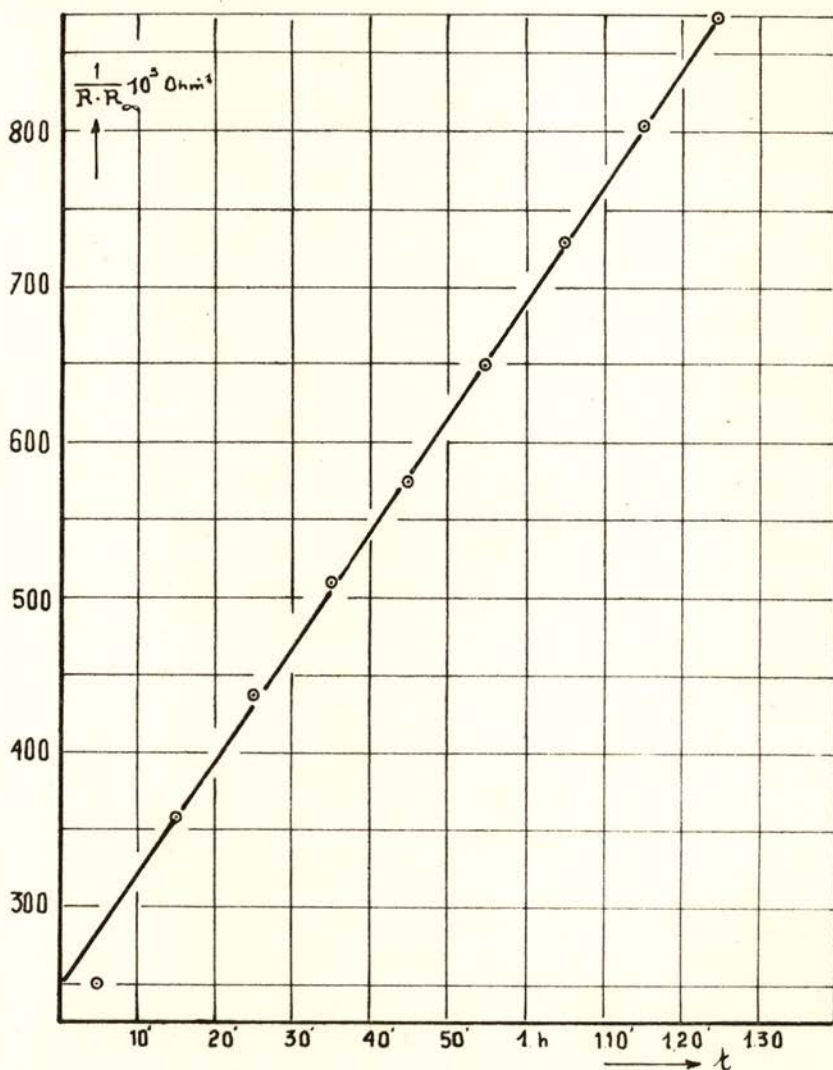


Fig. 6

$R(t)$  une estimation de la valeur  $R_\infty$ , puis en corrigeant cette valeur nous voyons graphiquement pour quelles valeurs de  $R_0$  et  $R_\infty$ , on obtient pour  $\frac{1}{R - R_\infty}$  en fonction de  $t$  des droites. Dans les figures 6 et 7 nous donnons les droites correspondant aux résistances  $Ag_1$  et  $Ag_7$ .

Les valeurs de  $R_0$  <sup>(1)</sup> que nous obtenons correspondent généralement au temps de 5' après l'arrêt de la condensation.

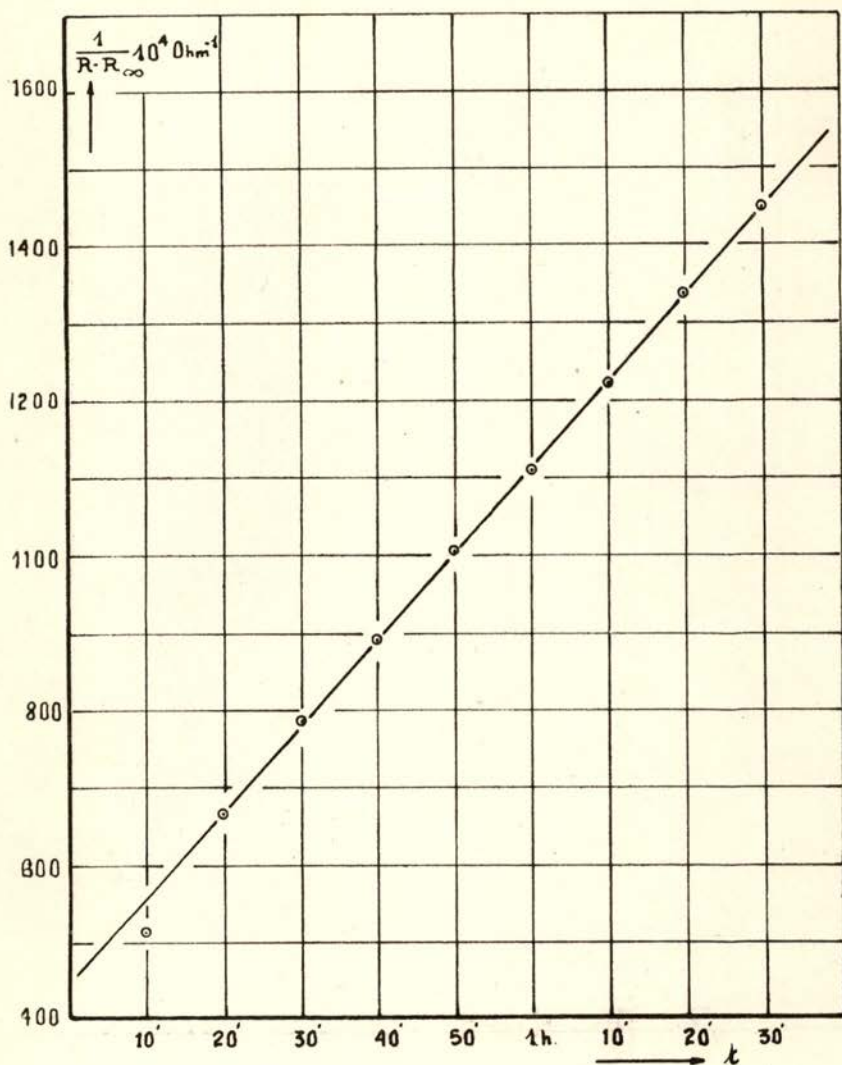


Fig. 7

Nous avons déterminé les valeurs de  $K$  pour différentes épaisseurs des films, les condensations se faisant chaque fois dans les mêmes condi-

(1) Pour  $R_0$  on ne peut pas prendre la résistance correspondant au moment de l'arrêt de l'évaporation. En effet il faut tenir compte du décroissement de la résistance par suite du refroidissement du film après la condensation.

tions. Les résultats obtenus sont indiqués dans le tableau I. Dans la figure 8, nous avons dessiné  $K$  en fonction de  $R_0$ .

SUHRMANN et SCHNACKENBERG ont montré en partant d'hypothèses

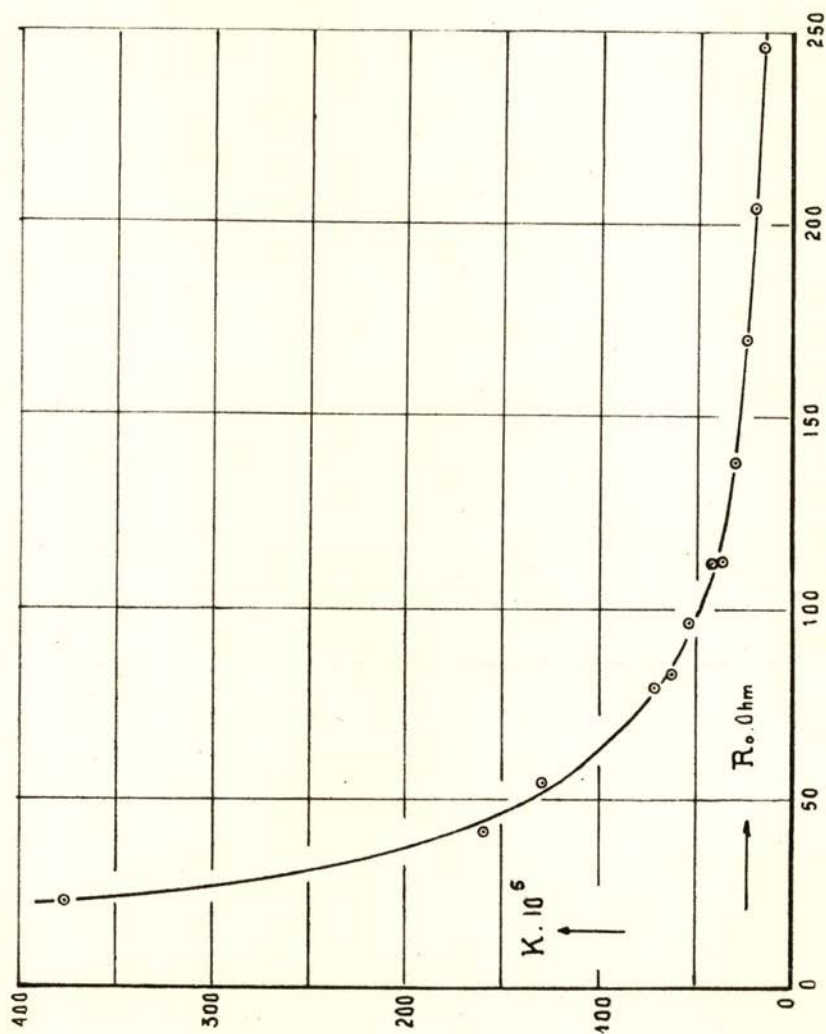


Fig. 8

très simples que  $\log K = -\frac{Q_a}{R \cdot T} + \text{constante}$ . En déterminant donc  $K$  pour un même film en fonction de la température on obtient  $Q_a$ . Ceci nous avons fait pour les films  $\text{Ag}'_1$ ,  $\text{Ag}'_2$ ,  $\text{Ag}'_3$  et  $\text{Ag}'_4$ . Pour ces films la condensation se fait à  $242^\circ \text{ abs}$ . La vitesse de cristallisation est



déterminée en premier lieu à cette température et ensuite à la température ordinaire. Pour cela le liquide réfrigérant est enlevé très vite du réservoir  $D$  et celui-ci est rempli d'un liquide ayant la température ambiante. Dans la fig. 9 sont indiqués les résultats obtenus pour la résistance  $Ag'_3$ .

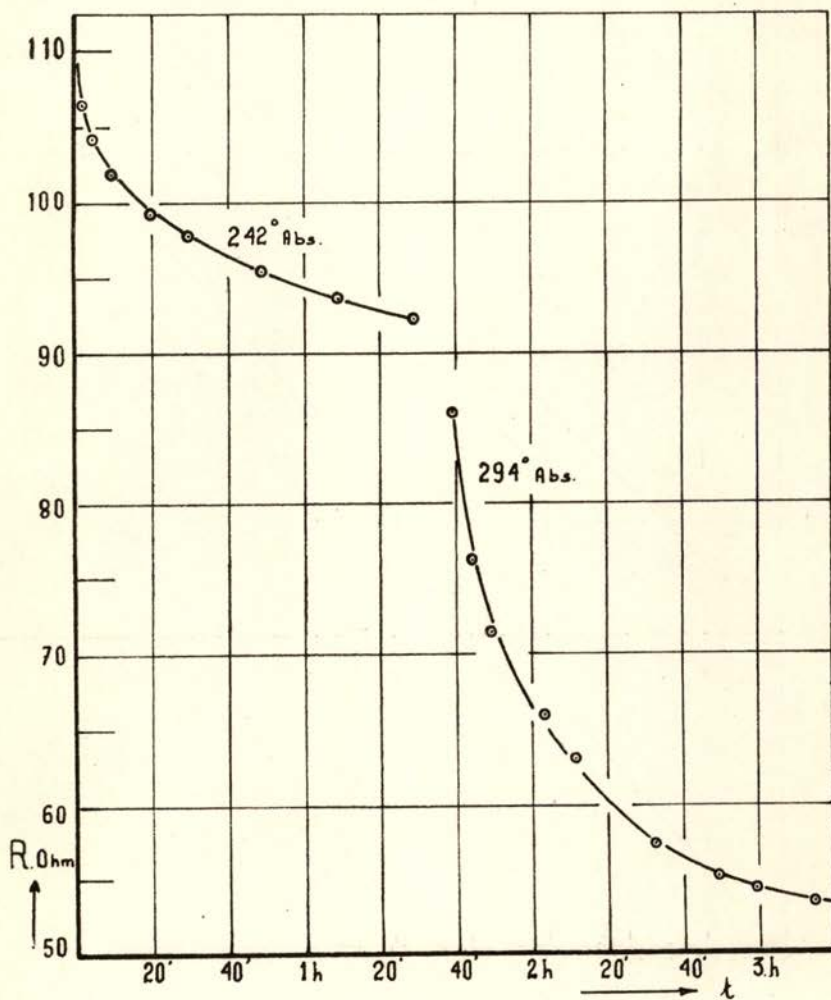


Fig. 9

Fig. 10 représente les droites pour la détermination des vitesses  $K$  pour  $Ag'_3$ .

Les résultats obtenus pour les différentes résistances sont indiqués dans le tableau II.

SUHRMANN et SCHNACKENBERG ont trouvé 420 cal/gr. atome. On peut

remarquer que  $k \cdot \Theta (=h \cdot \nu)$  est égal à 427 cal/gr. atome. La correspondance est donc très frappante, de même qu'avec nos résultats (Tableau II).

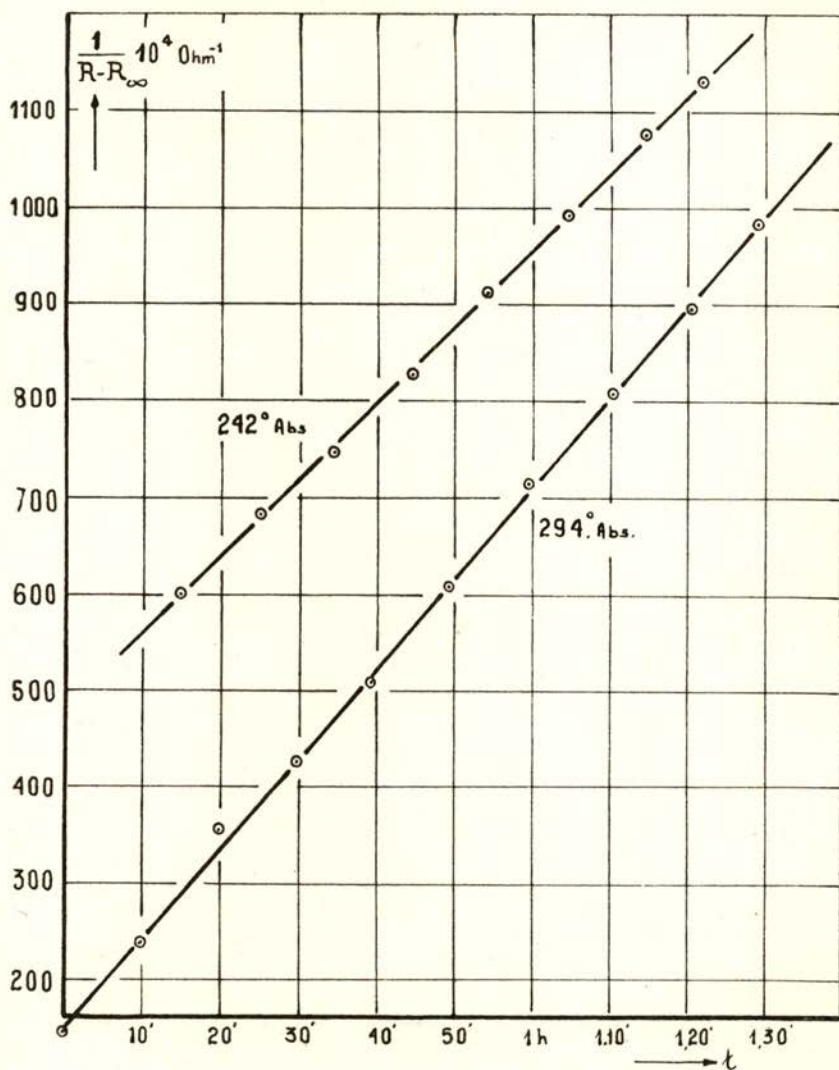


Fig. 10

4. Variation de la résistance sous l'influence de gaz occlus. Au cours de nos expériences, nous avons observé une augmentation brusque de la résistance du film lorsque de l'air fut introduit dans la cloche d'évaporation. Il nous était venu à l'idée appliquer ce phénomène à la mesure de la chaleur d'adsorption. Il fut décidé d'étudier systématique-

ment la variation de la résistance quand différents gaz sont introduits dans l'appareil d'évaporation et cela en fonction de l'épaisseur des films et pour différentes pressions des gaz. Nous avons dû abandonner cette première idée de déterminer par cette méthode la chaleur d'adsorption. En effet on observait bien une augmentation brusque de la résistance mais cette augmentation ne disparut pas.

L'argent est un catalyseur très actif dans les réactions d'oxygénation des composés éthyléniques; c'est ainsi qu'on observe la plus grande variation pour le cas de l'oxygène. Les résultats obtenus pour l'oxygène sont indiqués dans le tableau III. On observe que la variation relative de la résistance est dans les limites des erreurs d'observation indépendante de la pression. Nous avons chaque fois fait en sorte que l'épaisseur des films soit la même.  $R$  est la valeur de la résistance correspondant au régime où la cristallisation est terminée. Dans la fig. 11 sont

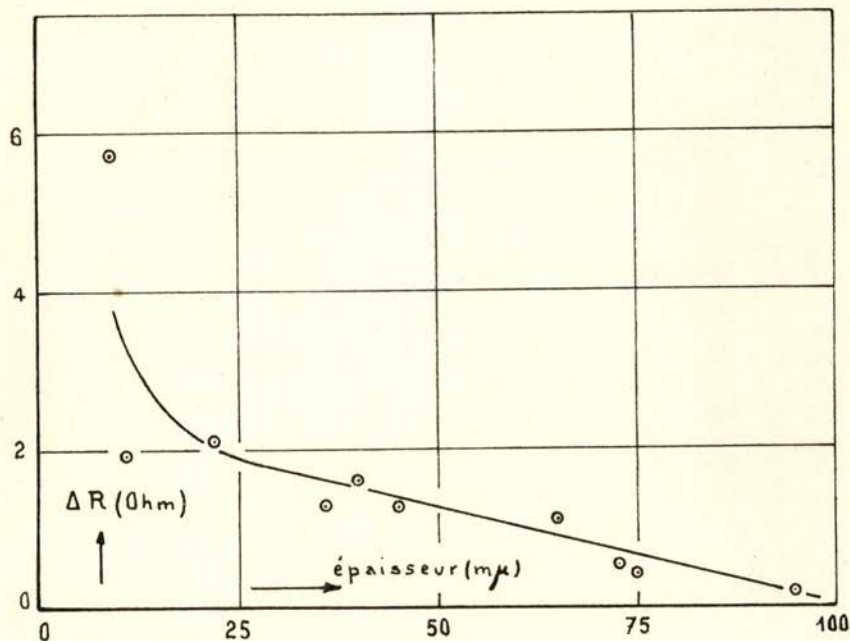


Fig. 11

indiqués les variations  $\Delta R$  en fonction de l'épaisseur pour l'oxygène. Dans le tableau IV sont indiqués les résultats des mesures pour les différents gaz. Nous remarquons donc que lorsque les gaz pénètrent dans les trous, qui produisent d'ailleurs la résistance résiduelle des films, la résistance des films augmente. Cette variation est la plus grande pour

l'oxygène comparé aux autres gaz. Pour l'ammoniaque dipolaire on obtient merveilleusement un décroissement.

TABLEAU I

|                 | $R_0$ ohm | $R_\infty$ ohm | $K \cdot 10^3 \text{ min}^{-1}$ |
|-----------------|-----------|----------------|---------------------------------|
| Ag <sub>1</sub> | 22,54     | 18,50          | 375,4                           |
| Ag <sub>2</sub> | 41,58     | 27,50          | 158,4                           |
| Ag <sub>3</sub> | 54,90     | 30,50          | 128,5                           |
| Ag <sub>4</sub> | 79,85     | 50,00          | 70,4                            |
| Ag <sub>5</sub> | 96,30     | 66,00          | 52,2                            |
| Ag <sub>6</sub> | 112,10    | 48,00          | 35,2                            |
| Ag <sub>7</sub> | 138,20    | 116,00         | 29,4                            |
| Ag <sub>8</sub> | 203,90    | 170,00         | 18,7                            |
| Ag <sub>9</sub> | 246,10    | 103,00         | 14,7                            |

TABLEAU II

|                 | T = 242° abs |                |   | T = 294° abs |                |   | $Q_a$<br>cal/gr. at. |
|-----------------|--------------|----------------|---|--------------|----------------|---|----------------------|
|                 | $R_0$ ohm    | $R_\infty$ ohm | $K \cdot 10^3$<br>ohm <sup>-1</sup> min <sup>-1</sup> | $R_0$ ohm    | $R_\infty$ ohm | $K \cdot 10^3$<br>ohm <sup>-1</sup> min <sup>-1</sup> |                      |
| Ag <sub>1</sub> | 274,2        | 250            | 15,8  | 289,9        | 180            | 18,5  | 422                  |
| Ag <sub>2</sub> | 160,0        | 128            | 20,0  | 169,5        | 100            | 23,4  | 428                  |
| Ag <sub>3</sub> | 104,6        | 83,8           | 35,2  | 111,6        | 44             | 41,2  | 427                  |
| Ag <sub>4</sub> | 82,0         | 66,9           | 53,1  | 83,0         | 18,5           | 61,8  | 420                  |

TABLEAU III

Augmentation de la résistance en fonction de la pression (oxygène)

| Epaisseur $\mu$ | Pression mm Hg | R ohm  | $\Delta R$ ohm | $\Delta R/R$ |
|-----------------|----------------|--------|----------------|--------------|
| 26              | 0,3            | 111,7  | 2,1            | 0,019        |
| 22              | 0,073          | 152,5  | 2,1            | 0,0139       |
| 27              | 0,032          | 88,79  | 1,84           | 0,0207       |
| 25              | 0,006          | 108,58 | 2,73           | 0,0251       |

TABLEAU IV

| Epaisseur $\mu$ . | Gaz                           | Pression mm Hg | R ohm  | $\Delta R$ ohm | $\Delta R/R$ |
|-------------------|-------------------------------|----------------|--------|----------------|--------------|
| 26                | O <sub>2</sub>                | 0,3            | 111,7  | 2,1            | 0,019        |
| 20                | H <sub>2</sub>                | 0,3            | 119,87 | 1,87           | 0,0156       |
| 25                | He                            | 0,3            | 110,79 | 1,47           | 0,0133       |
| 17                | N <sub>2</sub>                | 0,3            | 181,5  | 1,50           | 0,0082       |
| 27                | C <sub>2</sub> H <sub>4</sub> | 0,1            | 126,72 | 0,67           | 0,0053       |
| 20                | NH <sub>3</sub>               | 0,178          | 119,58 | -0,83          | -0,0069      |

Nous remercions Mons. L. TROCH, licencié en sciences physiques, pour son aide au cours de ces expériences.

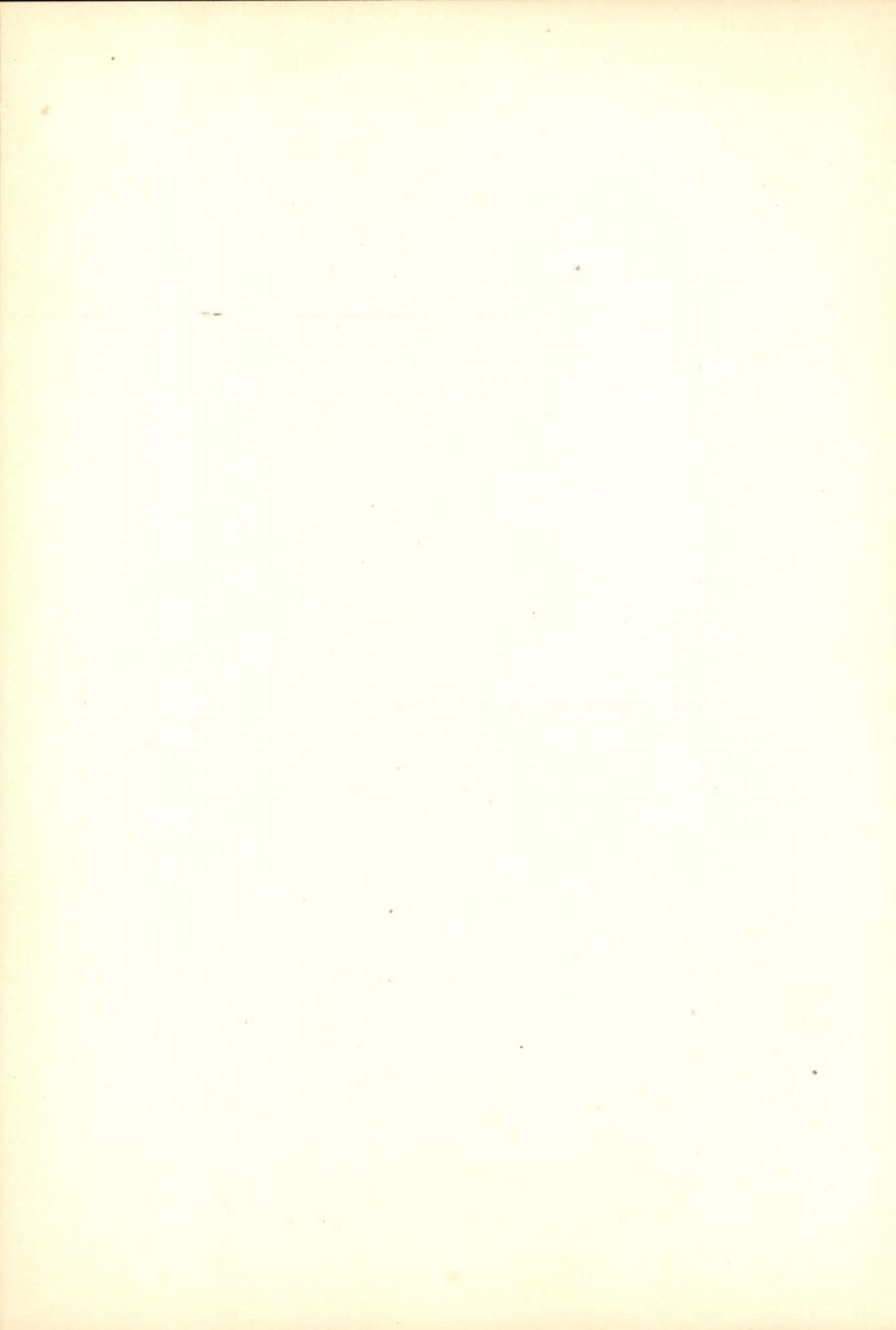
Finalement nous remercions le *Fonds National de la Recherche Scientifique* belge pour son aide sous forme de prêt d'instruments scientifiques ainsi que les Usines Philips à Eindhoven qui nous a procuré le fil de tungstène.

CENTRE D'ÉTUDE SCIENTIFIQUE ET TECHNIQUE  
DU FROID, LOUVAIN — BELGIQUE

Louvain, le 17 mai 1946

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] A. VAN ITTERBEEK et L. DE GREVE, *Med. Koninkl. Vl. Acad. v. Wetensch.* **V**, n° 15, (1943); *Physica*, **11**, 78, (1944); *Nature*, Novembre, (1945); *Physica*, **11**, 465, (1946); *Physica*, **11**, 470, (1946).  
A. VAN ITTERBEEK et A. DE BOCK, *Med. Koninkl. Vl. Acad. v. Wetensch.* **V**, n° 15, (1943); *Ann. d. Physique*, **20**, 290 (1945); *Physica*, **13**, 7, (1946).  
A. VAN ITTERBEEK et J. ROOSE, *Med. Koninkl. Vl. Acad. v. Wetensch.* **9**, (1944).
- [2] R. SUHRMANN et H. SCHNACKENBERG, *Zeitschr. f. Phys.* **119**, 314, (1942).



## ÉTUDE DES SATELLITES DE LA RAIE $L\alpha$ DE L'OR

par JOSÉ SARMENTO (À PÔRTO)

(Reçu le 15 Juillet 1946)

1. But du travail. L'étude de la bande satellite  $L\alpha$  de l'or a été entreprise, en 1937, par F. K. Richtmyer [1] au moyen d'un spectromètre à cristal double. Les résultats furent comparés aux calculs de E. Ramberg [2] et malgré certains écarts entre l'expérience et la théorie, celle-ci a, en tout cas, une valeur qualitative.

Dans le présent travail nous nous sommes proposé :

1°) de reprendre les mesures de Richtmyer au moyen d'un spectrographe à cristal courbe, type Cauchois, et de comparer les deux groupes de résultats ;

2°) de rechercher la bande satellite prévue par la théorie entre  $L\alpha_1$  et  $L\alpha_2$  mais qui n'a pas été observée par Richtmyer ; le cas échéant nous rechercherions sa forme, son intensité maximum et la position de celle-ci dans la bande ;

3°) de montrer, une fois de plus, l'avantage que le spectrographe de Cauchois peut présenter sur le spectromètre à cristal double.

2. Description de l'installation. Nous avons employé un tube à gaz, type Shearer, à anticathode d'or ; nous n'avons pas choisi le tube Coolidge car les raies du tungstène, qui apparaissent toujours avec les tubes à cathode incandescente, gênaient l'observation de la bande satellite.

Le vide était obtenu au moyen d'une pompe préparatoire suivie d'une pompe à diffusion de mercure, car les raies du mercure qui se forment toujours ainsi ne gênent pas l'observation des bandes satellites.

Le tube était placé à l'intérieur d'une boîte en plomb, dont les parois avaient 1 mm d'épaisseur, et qui ne gênait pas l'accès au tube.

Comme générateur de haute tension, nous avons employé une bobine d'induction Ducretet avec un interrupteur à jet de mercure.

Nous avons presque toujours travaillé à une tension de 40 kV, de façon à obtenir le meilleur contraste des raies, selon les indications de Coster et Huininger [3] d'après lesquels cette tension doit être d'environ deux fois et demi le potentiel d'excitation de la série (environ 14,4 kV).

Le courant était de 2 mA car nous avons remarqué qu'au dessus de cette valeur l'intensité des raies s'affaiblissait.

Nous avons construit un spectrographe à cristal courbe, type Cauchois, de 500 mm de rayon (*v. planche 1*). Les dimensions de la fenêtre du porte-cristal sont assez peu courants : 15 mm de largeur sur 5 mm de hauteur. Ces dimensions réduites, qui ont l'avantage de permettre l'usage d'excellentes lames cristallines, n'ont pas d'inconvénients, dans nos conditions de mesure, car la largeur du faisceau de rayons X ne dépassait pas 5 mm sur la fenêtre et, d'autre part, celle-ci permet encore d'obtenir sur le même cliché  $L\beta_5$  de Au (1038 U. X.) et  $K\alpha$  de Cu (1541 U. X.). Quant à la hauteur des raies, elle reste encore légèrement supérieure à 10 mm qui est la longueur maximum utile pour le microphotomètre enregistreur.

La lame cristalline a été obtenue à partir d'un protoprisme de quartz ; elle a été coupée parallèlement à l'axe. Comme plans réticulaires de réflexion, nous avons utilisé des plans parallèles aux faces du prisme di-hexagonal  $\{12\bar{3}0\}$ , avec une distance réticulaire de 1748,9 U. X. L'angle des plans réticulaires de réflexion avec la normale à la face est de  $1^\circ 25'$ .

**3. Spectrogrammes.** La fenêtre du tube à rayons X était à 22 cm du cristal sous un angle de  $28^\circ$ . Pour faire ressortir convenablement les bandes satellites nous avons dû faire des poses de plus de 24 heures avec des courants de 1,5 à 2 mA sous une tension de 40 à 50 kV. Nous avons employé des plaques «Ferrania Super-Orto Anti-halo».

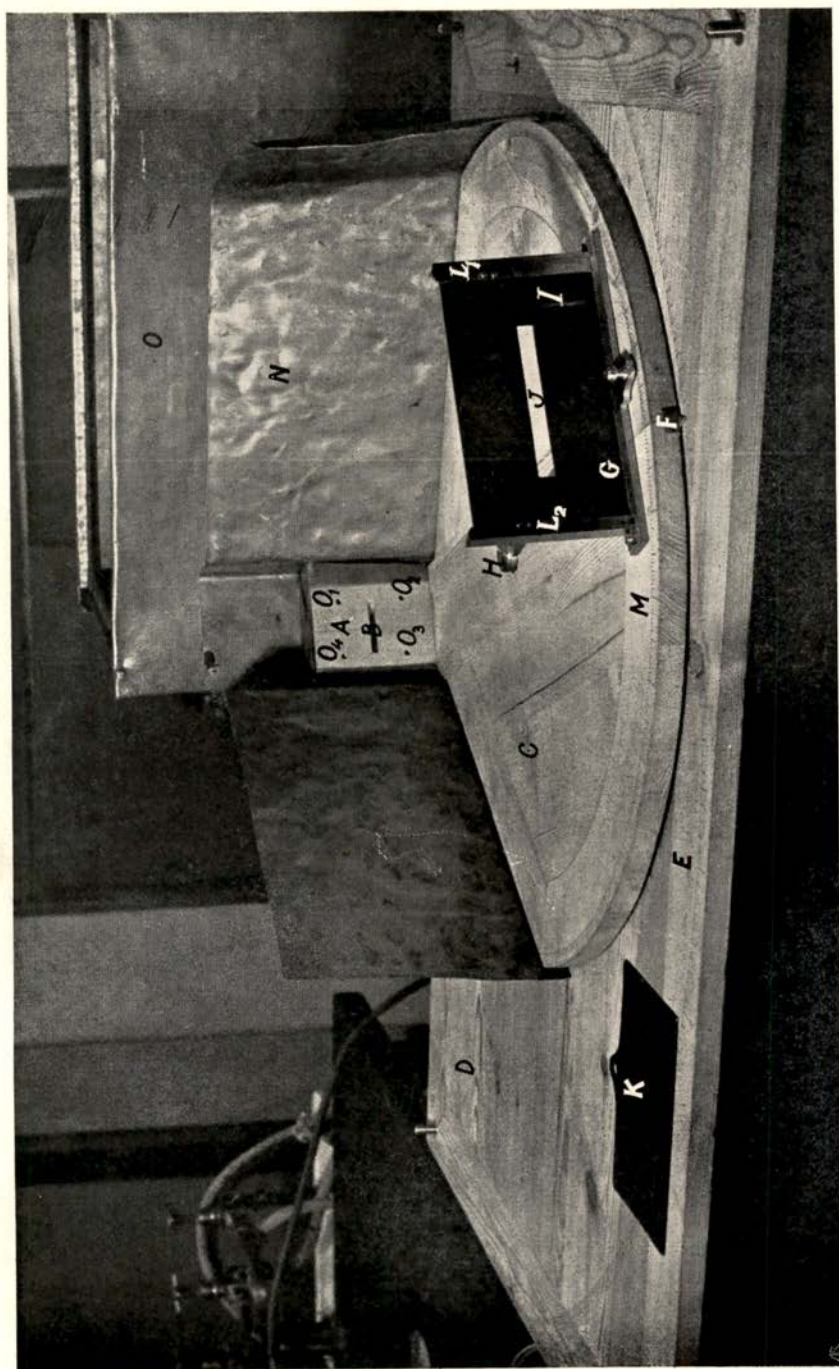
Les spectrogrammes ont été étudiés au moyen d'un microphotomètre enregistreur Zeiss à cellule photoélectrique à vide. Au cours des mesures nous avons examiné plusieurs fois un coin microphotométrique, vérifiant ainsi que la déviation  $d$  du fil de l'électromètre mesurée sur le cliché est reliée à la densité de noircissement  $\delta$  par la relation

$$\delta = A - n \log d$$

où  $A$  est une constante, variable avec chaque expérience, et  $n$  une constante dont les valeurs dans nos expériences ont toujours oscillé autour de 1,6.

Par définition on a  $\delta = \log \frac{I_0}{I}$  où  $I_0$  est l'intensité de la radiation

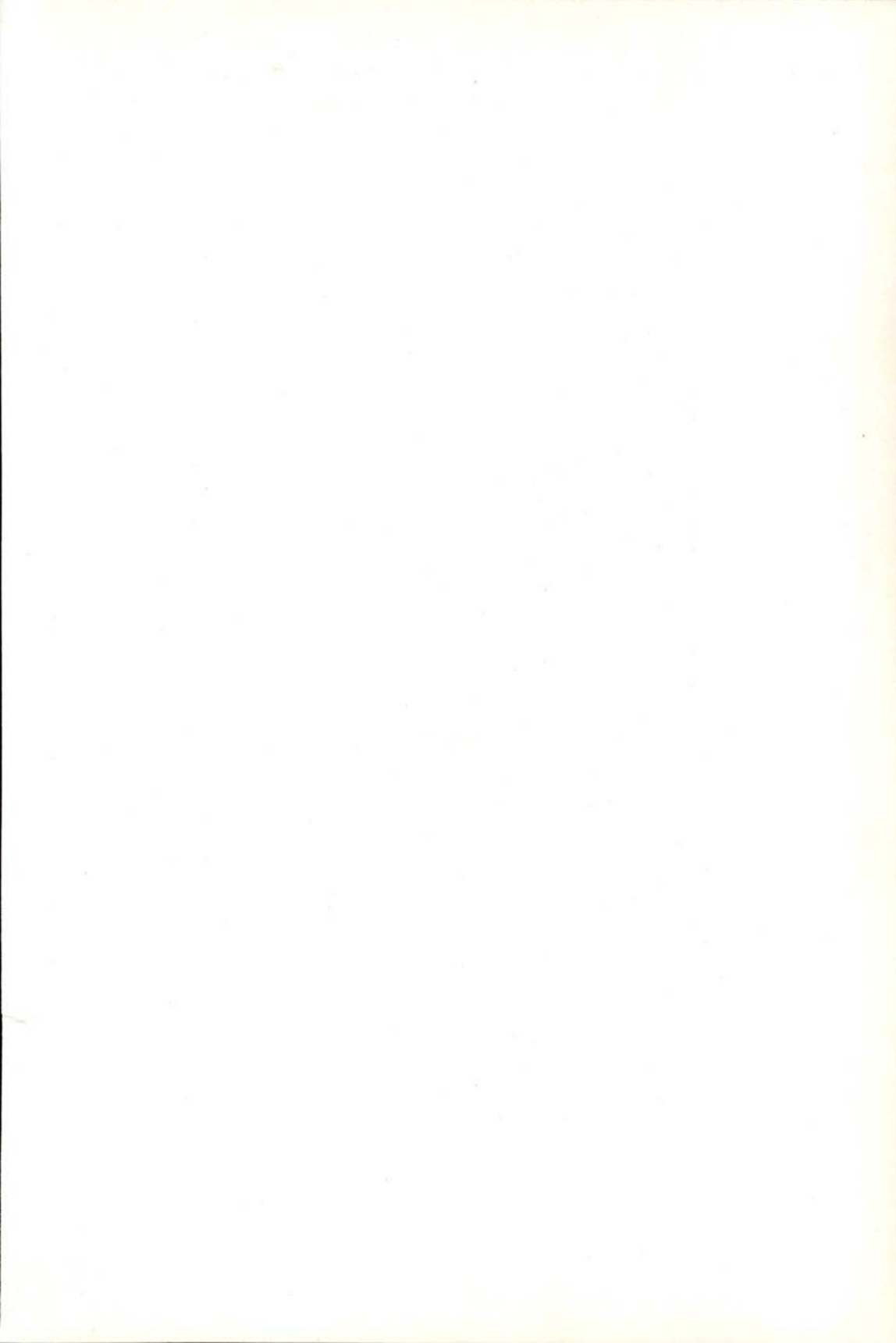




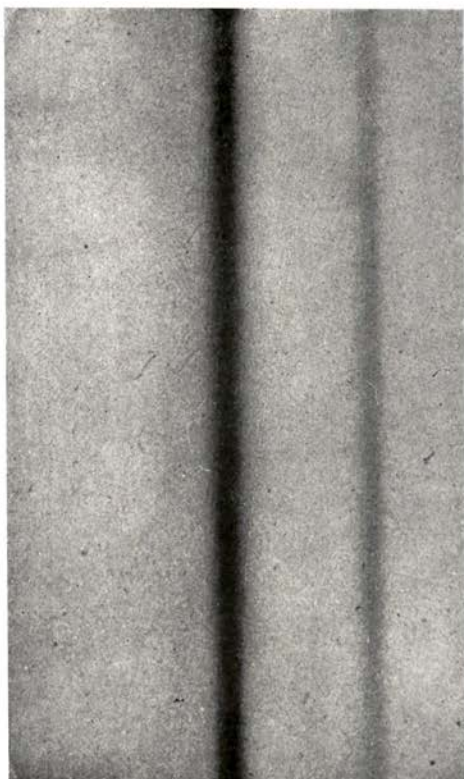
Speetrographe à cristal courbe, type Cauchois

1914

1914



Raies  $\alpha$  du spectre L de l'or



↑  
 $\alpha_1$

↑  
 $\alpha_2$

(En face p. 141)

lumineuse qui incide normalement sur le coin dans la zone de densité  $\delta$  et  $I$  est l'intensité transmise. On a donc

$$\log \frac{I_0}{I} = A - n \log d.$$

On peut écrire

$$\begin{aligned} A &= \log I_0 + \text{const.} \\ n \log d &= \log I + \text{const.} \end{aligned}$$

On en déduit

$$d^n = kI$$

Puisque dans les cellules à vide il y a proportionnalité entre l'intensité de la radiation et le courant d'électrons et comme la tension du fil de l'électromètre est directement proportionnelle à ce courant, la courbe d'étalonnage de l'électromètre aura la forme

$$d^n = k' u.$$

La constante  $n$ , de la formule  $\delta = A - n \log d$ , caractérise donc la courbe d'étalonnage. La forme de celle-ci dépend un peu de la position des couteaux et, surtout, de la nature de l'étrier du fil; mais dans nos mesures la position des couteaux s'est maintenue pratiquement invariable ce qui explique la constance de  $n$ .

La détermination de la densité de noircissement aux différents points du spectrogramme se faisait en passant au microphotomètre, d'abord le spectrogramme et tout de suite après le coin microphotométrique.

La connaissance des constantes  $A$  et  $n$  permettait alors de résoudre notre problème.

Pour passer des densités aux doses il faut déterminer expérimentalement la forme de la courbe  $\delta = f(D)$ , où  $\delta$  est la densité et  $D$  la dose.

Pour cela nous enregistrons sur le même cliché  $L\alpha_1$  de l'or, avec des temps de pose variables, en maintenant toujours le même régime du tube. Nous avons vérifié que pour des densités allant jusqu'à 1,7 et pour différentes densités du voile on pouvait admettre la proportionnalité de la dose à l'accroissement de densité.

4. La structure de la bande satellite de  $L\alpha$  de l'or. Cette structure a été étudiée sur le spectrogramme donné dans la planche 2. Le micro-

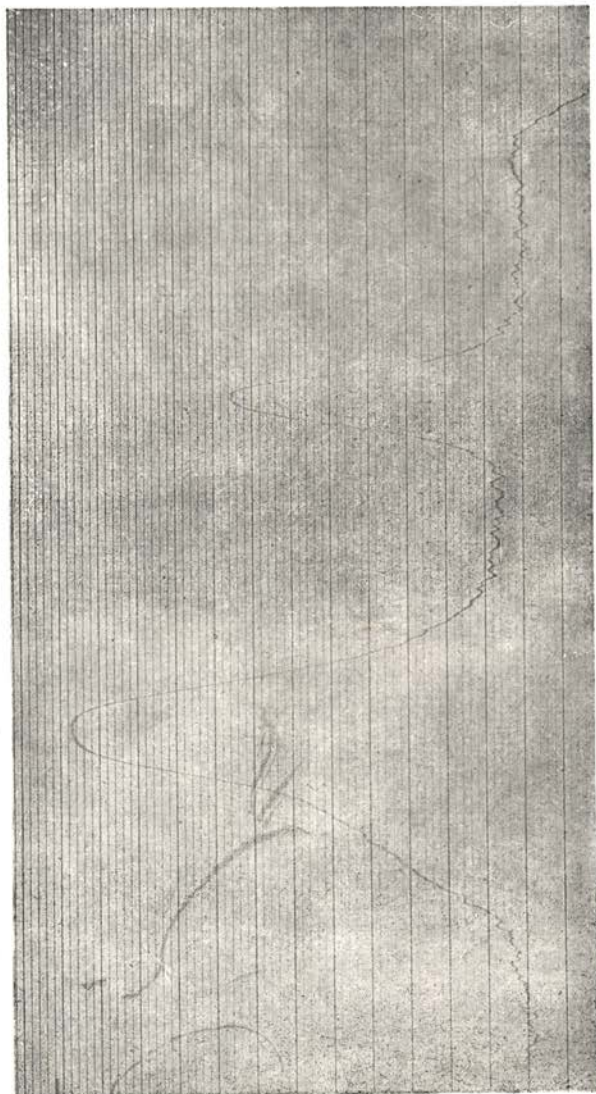
photogramme est reproduit dans la planche 3. Les densités sont obtenues en passant le coin et les résultats en sont donnés dans le tableau suivant.

| Densités<br>$\delta$ | Écart<br>$d$ | $\log d$ | Densités<br>$\delta$ | Écart<br>$d$ | $\log d$ |
|----------------------|--------------|----------|----------------------|--------------|----------|
| 3,8                  | 0,75         | —        | 2,0                  | 6            | 0,778    |
| 3,6                  | 1,0          | 0        | 1,8                  | 8            | 0,903    |
| 3,4                  | 1,0          | 0        | 1,6                  | 10           | 1,000    |
| 3,2                  | 1,5          | 0,176    | 1,4                  | 13           | 1,114    |
| 3,0                  | 1,75         | 0,243    | 1,2                  | 17,5         | 1,243    |
| 2,8                  | 2,0          | 0,301    | 1,0                  | 23,5         | 1,371    |
| 2,6                  | 2,75         | 0,439    | 0,8                  | 31,5         | 1,498    |
| 2,4                  | 3,75         | 0,574    | 0,6                  | 42,5         | 1,628    |
| 2,2                  | 4,75         | 0,677    | 0,4                  | 57           | 1,756    |

Avec la densité en ordonnées et le logarithme de l'écart en abscisses on obtient une courbe d'équation  $\delta = 3,25 - 1,62 \log d$ . On peut ainsi calculer les densités aux différents points du spectrogramme. Nous obtenons de cette façon les valeurs suivantes :

## ANALYSE DU MICROPHOTOGRAMME

| Abscisses  | Écart<br>$d$ | Logarithmes<br>des écarts<br>$\log d$ | $1,62 \log d$ | Densités<br>$\delta$ |
|------------|--------------|---------------------------------------|---------------|----------------------|
| - 10 a + 3 | 71           | 1,8513                                | 2,999         | 0,251                |
| + 9 a + 32 | 60,5         | 1,7188                                | 2,886         | 0,363                |
| 34         | 58           | 1,7634                                | 2,857         | 0,393                |
| 36         | 57           | 1,7559                                | 2,845         | 0,405                |
| 37         | 54,5         | 1,736                                 | 2,812         | 0,438                |
| 38         | 51           | 1,708                                 | 2,767         | 0,483                |
| 39         | 46           | 1,663                                 | 2,694         | 0,556                |
| 40         | 41           | 1,613                                 | 2,613         | 0,637                |
| 41         | 31           | 1,491                                 | 2,415         | 0,835                |
| 42         | 26           | 1,415                                 | 2,292         | 0,958                |
| 43         | 23,5         | 1,3711                                | 2,221         | 1,029                |
| 43,25      | "            | "                                     | "             | "                    |
| 44         | 24           | 1,380                                 | 2,236         | 1,014                |
| 45         | 26           | 1,415                                 | 2,292         | 0,958                |
| 46         | 31           | 1,491                                 | 2,415         | 0,835                |
| 47         | 37           | 1,568                                 | 2,540         | 0,710                |



$L\alpha_2$

$L\alpha_1$

Microphotogramme du spectre de la planche 2.





## ANALYSE DU MICROPHOTOGRAMME (suite)

| Abscisses | Écarts<br>$d$ | Logarithmes<br>des écarts<br>$\log d$ | $1,62 \log d$ | Densités<br>$\delta$ |
|-----------|---------------|---------------------------------------|---------------|----------------------|
| 48        | 44            | 1,643                                 | 2,662         | 0,588                |
| 49        | 49            | 1,690                                 | 2,738         | 0,512                |
| 50        | 52,5          | 1,730                                 | 2,786         | 0,464                |
| 51        | 55            | 1,740                                 | 2,819         | 0,431                |
| 52        | 57            | 1,756                                 | 2,845         | 0,405                |
| 53        | 57            | 1,756                                 | 2,845         | 0,405                |
| 54 a 60   | 57,5          | 1,760                                 | 2,851         | 0,399                |
| 67        | 56,5          | 1,752                                 | 2,838         | 0,412                |
| 70        | 54            | 1,732                                 | 2,806         | 0,444                |
| 73        | 51            | 1,708                                 | 2,767         | 0,483                |
| 75        | 46            | 1,663                                 | 2,694         | 0,556                |
| 77        | 40            | 1,602                                 | 2,595         | 0,655                |
| 78        | 35            | 1,544                                 | 2,501         | 0,749                |
| 79        | 29,5          | 1,470                                 | 2,381         | 0,869                |
| 80        | 23,5          | 1,362                                 | 2,206         | 1,044                |
| 81        | 18,5          | 1,267                                 | 2,052         | 1,197                |
| 82        | 12            | 1,079                                 | 1,748         | 1,501                |
| 83        | 7             | —                                     | —             | —                    |
| 84        | 4             | —                                     | —             | —                    |
| 85        | 2,75          | —                                     | —             | —                    |
| 86        | 2,5           | —                                     | —             | —                    |
| 86,5      | »             | —                                     | —             | —                    |
| 87        | 2,75          | —                                     | —             | —                    |
| 88        | 3,5           | —                                     | —             | —                    |
| 89        | 5             | —                                     | —             | —                    |
| 90        | 7             | —                                     | —             | —                    |
| 91        | 11            | 1,041                                 | 1,686         | 1,564                |
| 92        | 16            | 1,176                                 | 1,905         | 1,345                |
| 93        | 21            | 1,322                                 | 2,142         | 1,108                |
| 94        | 26            | 1,415                                 | 2,292         | 0,958                |
| 95        | 30            | 1,477                                 | 2,393         | 0,857                |
| 96        | 32,5          | 1,512                                 | 2,449         | 0,801                |
| 97        | 34            | 1,531                                 | 2,480         | 0,770                |
| 98        | 36            | 1,556                                 | 2,521         | 0,729                |
| 99        | 38            | 1,580                                 | 2,560         | 0,690                |
| 100       | 40            | 1,602                                 | 2,595         | 0,655                |
| 101       | 41            | 1,613                                 | 2,613         | 0,637                |
| 102       | 42            | 1,623                                 | 2,633         | 0,617                |
| 103       | 44            | 1,643                                 | 2,662         | 0,588                |
| 104       | 45            | 1,653                                 | 2,678         | 0,572                |
| 105       | 46            | 1,663                                 | 2,694         | 0,556                |
| 106       | 47,5          | 1,677                                 | 2,717         | 0,533                |
| 107       | 49            | 1,690                                 | 2,738         | 0,512                |

## ANALYSE DU MICROPHOTOGRAMME (suite)

| Abscisses | Écart<br>$d$ | Logarithmes<br>des écarts<br>$\log d$ | $1,62 \log d$ | Densités<br>$\delta$ |
|-----------|--------------|---------------------------------------|---------------|----------------------|
| 108       | 51           | 1,708                                 | 2,767         | 0,483                |
| 109       | 53           | 1,724                                 | 2,793         | 0,457                |
| 110       | 54,5         | 1,736                                 | 2,812         | 0,438                |
| 111       | 56           | 1,748                                 | 2,832         | 0,418                |
| 112       | 57,5         | 1,760                                 | 2,851         | 0,399                |
| 113       | 58           | 1,763                                 | 2,856         | 0,394                |
| 114       | 59           | 1,771                                 | 2,869         | 0,381                |
| 115       | 59           | 1,771                                 | 2,869         | 0,381                |
| 116 a 119 | 60           | 1,778                                 | 2,880         | 0,370                |
| 120 a 130 | 61           | 1,785                                 | 2,892         | 0,358                |

La courbe de la fig. 1 représente l'enregistrement microphotométrique du microphotogramme de la planche 3. Il a été tracé en prenant en abscisses les nombres donnés dans la première colonne du tableau et en ordonnées ceux qui se trouvent dans la deuxième colonne. La bande satellite dans la région  $\nu > \nu_{Lz_1}$  se détache nettement de la partie inférieure de la raie  $Lz_1$  et dans la région entre  $Lz_1$  et  $Lz_2$ , bien qu'elle soit moins nette, on peut encore l'observer.

On peut admettre que la différence de longueur d'onde de deux radiations voisines est proportionnelle à leur écart. C'est sur cette base que nous avons étalonné les axes supplémentaires de la fig. 1.

Puisque nous avons remarqué que jusqu'à  $\delta=1,7$  il y avait proportionnalité des doses aux accroissements de densité, il s'ensuit que la courbe des densités, jusqu'à  $\delta=1,6$ , représentera aussi, dans une certaine échelle, la courbe des intensités.

À partir des valeurs du tableau nous avons tracé la courbe à trait plein de la fig. 2 (en abscisses, les valeurs de la première colonne et en ordonnées celles de la seconde).

L'intensité aux différents points du spectrogramme est directement proportionnelle à la différence entre l'ordonnée de la courbe et celle du fond continu, 0,35. Le maximum de la raie  $Lz_2$  est égal à 10,7% du maximum de  $Lz_1$  et comme, sur l'original de la fig. 2, l'intensité maximum de  $Lz_2$  est donnée par une longueur de 66,5 mm, on en déduit que 6,2 mm représentent 1% du maximum de  $Lz_1$ , ce qui a permis de représenter les intensités sur la fig. 2.

Pour séparer la bande satellite de la raie fondamentale nous avons soustrait de la courbe d'intensité le fond sur lequel se détache la bande

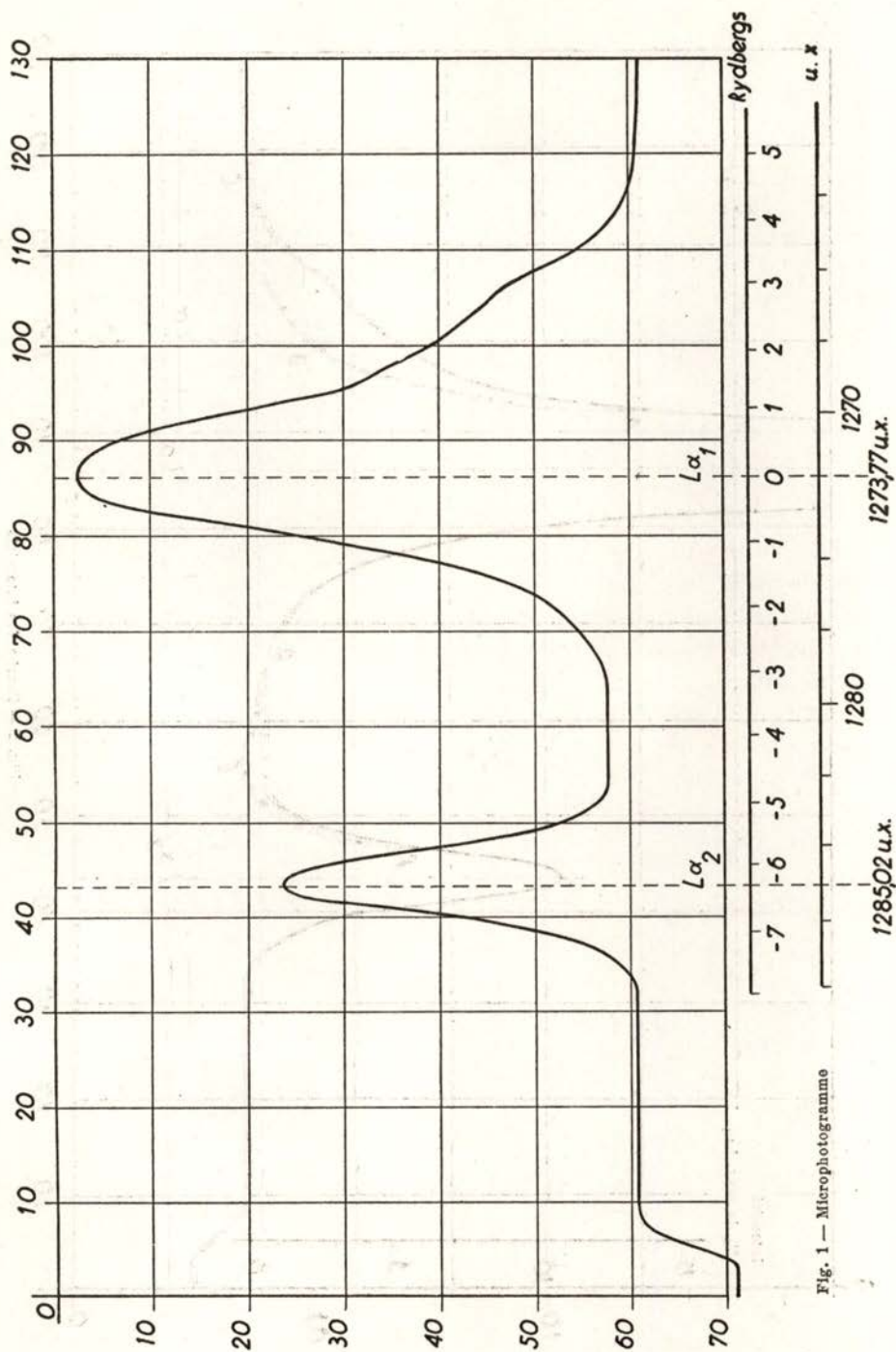


Fig. 1 — Microphotogramme

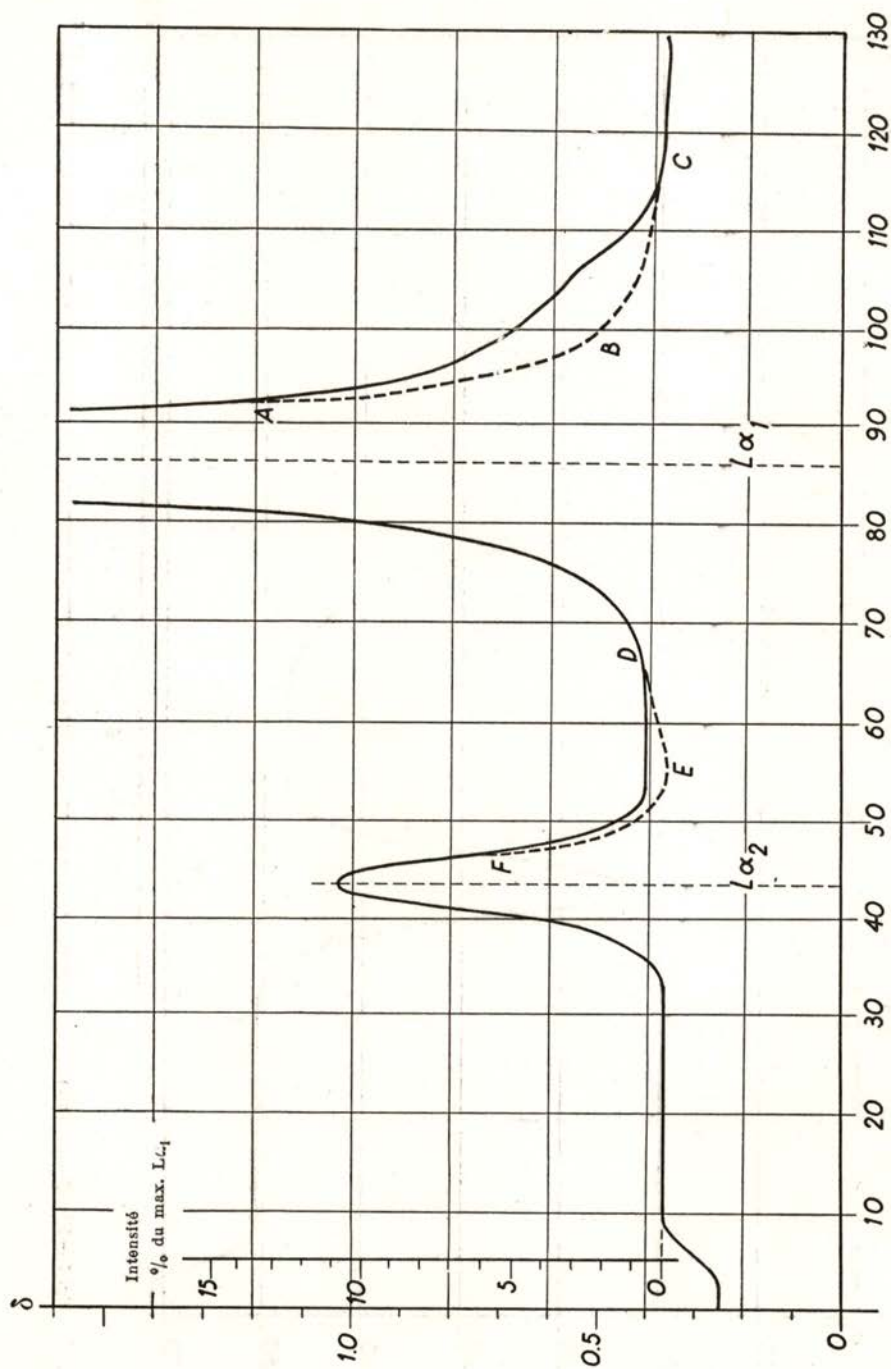


Fig. 2 — Courbe des Intensités

satellite. Parrat [4] a déjà remarqué la difficulté et l'arbitraire de cette opération. Pour la réaliser nous avons admis que les raies  $L\alpha_1$  et  $L\alpha_2$  sont symétriques et que dans les voisinages des maxima l'intensité de la bande est suffisamment petite pour qu'on puisse la négliger. Nous avons ainsi obtenu le fond sur lequel se détache la bande et qui est représenté sur la fig. 2 par la ligne pointillée  $FED$  et  $ABC$ .

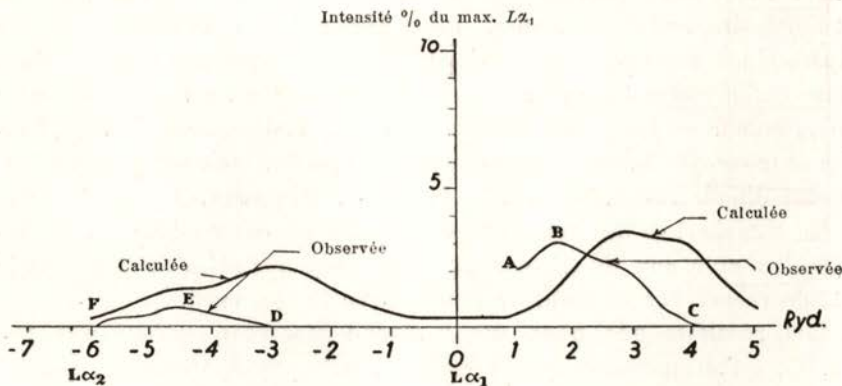


Fig. 3 — Bande satellite

Les branches  $FED$  et  $ABC$  de la fig. 3 ont été obtenus en soustrayant les ordonnées des courbes à trait plein et pointillée. Ces deux branches donnent la distribution observée de l'énergie dans la bande satellite. Nous y avons représenté aussi, à échelle égale, la bande calculée par Ramberg.

Dans le tableau suivant nous comparons nos résultats à ceux de Richtmyer et aux valeurs calculées :

|                             | Bande satellite $\nu > \nu_{L\alpha_1}$ |                     | Bande satellite $\nu_{L\alpha_2} < \nu < \nu_{L\alpha_1}$ |                     |
|-----------------------------|---|---------------------|---|---------------------|
|                             | Intensité maximum                       | Position du maximum | Intensité maximum   | Position du maximum |
| J. Sarmiento. . . . .       | 3,0 %                                   | +1,73 Ryd.          | 0,8 %   | -4,7 Ryd.           |
| F. K. Richtmyer. . . . .    | 2,7 %                                   | +1,96 »             | —   | —                   |
| Valeurs calculées . . . . . | 3,25 %                                  | +2,8 »              | 2 %   | - 3 Ryd.            |

5. Conclusions. Nos résultats s'accordent, tout au moins en partie, avec ceux de Richtmyer qui a travaillé avec un spectromètre à cristal double. Tandis que cet auteur a obtenu la valeur 2,7 % pour l'intensité

maximum de la bande située dans la région  $\nu > \nu_{L\alpha_1}$ , nous avons déterminé la valeur 3,0%; la différence est tout-à-fait admissible en pareilles mesures. On peut en dire autant en ce qui concerne la position du même maximum.

Richtmyer n'a pas trouvé trace de la bande prévue théoriquement entre les raies  $L\alpha_1$  et  $L\alpha_2$ ; nous avons observé cette bande et, malgré l'imprécision des mesures, déterminé sa configuration, la longueur d'onde et l'intensité de son maximum. La configuration de la bande observée ressemble à celle prévue théoriquement. La différence signalée dans cette région entre les valeurs observées et calculées est du même ordre de grandeur de celle de la régions  $\nu > \nu_{L\alpha_1}$ . Les maxima de deux bandes se trouvent déplacés, par rapport à la théorie, vers les grandes longueurs d'onde respectivement de 1,1 et 1,7 Rydbergs.

En signalant ce déplacement systématique on espère donner une contribution utile aux théoriciens qui voudraient refaire la théorie dans le but de rechercher un meilleur accord avec l'expérience.

Les résultats que nous avons obtenu montrent, encore une fois [5, 6], qu'un spectrographe à cristal courbe, type Cauchois, permet d'obtenir des résultats qui ne sont pas inférieurs à ceux qui resultent de l'emploi d'un spectromètre à cristal double.

Ce travail a été réalisé, en 1943-44, au Centre d'Études de Physique de la Faculté des Sciences de Lisbonne. L'auteur a bénéficié d'une bourse accordée par l'*Instituto para a Alta Cultura*.

#### BIBLIOGRAPHIE

- [1] F. K. RICHTMYER AND E. RAMBERG, *Phys. Rev.*, **51** (1937), p. 925.
- [2] E. RAMBERG AND F. K. RICHTMYER, *Phys. Rev.*, **51** (1937), p. 913.
- [3] D. COSTER, H. H. KUIPERS AND W. J. HUIZINGA, *Physica*, **2** (1935), p. 870.
- [4] L. G. PARRAT, *Phys. Rev.*, **50** (1936), p. 598.
- [5] M. VALADARES ET F. MENDES, *C. R.*, **206** (1938), p. 744.
- [6] M. VALADARES, *Ricerca Scientifica*, **XI** (1940), p. 270.

## LES SCHÉMAS ALÉATOIRES DEVANT LA RELATIVITÉ RESTREINTE

par G. DEDEBANT

(Reçu Septembre 1946)

### INTRODUCTION

Sous le titre de «*Mécanique Aléatoire*», nous avons — en collaboration avec Ph. Wehrlé — publié dans cette Revue<sup>1</sup>, un exposé, malheureusement trop condensé, du *Calcul Aléatoire* et de ses premières applications physiques. Tel quel, sa lecture est pourtant nécessaire à la parfaite compréhension de cette Note. L'appareil mathématique fort modeste, dont nous nous servons, ne doit pas faire mésestimer la valeur et l'importance des idées qui y sont exprimées.

Présentement, il s'agit d'un essai d'application du *point de vue aléatoire* aux Nouvelles Mécaniques. On y trouvera deux schémas aléatoires relativistes : l'*onde aléatoire* (ou fonction aléatoire stationnaire de l'espace-temps) et la *probabilité de présence dans l'espace-temps*, linéarisés — pour simplifier leur traitement mathématique — respectivement sous forme de *paquet d'ondes* et de *paquet d'événements*, qui nous semblent offrir un pouvoir d'explication étendu (notion statistique d'onde et de corpuscule; formule de L. de Broglie; champ électromagnétique, théorie de la Lumière; constituants élémentaires de la Matière). Notre espoir est que l'intérêt de Physiciens et de Mathématiciens, plus compétents que nous même, soit suffisamment éveillé pour que, passant sur les imperfections de forme, ils se rendent compte des possibilités énormes de la voie que nous avons entrevue.

Les circonstances veulent que j'ai réalisé ce travail seul, mais je me rends bien compte que je n'y serais pas parvenu sans les échanges suivis d'idées que j'ai eus pendant des années avec Ph. Wehrlé, dont le concours m'a cette fois, beaucoup manqué.

Je dois à l'Instituto para a Alta Cultura de m'avoir procuré, en

<sup>1</sup> Portugaliae Physica. 1944-45.

m'invitant à venir exposer mes idées à la Faculté des Sciences de Pôrto, l'ambiance nécessaire pour les mettre au point et je remercie en bloc les Professeurs avec qui j'ai eu des échanges de vue très profitables.

Je remercie enfin «Portugaliae Physica» de m'accorder encore une fois l'hospitalité.

## I. L'ONDE ALÉATOIRE

1. Qu'est-ce que l'onde aléatoire ? La Théorie des Fonctions aléatoires montre que la fonction aléatoire analytique stationnaire la plus générale de deux paramètres certains  $x$  et  $t$ , a un coefficient de corrélation de la forme :

$$(1) \quad r(\tau, k) = \cos \overline{(\Omega\tau - Mk)}$$

$\tau$  et  $k$  désignent les différences :  $(t_2 - t_1)$  et  $(x_2 - x_1)$ .  $\Omega$  et  $M$  sont deux nombres aléatoires quelconques, définis par la loi de probabilité conjuguée :

$$(\omega, \mu),$$

$\omega$  et  $\mu$  étant les valeurs courantes de  $\Omega$  et de  $M$ .

Le signe «trait» ( $\overline{\quad}$ ) est la moyenne prise avec cette loi de probabilité.

Nous rappelons que cette forme (1) du coefficient de corrélation est une conséquence immédiate des «conditions de cohérence» — ou conditions que doivent remplir les coefficients de corrélation de nombres aléatoires associés par couples.

Au point de vue statistique, deux fonctions aléatoires sont équivalentes, lorsqu'elles ont le même coefficient de corrélation, bien que leurs réalisations sur des épreuves individuelles puissent être très différentes.

Or, on peut réaliser le coefficient de corrélation (1) au moyen de la fonction aléatoire  $\psi$ , définie sur une épreuve de la manière suivante :

$$\psi = A \cos (\Omega t - Mx + \Phi),$$

où  $A$  et  $\Phi$  sont deux nouveaux nombres aléatoires, indépendants de  $\Omega$  et de  $M$ ;  $\Phi$  est un angle aléatoire, compris entre 0 et  $2\pi$ , et de distribution *uniforme*.

Cette réalisation particulière explique le succès de l'onde en Physique Théorique, malgré sa naïveté (optique ondulatoire de Fresnel, acoustique, électromagnétisme, etc.). Elle justifie le nom «d'Onde aléatoire» que nous donnons à la fonction aléatoire analytique stationnaire la plus générale, de deux paramètres certains.

On peut se représenter une onde aléatoire comme un *ensemble* d'ondes élémentaires, ayant pour caractéristiques  $\Omega, M$ , des nombres aléatoires



dont les dispersions (statistiques) et la corrélation sont définies par une certaine loi de probabilité conjuguée :  $(\omega, \mu)$ .

La différence de notre conception avec celle d'une *série de Fourier* réside en ceci : que, dans la série de Fourier, il y a l'idée de superposition *par addition* des différents termes (ou composantes), tandis que dans l'onde aléatoire, il y a seulement l'idée de considérer *à la fois* les diverses composantes, sans préjuger de la manière dont on peut les combiner. Notre conception n'est pas, au fond, distincte de celle de *matrice*.

2. Qu'est-ce qu'un paquet d'ondes? L'onde aléatoire devient un «paquet d'ondes» lorsque les nombres aléatoires  $\Omega$  et  $M$  sont *peu dispersés*. C'est une manière de «*linéariser*» en quelque sorte le problème, en le réduisant à son squelette, sans cependant abandonner aucune idée essentielle; cela va permettre des calculs tout à fait élémentaires. On montre qu'alors  $\Omega'$  et  $M'$  (parties purement aléatoires de  $\Omega$  et de  $M$ ) suivent une loi de *Gauss-Bravais*. La loi  $(\omega, \mu)$  est donc décrite par les moments statistiques suivants :

$$\omega_0 = \bar{\Omega}, \quad \mu_0 = \bar{M}, \quad P = \bar{M}^2, \quad Q = \overline{\Omega' M'}, \quad R = \bar{M}'^2.$$

Un calcul facile montre que le coefficient de corrélation d'un paquet d'ondes se laisse mettre sous la forme :

$$r(\tau, k) = \cos(\omega_0 \tau - \mu_0 k) \exp \left[ -\frac{1}{2} \varphi(\tau, k) \right],$$

où  $\varphi(\tau, k)$  est la forme quadratique définie positive :

$$\varphi(\tau, k) = Pk^2 - 2Qk\tau + R\tau^2.$$

Faisons remarquer que la vitesse moyenne des ondes du paquet :  $\frac{\omega_0}{\mu_0}$ , peut être supérieure à celle de la lumière sans que  $r$  cesse d'être «cohérent».

3. Effet de la transformation de Lorentz sur le paquet d'ondes. Soit  $S(0)$  — ou simplement  $S$  — et  $S(\beta)$  — ou simplement  $S'$  — deux systèmes de référence dont la vitesse relative est  $\beta c$ .

Ecrivons la transformation de Lorentz :

$$\begin{cases} x = \frac{x' + \beta ct'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ t = \frac{t' + \beta/c x'}{\sqrt{1 - \beta^2}} \end{cases} \quad \beta^2 < 1.$$

Les différences  $k = x_2 - x_1$  et  $\tau = t_2 - t_1$ , se transforment selon les mêmes formules :

$$k = \frac{k' + \beta c \tau}{\sqrt{1 - \beta^2}}; \quad \tau = \frac{\tau' + \beta/c k'}{\sqrt{1 - \beta^2}}.$$

Dans le système  $S(\xi)$ , le coefficient de corrélation est de la forme :

$$r_1(\tau', k') = \cos [\omega_0(\xi) \tau' - \mu_0(\xi) k'] \exp \left[ -\frac{1}{2} \varphi_1(\tau', k') \right],$$

avec :

$$\varphi_1(\tau', k') = R(\xi) \tau'^2 - 2 Q(\xi) \tau' k' + P(\xi) k'^2.$$

Nous *poserons* que  $r_1(\tau', k')$  est identique à ce que devient  $r(\tau, k)$  quand on y remplace  $\tau$  et  $k$  en fonction de  $\tau', k'$  — ce qui revient à dire que le coefficient de corrélation est un *invariant physique*.

L'identification nous donne alors les formules selon lesquelles se transforment les caractéristiques statistiques du paquet d'ondes :

$$\mathcal{C}_1(\xi) \left\{ \begin{array}{l} \mu(\xi) = \varepsilon \frac{\mu_0 - \beta/c \omega_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ \omega(\xi) = \varepsilon \frac{\omega_0 - \beta c \mu_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} \\ P(\xi) = \frac{1}{1 - \beta^2} (P - 2 \beta/c Q + \beta^2/c^2 R) \\ Q(\xi) = \frac{1}{1 - \beta^2} [-\beta c P + (1 + \beta^2) Q - \beta/c R] \\ R(\xi) = \frac{1}{1 - \beta^2} (c^2 \beta^2 P - 2c \beta Q + R) \end{array} \right. \quad \varepsilon = \pm 1$$

Les transformations  $\mathcal{C}_1(\xi)$  forment un groupe. Elles laissent invariante la loi de probabilité conjuguée  $(\omega, \mu)$  qui définit la structure du paquet d'ondes :

$$\frac{(d\omega d\mu)}{2\pi\sqrt{\Delta}} \exp \left[ -\frac{1}{2\Delta} (R\mu^2 - 2Q\mu\omega + P\omega^2) \right]; \quad (\Delta = PR - Q^2).$$

En effet :

1°)  $\omega_0$  se transforme comme  $k$ , et  $\mu_0$  comme  $\tau$ . Il en est de même des *valeurs courantes*  $\omega$  et  $\mu$ , car les valeurs probables  $\omega_0$  et  $\mu_0$  sont susceptibles, en faisant varier la loi de distribution — de prendre n'importe laquelle des valeurs courantes.

Or, puisque nous avons posé que la forme quadratique :

$$\varphi(\tau, k) = Pk^2 - 2Qk\tau + R\tau^2$$

était un invariant, il en est de même aussi de la forme :

$$\varphi(\mu, \omega) = P\omega^2 - 2Q\omega\mu + R\mu^2,$$

qui est l'argument de la loi de Gauss.

2°)  $\Delta = PR - Q^2$ , discriminant de la forme quadratique, est aussi un invariant.

3°) Enfin : 
$$d\omega' d\mu' = d\omega d\mu$$

*Remarque.* Le résultat précédent est vrai d'une manière générale, sans linéariser l'onde aléatoire sous forme de paquet. En effet :

$$C(\tau, k) = e^{\frac{i}{\Omega\tau - Mk}}$$

désignant la fonction caractéristique de la loi  $(\omega, \mu)$ , on a :

$$r(\tau, k) = \frac{C(\tau, k) + C^*(\tau, k)}{2}$$

Si donc, l'on assure l'invariance de  $r(\tau, k)$ , on assure ipso-facto l'invariance de la fonction caractéristique, donc de la loi  $(\omega, \mu)$ .

4. Equivalence du changement du système de référence avec un certain mode d'observation dans le système primitif. Soit des observateurs placés dans le système  $S(\beta)$ , qui étudient en un point ( $k' = 0$ ) la corrélation en fonction de l'intervalle de temps propre  $\tau'$ , de ce système (connexion « locale »<sup>1</sup>).

Soit d'autre part, des observateurs placés dans le système  $S$ , qui étudient la corrélation entre deux points variables  $x_1$ , et  $x_2$  de  $S$ , à des instants  $t_1$ , et  $t_2$ , tels que :

$$k/\tau = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \beta c.$$

Le résultat des mesures sera :

a) pour les observateurs de  $S(\beta)$ , un coefficient de corrélation,

<sup>1</sup> Selon la terminologie que nous avons introduite en Mécanique Aléatoire.

fonction de l'intervalle de temps propre  $\tau'$ , et donné pour la formule :

$$\cos [\omega_0(\beta) \tau'] \exp \left[ -\frac{1}{2} R(\beta) \tau'^2 \right],$$

obtenue en faisant  $k'=0$  dans l'expression générale de  $r_1(\tau', k')$ .

b) pour les observateurs de  $S$ , un coefficient de corrélation, fonction de l'intervalle de temps propre  $\tau$ , et donné par la formule :

$$\cos (\omega_0 - \mu_0 \beta c) \tau \exp \left[ -\frac{1}{2} (Pc^2 \beta^2 - 2Qc\beta + R) \tau \right],$$

obtenue en faisant  $k = \beta c \tau$ , dans l'expression générale de  $r(\tau, k)$ .

Comme :

$$\tau = \frac{\tau'}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

il résulte des formules de transformation  $\mathcal{C}_1(\beta)$ , que les corrélations obtenues par les observateurs de  $S(\beta)$  et par ceux de  $S$  sont *identiques*.

Cela tient visiblement à ce que nous avons posé que le coefficient de corrélation est un invariant physique.

Ainsi, un certain mode d'observation dans le système  $S$ , *équivaut* à la mesure de la connexion locale dans le système  $S(\beta)$ , ou encore à la mesure de la «*connexion physique*»<sup>1</sup> d'un «*corpuscule*» ayant par rapport à  $S$  la vitesse  $\beta c$ .

*Pareillement*, soit des observateurs du système  $S(\beta)$ , qui étudient la corrélation à un *instant donné* ( $\tau'=0$ ) entre les différents points de ce système («*connexion géométrique*»), et soit d'autre part, des observateurs de  $S$ , qui étudient la corrélation entre des points  $x_1$  et  $x_2$ , et des instants  $t_1$  et  $t_2$ , tels que :

$$k/\tau = \frac{c}{\beta}.$$

Ces deux groupes d'observateurs obtiennent le même coefficient de corrélation.

Il y a donc *équivalence* entre un certain mode d'observation dans  $S$  et la mesure de la connexion géométrique dans un système  $S(\beta)$ , ou

<sup>1</sup> Par connexion physique, nous entendons : connexion en accompagnant le corpuscule (Voir Mécanique Aléatoire).

encore de la connexion d'une « onde stationnaire » dans le système  $S(\beta)$ , onde qui est progressive de vitesse  $c/\beta$ , dans le système  $S$ .

*Allons plus loin*: nous devrions pouvoir dire aussi que ce dernier mode d'observation équivaut à la mesure de la connexion locale dans un système  $S(1/\beta)$ , de vitesse  $c/\beta$ , si la transformation de Lorentz n'interdisait pas de considérer des systèmes de référence en mouvement plus rapide que la lumière.

**5.** Les systèmes de référence de vitesse supérieure à  $c$ . Pourtant, la considération de tels systèmes a un sens physique parfaitement défini, car elle équivaut à des opérations physiques, matériellement réalisables dans  $S$ .

Insistons un peu plus sur ce point — bien qu'il ne cache aucun mystère — parce qu'il semble heurter l'idée que l'on se fait habituellement de la Théorie de la Relativité restreinte.

Soit deux points  $x_1$  et  $x_2$ , appartenant à un même système de référence matériel (disons: la Terre). Dans ce système existe un *temps propre* (les horloges de tous les points pouvant être synchronisées au moyen de signaux lumineux). Or, rien n'empêche l'observateur ( $x_2$ ) de transmettre *retrospectivement*, par une voie quelconque (disons: la poste ordinaire), les observations qu'il a faites en  $x_2$ , en fonction du temps propre du système, à l'observateur ( $x_1$ ) qui pourra à loisir, les confronter avec les siennes — faites en fonction du même temps propre.

Le coefficient de corrélation :

$$r(x_2 - x_1, t_2 - t_1)$$

pourra être calculé pour *toutes* les valeurs de  $k = x_2 - x_1$ , et de  $\tau = t_2 - t_1$ , alors même que  $k/\tau > c$ , alors même que  $k/\tau = \infty$ .

Et s'il est vrai qu'en ce cas, les corrélations ne traduisent plus un *lien de causalité*, il n'en est pas moins sûr qu'elles existent — comme il existe, de par le synchronisme des mouvements, des corrélations entre les vitesses verticales des ondes d'une houle *établie*, même à des distances considérables.

Or, la méthode expérimentale qui vient d'être décrite revient, *formellement*, à se placer dans un système de référence de vitesse  $\beta > 1$ . Le résultat des expériences doit pouvoir s'exprimer dans un tel système. Et pourtant, pour  $\beta > 1$ , la transformation de Lorentz donne un coefficient de corrélation *incohérent*, parce que supérieur à l'unité — le cosinus devenant un cosinus hyperbolique et l'exponentielle négative, une exponentielle positive. Il y a donc lieu de rechercher un *prolongement* de la transformation de Lorentz (pour  $\beta > 1$ ), qui donne un coef-

ficient de corrélation théorique *cohérent*, susceptible de représenter le coefficient de corrélation expérimental, pour des observations faites dans le système  $S$ , au cas où :  $\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} > c$ .

6. La transformation de Lorentz étendue. Effectuons un changement d'axes quelconque :

$$\begin{cases} x = a_{11} x' + a_{14} t' \\ t = a_{41} x' + a_{44} t' \end{cases}$$

Pour que ces axes puissent constituer un système de référence physiquement admissible, doivent être satisfaits les deux principes de base de la Relativité restreinte, à savoir :

a) le principe de l'invariance de la vitesse de la lumière.

b) le principe de Relativité, selon lequel il est impossible de distinguer celui des systèmes  $S$  ou  $S'$  qui est en mouvement et quel est celui qui est au repos.

Le premier principe entraîne :

$$x'^2 - c^2 t'^2 = \alpha (x^2 - c^2 t^2),$$

$\alpha$  étant un constante.

Cela réduit les changements de coordonnées admissibles à la forme :

$$x = \frac{1}{\alpha} (x' + \beta c t'); \quad t = \frac{1}{\alpha} \left( t' + \frac{\beta}{c} x' \right),$$

$\alpha$  et  $\beta$ , étant deux paramètres *arbitraires*.

Le second principe s'applique, classiquement, de la manière suivante : Résolvons les formules de transformation par rapport à  $x'$  et  $t'$ , soit :

$$x' = \frac{\alpha}{1 - \beta^2} (x - \beta c t); \quad t' = \frac{\alpha}{1 - \beta^2} \left( t - \frac{\beta}{c} x \right).$$

Cette transformation inverse doit être la même que celle que l'on obtient en changeant  $\beta$  en  $-\beta$ . Il faut donc que :

$$\begin{aligned} \text{d'où :} \quad & \frac{\alpha}{1 - \beta^2} = \frac{1}{\alpha}, \\ & \alpha = \pm \sqrt{1 - \beta^2}. \end{aligned}$$

On trouve la transformation de Lorentz en choisissant la détermination

positive du radical. Cette transformation entraîne :  $\beta < 1$ , et toutes les conséquences qu'on a tirées de là.

Avec le point de vue aléatoire, le principe de Relativité peut s'entendre d'une manière moins stricte. Comme l'expérience n'atteint que des corrélations, il suffit que la transformation inverse donne le même coefficient de corrélation que le changement de  $\beta$  en  $-\beta$ , ou encore donne le même :

$$\cos(\omega\tau - \mu k).$$

Or, pour cela, il suffit que la transformation inverse reproduise au signe près l'argument  $(\omega\tau - \mu k)$  que donne le changement de  $\beta$  en  $-\beta$ .

Il suffit cette fois que :

$$\frac{\alpha}{1 - \beta^2} = \pm \frac{1}{\alpha},$$

ce qui donne :

$$\alpha = \varepsilon \sqrt{|1 - \beta^2|}; \quad \varepsilon = \pm 1.$$

d'où :

$$(\mathcal{L}) \quad x = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{|1 - \beta^2|}} (x' + \beta c t'); \quad t = \frac{1}{\varepsilon \sqrt{|1 - \beta^2|}} (t' + \beta/c x').$$

Telle est la transformation de Lorentz «étendue».

*Remarque.* La transformation :

$$x = -x'; \quad t = -t';$$

est en somme considérée ici comme non distincte de la transformation identique. Elle laisse en effet le coefficient de corrélation formellement identique à lui-même, et c'est tout ce qui importe.

**7.** Propriétés de la transformation de Lorentz étendue. Convenons de considérer la transformation :

$$x = \varepsilon x'; \quad t = \varepsilon t' \quad (\varepsilon = \pm 1),$$

comme la transformation identique. Alors, les transformations  $(\mathcal{L})$  forment un groupe.

a) L'inverse d'une transformation s'obtient en remplaçant  $\beta$  par  $-\beta$ .

b) Le produit de deux transformations s'obtient en composant les vitesses  $\beta$  et  $\beta'$  selon la règle :

$$\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'},$$

la même que dans la transformation de Lorentz. Mas l'on peut obtenir

maintenant des vitesses supérieures à 1; il demeure cependant que 1, composé avec n'importe quelle vitesse, donne toujours 1.

Le groupe  $(\mathcal{L})$  est caractérisé non plus par l'invariance de  $(c^2 t^2 - x^2)$ , mais par celle de  $|c^2 t^2 - x^2|$ . C'est un groupe abélien dont le groupe de Lorentz  $(\mathcal{L}_1)$  est un *sous-groupe*, mais les transformations de l'ensemble  $(\mathcal{L}_2)$  qui correspond à  $|\beta| > 1$ , ne forment pas un sous-groupe.

En effet:

a) si  $\beta$  et  $\beta' < 1$ ,  $\beta'' = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} < 1$ ;  $[(\mathcal{L}_1)$  est un sous-groupe].

b) si  $1/\beta$  et  $1/\beta' > 1$ ,  $\beta'' = \frac{1/\beta + 1/\beta'}{1 + 1/(\beta\beta')} = \frac{\beta + \beta'}{1 + \beta\beta'} < 1$ ;

[le produit de deux transformations de  $(\mathcal{L}_2)$  appartient à  $(\mathcal{L}_1)$ ].

c) si  $\beta < 1$  et  $\frac{1}{\beta'} > 1$ ,  $\beta'' = \frac{\beta + 1/\beta'}{1 + \beta/\beta'} = \frac{1 + \beta\beta'}{\beta + \beta'} > 1$ ;

[le produit d'une transformation de  $(\mathcal{L}_1)$  par une transformation de  $(\mathcal{L}_2)$  donne une transformation de  $(\mathcal{L}_2)$ ].

On peut établir l'isomorphisme suivant entre le groupe de Lorentz étendu et le groupe multiplicatif des nombres réels des deux signes ( $a$  = nombre réel):

$$\begin{cases} (\beta)(\beta') \xrightarrow{a} a a' \\ (\beta^{-1}) = (-\beta) \xrightarrow{a} \frac{1}{a} \end{cases}$$

Dans cet isomorphisme:

a)  $(\mathcal{L}_1)$  correspond au sous-groupe des nombres positifs.

b)  $(\mathcal{L}_2)$  correspond à l'ensemble des nombres négatifs.

c)  $\beta = 1$  (vitesse de la lumière) est l'homologue du nombre zéro, car:

$$(\beta)(1) = (1) \text{ et } a \cdot 0 = 0$$

d)  $\beta = 0$  (transformation identique) est l'homologue du nombre un, car:

$$(\beta)(0) = (\beta) \text{ et } a \cdot 1 = a.$$

e) changer  $\beta$  en  $1/\beta$  revient à changer le signe d'un nombre:

$$\beta \rightarrow 1/\beta \text{ correspond à: } a \rightarrow (-a)$$

La considération de vitesses ultralumineuses apparaît donc comme une conception du même ordre que celle des nombres négatifs.



Mais l'on peut présenter d'une manière encore plus saisissante le sens de l'extension de la transformation de Lorentz.

On sait que le groupe de Lorentz est isomorphe au groupe des *rotations* dans l'espace-temps. Son extension consiste à adjoindre les *symétries* aux rotations. Le groupe étendu ( $\mathcal{L}$ ) est isomorphe au groupe, formé par les rotations et les symétries. Comme lui, il est constitué par deux familles continues distinctes, dont l'une seulement est un sous-groupe. En somme, nous n'avons fait que douer l'espace-temps d'une *orientation*. La transformation qui consiste à changer  $\beta$  en  $1/\beta$  change une figure en une figure égale, mais d'orientation inverse.

Cette transformation est définie par les équations :

$$\begin{cases} x(1/\beta) = \varepsilon c t(\beta) \\ t(1/\beta) = \varepsilon/c x(\beta) . \end{cases}$$

Elle permute le temps et l'espace ; son jacobien est :

$$\begin{vmatrix} 0 & \varepsilon c \\ \varepsilon/c & 0 \end{vmatrix} = -1 .$$

Nous verrons plus loin que c'est dans l'orientation de l'espace-temps que réside l'explication profonde de la dualité onde/corpuscule, comme aussi de la dualité électricité/magnétisme ; et si nous osons risquer une hypothèse aventurée, on peut peut-être y voir une représentation des domaines extra et intra-nucléaires.

**8. La dualité onde/corpuscule.** Nous désignerons par  $\tau(\beta)$  les transformations des caractéristiques du paquet d'ondes résultant de la transformation de Lorentz étendue, soit :

$$\tau(\beta) \begin{cases} \mu_0(\beta) = \varepsilon \frac{\mu_0 - \beta/c \omega_0}{\sqrt{|1 - \beta^2|}} \\ \omega_0(\beta) = \varepsilon \frac{\omega_0 - \beta c \mu_0}{\sqrt{|1 - \beta^2|}} \\ P(\beta) = \frac{1}{|1 - \beta^2|} (P - 2 \beta/c Q + \beta^2/c^2 R) \\ Q(\beta) = \frac{1}{|1 - \beta^2|} [-\beta c P + (1 + \beta^2) Q - \beta/c R] \\ R(\beta) = \frac{1}{|1 - \beta^2|} (c^2 \beta^2 P - 2 c \beta Q + R) . \end{cases}$$

Occupons nous d'abord de l'aspect moyen du paquet d'ondes, autrement dit de son onde de phase. Les deux premières formules de  $\tau(\beta)$  nous suffiront pour cela; nous compléterons ensuite les résultats en faisant intervenir la structure du paquet d'ondes.

Désignons par :

$$c \gamma = \frac{\omega_0}{\mu_0},$$

la vitesse moyenne de propagation des ondes qui composent le paquet (ou vitesse de l'onde de phase). Cette vitesse peut être absolument quelconque et même supérieure à  $c$ , sans que le coefficient de corrélation  $r(t, k)$  cesse d'être cohérent.

Les deux premières formules de  $\tau(\beta)$  s'écrivent alors :

$$\begin{cases} \mu_0(\beta) = \varepsilon \mu_0 \frac{1 - \beta \gamma}{\sqrt{|1 - \beta^2|}} \\ \omega_0(\beta) = \varepsilon \omega_0 \frac{1 - \beta/\gamma}{\sqrt{|1 - \beta^2|}} \end{cases}$$

a) *Cas des ondes lumineuses.* Faisons d'abord :

$$\gamma = c,$$

c'est à dire supposons que l'onde de phase soit une onde *lumineuse* (nous verrons plus tard que le paquet se réduit alors nécessairement à une *seule* onde).

On retrouve en ce cas, les formules de *Döppler* :

$$\begin{cases} \mu_0(\beta) = \varepsilon \mu_0 \sqrt{\left| \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right|} \\ \omega_0(\beta) = \varepsilon \omega_0 \sqrt{\left| \frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right|}. \end{cases}$$

La vitesse de propagation de l'onde de phase :

$$\frac{\omega_0(\beta)}{\mu_0(\beta)} = \frac{\omega_0}{\mu_0} = c,$$

ne dépend pas du système de référence; cela veut dire qu'une onde lumineuse apparaît toujours comme une onde lumineuse, dans tous les systèmes de référence; ce n'est évidemment pas autre chose qu'une conséquence du principe posé de l'invariance de la vitesse de la lumière.

b *Cas d'ondes de vitesse différente de c.* Envisageons, en général, le cas d'un paquet d'ondes, composé par des ondes élémentaires dont la vitesse moyenne de propagation  $\gamma$  est différente de 1.

On voit alors que :

1°) Dans le système  $S(\beta)$ , tel que :

$$\beta = 1/\gamma,$$

le paquet apparaît *en moyenne* — c'est à dire au point de vue de l'onde de phase — comme un *corps solide en vibration* (longueur d'onde infinie :  $\mu_0(1/\gamma) = 0$ ).

2°) Et, dans le système  $S(\beta)$ , tel que  $\beta = \gamma$ , il apparaît comme une *onde stationnaire* (fréquence nulle :  $\omega_0(\gamma) = 0$ ).

Les lois de transformation de  $\omega_0$  pour l'un des systèmes, de  $\mu_0$  pour l'autre, sont :

$$\begin{cases} \omega_0(1/\gamma) = \omega_0 \sqrt{\left| 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right|} = \frac{\omega_0}{\gamma} \sqrt{|1 - \gamma^2|} \\ \mu_0(\gamma) = \mu_0 \sqrt{|1 - \gamma^2|} \end{cases}$$

La première est la formule selon laquelle se transforme la fréquence, d'après *L. de Broglie*. La seconde est, en quelque sorte la «duale» de la première.

Il existe donc deux systèmes de référence privilégiés  $S(\gamma)$  et  $S(1/\gamma)$  dans lesquels un paquet d'ondes, de vitesse de phase  $\gamma$ , revêt en moyenne :

1°) l'aspect d'un «oscillateur», c'est à dire d'un solide animé d'une vibration d'ensemble.

2°) l'aspect d'une «onde stationnaire», c'est à dire d'un phénomène périodique dans l'espace et permanent.

9. La formule de Louis de Broglie. Entre la pulsation  $\omega_0(1/\gamma)$  du corpuscule et le  $\mu_0(\gamma)$  de l'onde stationnaire, on a la relation :

$$\frac{\omega_0(1/\gamma)}{\mu_0(\gamma)} = \frac{\omega_0}{\mu_0} \frac{1}{\gamma} = c.$$

Il y a une sorte de «dédoublément» de la formule  $\frac{\omega_0(1)}{\mu_0(1)} = c$  des ondes lumineuses. Pour trouver la vitesse de la lumière, il faut prendre la fréquence du corpuscule et la longueur d'onde de l'onde associée.

La longueur d'onde associée est :

$$\lambda_0(\gamma) = \frac{2\pi}{\mu_0(\gamma)} = \frac{c}{\nu_0(1/\gamma)},$$

$\nu_0(1/\gamma)$  étant la fréquence du corpuscule. Admettons maintenant que la loi de Planck s'applique à l'oscillateur du système  $S(1/\gamma)$ . On a,  $m(1/\gamma)$  désignant la masse propre (ou masse au repos) de ce corpuscule :

$$m(1/\gamma) c^2 = h\nu_0(1/\gamma).$$

Et il vient pour la longueur d'onde associée :

$$\lambda_0(\gamma) = \frac{h}{m(1/\gamma) c}.$$

Cela c'est la longueur d'onde de l'onde stationnaire du système  $S(\gamma)$ . Dans le système  $S$  cette onde apparaît comme une onde progressive (de vitesse  $\gamma$ ) de longueur d'onde.

$$\lambda_0(0) = \lambda_0(\gamma) \sqrt{|1-\gamma^2|}$$

(inverse de la formule de transformation des  $\mu$ ).

D'autre part :

$$m(0) = \frac{m(1/\gamma)}{\sqrt{|1-1/\gamma^2|}} = \frac{\gamma m(1/\gamma)}{\sqrt{|1-\gamma^2|}}.$$

D'où enfin :

$$\lambda_0(0) = \frac{h}{m(0) c/\gamma} = \frac{h}{m(0) v(0)} = \frac{h}{p(0)},$$

—  $p(0)$  désignant la quantité de mouvement du corpuscule dans le système  $S(0)$  de l'observateur. — C'est précisément la formule de L. de Broglie.

*Remarque.* La loi de Planck, écrite pour le corpuscule, dans le système  $S(1/\gamma)$ , qui accompagne le corpuscule :

$$m(1/\gamma) c^2 = h\nu_0(1/\gamma),$$

se transforme dans le système  $S(0)$  de l'observateur, en :

$$m(0) c^2 = h\nu_0(0).$$

Elle est donc *invariante* par rapport à un changement du système de référence, puisque  $S(0)$  est, par rapport au système  $S(1/\gamma)$  du corpuscule, un système de référence *quelconque*.

10. *Infra et ultra corpuscule ; Ultra et infraonde.* Il est remarquable que tout ce que nous venons de dire est *vrai aussi bien pour  $\gamma^2 < 1$  que pour  $\gamma^2 > 1$* . Et il n'y a aucune raison — une fois étendue la transformation de Lorentz — de rompre la symétrie entre ces deux cas.

Nous pouvons dire :

a) qu'un paquet d'ondes *ultralumineuses* ( $\gamma^2 > 1$ ) équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{un infracorpuscule de vitesse } 1/\gamma < 1. \\ \text{une ultraonde (ou onde de L. de Broglie), de vitesse } \gamma > 1. \end{array} \right.$$

Cella suffit à rendre compte de l'onde associée au corpuscule, au sens de L. de Broglie.

b) qu'un paquet d'ondes *infralumineuses* ( $\gamma^2 < 1$ ) équivaut à :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{un ultracorpuscule de vitesse } 1/\gamma > 1. \\ \text{une infraonde de vitesse } \gamma < 1. \end{array} \right.$$

Et ceci constitue une *hypothèse nouvelle* : Dans la mesure où il existe des corpuscules (dits « réels ») de vitesse  $1/\gamma < 1$ , il existe des *ondes de L. de Broglie*, de vitesse  $\gamma > 1$ .

Il est tentant d'avancer que, réciproquement, et pour une raison identique, dans la mesure où il existe des ondes (dites « réelles ») de vitesse  $\gamma > 1$ , il existe aussi des *ultracorpuscules* de vitesse  $1/\gamma > 1$ . Or, nous connaissons des ondes physiques infralumineuses ; ce sont entre autres : les ondes lumineuses dans les milieux réfringents, les ondes hertziennes dans un milieu ionisé.

Nous ne voyons donc aucune raison d'admettre d'une part « l'existence » des ondes de L. de Broglie et de nier d'autre part celle des ultracorpuscules.

11. *Définition plus précise des corpuscules et des ondes.* Nous n'avons pas, jusqu'à présent, fait intervenir les caractéristiques  $P$ ,  $Q$ ,  $R$  du paquet. Si on les prend en considération, on voit qu'en général, le corpuscule ( $1/\gamma$ ) n'est pas tout à fait un corps solide en vibration, ni l'onde ( $\gamma$ ) tout à fait une onde stationnaire parfaite.

Cherchons les conditions pour que le corpuscule et l'onde soient « parfaits », malgré la dispersion du paquet d'ondes. Il faut, pour le corpuscule que  $r$  ne dépende pas de  $k''$  et pour l'onde, que  $r$  ne dépende pas de  $\tau'$ . Et cela donne :

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1^\circ) & P(1/\gamma) = 0 \quad Q(1/\gamma) = 0 \\ 2^\circ) & R(\gamma) = 0 \quad Q(\gamma) = 0 \end{array} \right.$$

Or, les racines de l'équation :

$$Q(\beta) = 0,$$

sont déjà bien inverses l'une de l'autre ; ce sont :

$$\frac{1}{\gamma} \int = \frac{R/c + Pc \pm \sqrt{(R/c - Pc)^2 + 4(PR - Q^2)}}{2Q}.$$

Ensuite,  $PR - Q^2$  étant un invariant, si  $Q(\beta) = 0$  et que, soit  $P(\beta)$  soit  $R(\beta)$  est nul, il faut que :

$$PR - Q^2 = 0.$$

Et cela veut dire que le coefficient de corrélation entre  $\Omega$  et  $M$  est égal à  $\pm 1$ , donc que  $\Omega$  est une fonction certaine de  $M$  :  $\Omega = f(M)$ , en d'autres termes : que la dispersion optique du paquet est certaine (indice de réfraction fonction de la fréquence).

$1/\gamma$  et  $\gamma$  sont alors égaux à :

$$\frac{1}{c} \sqrt{\frac{R}{P}} \text{ et } c \sqrt{\frac{P}{R}}.$$

Et l'on constate que  $R(1/\gamma)$  et  $P(\gamma)$  sont nuls aussi.

Finalement, les coefficients de corrélation dans les systèmes  $(1/\gamma)$  et  $(\gamma)$  se réduisent à :

$$\begin{cases} r(1/\gamma) = \cos[\omega_0(1/\gamma)\tau'] \\ r(\gamma) = \cos[\mu_0(\gamma)k''] \end{cases}$$

On obtient donc bien un oscillateur et une onde stationnaire parfaits, malgré que la fréquence des ondes constituant le paquet reste aléatoire. Evidemment, ce n'est qu'à cet oscillateur parfait qu'on peut appliquer en toute rigueur la loi de Planck, comme nous l'avons fait pour établir la formule de L. de Broglie.

On notera que la condition d'avoir un oscillateur et une onde parfaits, fixe la vitesse moyenne  $\gamma$ , de propagation des composantes du paquet en fonction de ses caractéristiques  $P, Q, R$ . En d'autres termes, parmi tous les paquets d'ondes ayant une structure déterminée ( $P, Q, R$ ) et toutes les vitesses  $\beta$  possibles, se manifestent seulement ceux de vitesses  $\gamma$  et  $1/\gamma$ , parce que ce sont les seuls qui contiennent des êtres *doués d'individualité permanente*. Les autres sont rapidement *éclipsés* devant eux, vu l'amortissement de leur coefficient de corrélation.

Lorsque :  $R/c = Pc$ , le paquet se réduit à une onde lumineuse.

12. Corpuscules imparfaits. Les corpuscules parfaits sont doués d'une *individualité permanente* : leur coefficient de corrélation ne s'amortit pas. Ils sont donc propres à représenter les constituants stables des édifices atomiques. Mais la Physique connaît des corpuscules imparfaits dont l'individualité n'est qu'éphémère. Pour en rendre compte, il faut cesser de supposer que :

$$\Delta = PR - Q^2 = 0.$$

Lorsque  $\Delta \neq 0$ , nous pouvons encore déterminer une vitesse de phase  $\gamma$  du paquet, qui réalise à la fois le *meilleur* corpuscule et la *meilleure* onde. Et parmi tous les paquets définis par des caractéristiques  $P, Q, R$  données, ce sont seulement ceux constitués par des ondes de vitesse moyenne  $\gamma$  (ou  $1/\gamma$ ) que revêtent l'aspect d'un corpuscule ou d'une onde, en ce sens que les coefficients de corrélation des autres s'amortissant infiniment plus vite, *ils ne se manifestent pratiquement pas en présence des premiers*.

Nous allons faire l'étude de :

$$P(\beta), Q(\beta), R(\beta),$$

en fonction de  $\beta$ .

Nous remarquerons que :

$$P(\beta) = 1/c^2 R(1/\beta),$$

ce qui nous dispensera d'étudier  $P(\beta)$ .

Étudions  $R(\beta)$ .

La courbe représentative admet les asymptotes :

$$\begin{cases} \beta = \pm 1 \\ R = Pc^2 \end{cases}$$

La dérivée est :

$$R'(\beta) = \pm \frac{2c}{(1-\beta^2)^2} \left[ Q\beta^2 - \left( \frac{R}{c} + Pc \right) \beta + Q \right],$$

avec le signe :

$$\begin{aligned} & - \text{ pour } \beta^2 < 1 \\ & + \text{ pour } \beta^2 > 1. \end{aligned}$$

Elle s'annule pour deux valeurs inverses l'une de l'autre :  $1/\gamma$  et  $\gamma$ , qui ne sont autres d'ailleurs que les racines de :

$$Q(\beta) = 0.$$

Elles correspondent à des minima de  $R(\beta)$ .

Il est intéressant de classer ces minima. On trouve :

$$R(\gamma) - R(1/\gamma) = Pc^2 - R.$$

Il y a donc deux cas de figure selon que  $Pc \gtrless R/c$  (la variante est représentée en pointillés sur la figure 1).

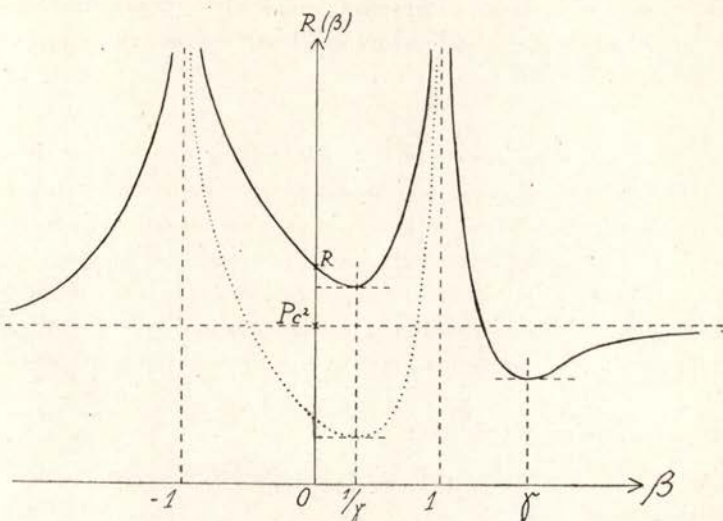


Fig. 1

$P(\beta)$  suit évidemment une allure toute semblable. Il a deux minima pour les mêmes vitesses  $\gamma$  et  $1/\gamma$ .

Ces minima se classent ainsi :

$$P(\gamma) - P(1/\gamma) = - \left( P - \frac{R}{c^2} \right).$$

Notons aussi les relations :

$$R(\gamma) R(1/\gamma) = c^2 \Delta$$

ou

$$R(\gamma) P(\gamma) = \Delta.$$

Quant à  $Q(\beta)$ , le numérateur de sa dérivée est :

$$\mp [(Pc + R/c)\beta^2 - 4Q\beta + (Pc + R/c)];$$

il n'est donc jamais nul.

$Q(\beta)$  peut prendre toutes les valeurs positives et négatives.

Ecrivons le coefficient de corrélation dans le système  $S(1/\gamma)$ , pour un paquet constitué d'ondes de vitesse moyenne  $\gamma$  :

$$r_1(\tau', k') = \cos \omega_0 \sqrt{\left| 1 - \frac{1}{\gamma^2} \right|} \tau' \exp \left[ -1/2 (P(1/\gamma) k'^2 + R(1/\gamma) \tau'^2) \right].$$



Ainsi, il ne représente plus tout à fait un solide, puisque  $r_1$  dépend de  $k'$ , ni un oscillateur parfait, puisque la vibration est amortie (terme en  $\tau'^2$  de l'exponentielle). Les grandeurs  $c^2 P(1/\gamma)$  et  $R(1/\gamma)$  qui mesurent l'imperfection du corpuscule s'expriment d'ailleurs au moyen des invariants  $|Pc - R/c|$  et  $(PR - Q^2)$  du paquet d'ondes.

Ce sont :

$$\frac{1}{2} [\sqrt{(Pc^2 - R)^2 + 4c^2(PR - Q^2)} \pm Pc^2 - R].$$

Ils sont donc des invariants du paquet d'ondes.

La grandeur  $\theta = 1/R(1/\gamma)$  peut être considérée comme une mesure de la *durée de vie* du corpuscule, tandis que  $l = 1/P(1/\gamma)$  mesure ses *dimensions spatiales*.

**13. Constantes physiques d'un paquet d'ondes.** Les cinq grandeurs :

$$\omega_0, \nu_0, P, Q, R,$$

qui caractérisent le paquet d'ondes se réduisent à 4 indépendantes :

$$\gamma, P, Q, R,$$

puisque l'on a vu que la vitesse  $\gamma$  de l'onde de phase s'exprimait au moyen de  $P, Q, R$ , par une équation du 2<sup>ème</sup> degré ayant d'ailleurs des racines inverses.

Le groupe de transformation  $\tau(\beta)$  admet trois invariants :

$$\begin{aligned} |c^2 \mu_0^2 - \omega_0^2| &= c^2 \mu_0^2 |1 - \gamma^2| \\ |R/c - Pc| \\ (PR - Q^2). \end{aligned}$$

On peut donc dire que, parmi les quatre paramètres statistiques indépendants qui définissent le paquet d'ondes, il y en a *trois* (les invariants) qui représentent *intrinsèquement l'être physique* et un quatrième (la vitesse de phase  $\gamma$  ou  $1/\gamma$  du paquet), qui repère sa position par rapport au système de référence particulier qui a été choisi.

Nous voyons ainsi se préciser le sens physique qu'il convient de donner à notre théorie.

Soit un *être physique* caractérisé par ses trois invariants, il est mathématiquement représenté par un paquet d'ondes. Et celui-ci peut revêtir deux sortes d'aspect, selon que l'on se place dans des systèmes de référence, tels que l'onde de phase ait des vitesses de propagation  $\geq 1$ .

a) Si  $\gamma > 1$ , il apparaît à la fois, comme un *intra*corpuscule de

vitesse  $1/\gamma < 1$ , et comme une *ultraonde* de vitesse  $\gamma > 1$ . (conception de l'onde associée au corpuscule, au sens de *L. de Broglie*).

b) Si  $\gamma < 1$ , il apparaît au contraire, à la fois, comme un *ultracorpuscule* de vitesse  $1/\gamma > 1$ , et comme une *infraonde* (conception duale de celle de *L. de Broglie* et apparemment non confirmée jusqu'à présent par l'expérience).

Si  $\gamma = 1$ , les deux aspects se rejoignent sur la ligne de démarcation créée par la vitesse de la lumière.

On a alors :

$$2Q = Pc + R/c,$$

ce qui exprime que  $Q(1) = 0$ .

Mais cela s'écrit aussi :

$$4(Q^2 - PR) = (Pc - R/c)^2,$$

et comme le premier membre est négatif ou nul, et le second, positif ou nul, il faut à la fois :

$$\begin{cases} Q^2 - PR = 0 \\ Pc - R/c = 0. \end{cases}$$

Ainsi pour  $\gamma = 1$ , les *trois* invariants sont nuls.

Le corpuscule apparaît donc alors comme ayant une individualité *permanente* ( $R(1/\gamma) = 0$ ,  $\theta = \infty$ ) et par contre une extension spatiale *infinie* ( $P(1/\gamma) = 0$ ,  $l = \infty$ ). C'est, pourrait on dire un «*courant*» de corpuscules certains (photons); il ne saurait y avoir de meilleure image du «*rayon lumineux*».

*Remarque*: Etant donné un être physique représenté par un paquet d'ondes et défini par ses trois invariants fondamentaux, la dispersion du paquet change selon le système de référence. Voyons de quelle manière.

D'abord, quel que soit  $\beta$  :

$$(1) \quad |R(\beta) - c^2 P(\beta)| = I.$$

De plus, le produit  $P(\beta)R(\beta)$  est minimum et égal à  $\Delta$ , pour  $\beta = \gamma$  ou  $1/\gamma$  (ses deux facteurs étant minima en même temps). D'où :

$$P(\beta)R(\beta) \geq \Delta.$$

C'est là une «*sorte*» de relation d'incertitude. Elle diffère cependant de nature avec la forme classique de telles relations car, à cause de (1),  $P(\beta)$  et  $R(\beta)$  doivent varier dans le même sens. On peut dire

en somme qu'ici la relation d'incertitude *se renforce* en se dédoublant : la dispersion des fréquences et la dispersion des longueurs d'onde ont *séparément* une borne inférieure.

## II. LA PROBABILITÉ DE PRÉSENCE DANS L'ESPACE-TEMPS

1. Distribution statistique d'événements. Nous allons traiter à présent d'un autre schéma, qu'inspire également le point de vue aléatoire et nous constaterons à travers un langage différent, son analogie formelle avec celui de l'onde aléatoire. Il nous apprendra en outre des choses nouvelles.

La Théorie de la Relativité restreinte et le Calcul des Probabilités emploient tous deux le terme «*événement*», mais tandis que celui-ci l'envisage en dehors de tout cadre spatio-temporel, celle-là fait reposer précisément ce cadre sur les notions de *coïncidence* de deux événements et de *distance* de deux événements.

Sous une forme ramassée, on peut dire que :

«*Un point de l'espace-temps représente une classe d'événements coïncidents*»

et que :

«*L'espace-temps est l'espace abstrait des classes d'événements coïncidents*».

En somme, la conception de l'espace temps revient à représenter un événement par un *point* de cet espace, en fondant dans une même «*congruence*» tous les événements qui se produisent en ce point (c'est à dire : au même lieu et au même instant). Un ensemble d'événements est alors un domaine de l'espace-temps, et attacher à chacun de ces événements une *probabilité* revient à considérer une *densité de probabilité* dans l'espace-temps.

On est ainsi conduit bien naturellement, à satisfaire un des desiderata des Nouvelles Mécaniques : introduire une statistique sur la coordonnée temps comme sur les coordonnées d'espace.

2. Sens physique d'une densité de probabilité dans l'espace-temps. Soit un système de référence  $S(0)$ , que signifie physiquement un point-événement de coordonnées  $(X, T)$ ? Il lui correspond dans l'espace géométrique (coordonnée  $X$ ) un point animé de la vitesse  $X/T$ . On a en effet, en vertu des formules de Lorentz.

$$X(X/T)=0,$$

ce qui veut dire que les points  $(X, T)$  du système de référence  $S(0)$ , tels que  $X/T=c^0$ , ont pour transformés des points *immobiles* dans le système de référence  $S(X/T)$ . Ces points  $(X, T)$  ont donc bien, dans le système  $S(0)$ , la vitesse  $X/T$ .

On notera que les vitesses ainsi définies se composent selon la loi relativiste.

Soit maintenant une densité de probabilité dans l'espace-temps, repéré par un système de référence  $S(0)$ . Il lui correspond dans l'espace géométrique de ce système (coordonnée  $X$ ) des points qui parcourent l'axe des  $x$  avec des vitesses dispersées autour d'une valeur probable  $\left(\frac{X}{T}\right)$ . Cette densité de probabilité se manifeste donc, aux yeux de l'observateur de  $S(0)$  comme un «*train de particules ponctuelles*» suivant la même trajectoire (l'axe des  $x$ ), avec des vitesses distribuées selon une certaine loi de probabilité. N'est ce pas là précisément une image de ce que l'on voit dans la chambre de *Wilson*, lorsque les physiciens expérimentaux déclarent qu'elle est traversée par un «*corpuscule*»?

**3. Le paquet d'événements.** Considérons donc un point aléatoire  $(X, T)$  dans l'espace-temps, c'est à dire une certaine distribution de probabilité de présence, définie par une loi conjuguée :  $(x, t)$ .

Comme pour l'onde aléatoire, linéarisons le problème en supposant les nombres aléatoires :  $X, T$  *faiblement dispersés*. Nous savons que, dans ces conditions, les nombres purement aléatoires :

$$X' = X - \bar{X} \quad \text{et} \quad T' = T - \bar{T}$$

sont distribués selon la loi de Gauss-Bravais.

De même que nous avons appelé : «*paquet d'ondes*», le cas correspondant pour l'onde aléatoire, nous appellerons maintenant : «*paquet d'événements*» cette distribution de probabilité dans l'espace-temps, concentrée autour d'un point probable. Nous nous proposons d'étudier l'être *physique* représenté par un paquet d'événements.

Une remarque s'impose ici : les corrélations entre eux des événements qui constituent le paquet et qui sont le lien indispensable pour faire d'un simple «*ensemble*» de points aléatoires un «*espace*», paraissent être laissées de côté. En fait, elles sont déjà implicitement contenues dans la *métrique* qui a été adoptée pour l'espace-temps. Le coefficient de corrélation entre deux points-événements doit être considéré comme étant une fonction :

$$f(s^2)$$

du carré de la distance, telle que  $f(0)=1$  et satisfaisant d'autre part aux conditions de cohérence. C'est en posant l'invariance de ce coefficient de corrélation, c'est à dire celle de  $s^2$ , que nous avons été conduits à adopter comme groupe de transformations de l'espace-temps, le groupe de Lorentz étendu :

$$X(0) = \frac{X(\beta) + \beta c T(\beta)}{\varepsilon \sqrt{|1-\beta^2|}}; \quad T(0) = \frac{T(\beta) + \beta/c X(\beta)}{\varepsilon \sqrt{|1-\beta^2|}}.$$

Appliquons aux coordonnées aléatoires  $(X, T)$ , la transformation de Lorentz étendue. Un simple calcul algébrique donne immédiatement la loi de transformation des caractéristiques statistiques de la distribution :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0(\beta) = \bar{X}(\beta) = \frac{\varepsilon \sqrt{|1-\beta^2|}}{1-\beta^2} (x_0 - \beta c t_0) \\ t_0(\beta) = \bar{T}(\beta) = \frac{\varepsilon \sqrt{|1-\beta^2|}}{1-\beta^2} (t_0 - \beta/c x_0) \\ E(\beta) = \overline{X'^2}(\beta) = \frac{1}{|1-\beta^2|} (E - 2\beta c F + \beta^2 c^2 G) \\ F(\beta) = \overline{X' T'}(\beta) = \frac{1}{|1-\beta^2|} [-\beta/c E + (1+\beta^2) F - \beta c G] \\ G(\beta) = \overline{T'^2}(\beta) = \frac{1}{|1-\beta^2|} (\beta^2/c^2 E - 2\beta/c F + G) \end{array} \right.$$

Ces transformations forment un groupe, caractérisé : d'une part, par l'invariance de  $|x_0^2(\beta) - c^2 t_0^2(\beta)|$ ; d'autre part, par celle de la probabilité de présence :

$$\frac{|dx dt|}{2\pi \sqrt{\Delta}} \exp \left[ -\frac{1}{2\Delta} (Gx^2 - 2Fxt + Et^2) \right]; \quad \Delta = EG - F^2.$$

L'analogie formelle de ces formules de transformation avec celles qui transforment les caractéristiques statistiques du paquet d'ondes, nous permet de répéter — en modifiant seulement le langage — la théorie que nous venons de développer à leur sujet.

Cette analogie existe même en dehors de la linéarisation « en paquet » que nous n'avons adoptée que pour rendre nos idées plus faciles à exposer.

4. Autre forme de la dualité onde-corpuscule. Occupons nous d'abord de l'aspect moyen du paquet d'événements ayant la vitesse

probable :

$$\left(\frac{X}{T}\right) = \frac{x_0}{t_0},$$

(en négligeant les parties purement aléatoires  $X'$  et  $T'$  devant les valeurs probables  $x_0$  et  $t_0$ ). Dans le système  $S(0)$ , ils apparaissent comme un courant de particules ponctuelles se déplaçant le long de l'axe des  $x$  avec la vitesse  $\gamma = \frac{x_0(0)}{ct_0(0)}$ .

a) Dans le système de référence  $S(\gamma)$ , on a, de par les formules de Lorentz :

$$x_0(\gamma) = 0.$$

Cela veut dire que le courant est *immobile* dans le système  $S(\gamma)$  ou encore constitue un *corps solide* ou « *corpuscule* » qui, dans le système  $S(0)$  est animé de la vitesse  $\gamma$ .

b) Dans le système de référence  $S(1/\gamma)$ , on a :

$$t_0(1/\gamma) = 0.$$

L'être physique  $y$  apparaît donc comme un ensemble d'événements simultanés ou *onde stationnaire* ; dans le système  $S(0)$  l'aspect correspondant est celui d'une *onde progressive* de vitesse  $1/\gamma$ .

Ainsi, un paquet d'événements est à la fois un corpuscule (ou plutôt un *courant* de corpuscules) de vitesse  $\gamma$  et une onde de vitesse  $1/\gamma$ .

5. Considération des moments du second ordre. Tant qu'on se borne aux valeurs probables, on ne fait pas jouer le point de vue statistique. Celui-ci ne s'introduit qu'avec les moments du second ordre ; il va apporter une précision plus grande à nos idées.

Les systèmes de référence  $S(\gamma)$  et  $S(1/\gamma)$  sont aussi ceux qui jouissent des propriétés suivantes :

a)  $F$  nul.

b)  $E$  et  $G$  minima.

On n'aura plus en général de corpuscule et d'onde *parfaits*. Mais parmi tous les paquets d'événements ayant les mêmes caractéristiques  $P, Q, R$  et ne différant que par la vitesse probable, il y en a deux qui revêtent le mieux possible respectivement l'aspect onde et l'aspect corpuscule. Ces aspects *éclipsent* les autres dans leur manifestation expérimentale. Un cas limite est à examiner spécialement : c'est celui où :

$$\gamma = 1/\gamma = 1.$$

Il s'agit alors du photon et de l'onde lumineuse. Les trois invariants fondamentaux :

$$|c^2 t_0^2 - x_0^2|, \quad |c^2 \bar{T}^2 - \bar{X}^2| \quad \text{et} \quad \sqrt{\bar{X}^2 \bar{T}^2 - \bar{X}'^2 \bar{T}'^2}$$

étant nuls, on a nécessairement :

$$X = c T,$$

c'est à dire que chaque événement individuel consiste en la présence d'un photon.

Si  $\gamma \neq 1$ , l'argument de la loi de Gauss est, dans le système  $S(\gamma)$  — par exemple — :

$$-1/2 \left[ \frac{x^2}{E(\gamma)} + \frac{t^2}{G(\gamma)} \right].$$

Le corpuscule imparfait n'est donc pas tout à fait ponctuel et sa distribution n'est pas tout à fait permanente. On peut dire encore que sa position et son temps propre<sup>1</sup> sont quelque peu incertains. Ces incertitudes sont de l'espèce «renforcée», c'est à dire qu'elles portent séparément sur la position et le temps.<sup>2</sup>

Nous verrons, au contraire, que les incertitudes sur la position et la vitesse sont bien de l'espèce d'*Heisenberg*.

6. Raccord des schémas de l'onde aléatoire et de la probabilité de présence. Si nous posons le principe que des grandeurs qui se transforment de la même manière, représentent les *mêmes êtres physiques*, nous sommes conduits à écrire :

d'une part :

$$\frac{x_0}{\omega_0} = \frac{t_0}{\mu_0} \quad \text{ou} \quad \frac{x_0}{\mu_0 c} = \frac{t_0}{\omega_0/c};$$

d'autre part :

$$\frac{E}{Pc} = \frac{Gc^2}{R/c} = \frac{Fc}{Q} \quad \text{ou} \quad \frac{E}{R/c} = \frac{Gc^2}{Pc} = \frac{Fc}{Q};$$

et à identifier — à un facteur près — les trois invariants :

$$|c^2 t_0^2 - x_0^2|, \quad |Gc^2 - E|, \quad \sqrt{EG - F^2},$$

<sup>1</sup> Cette question est visiblement la même que celle du temps propre à attribuer à ce qu'on appelle classiquement : «un système de corpuscules». Le point de vue aléatoire la résoud en adoptant le temps  $t_0$  du centre de gravité et une incertitude sur la coordonnée «temps».

<sup>2</sup> Comme celles de Landau et Peierls.

aux trois autres invariants :

$$|\mu_0^2 c^2 - \omega_0^2|, \quad |Pc - R/c|, \quad \sqrt{PR - Q^2}.$$

On aura ainsi attaché un paquet d'ondes à un paquet d'événements et inversement. L'un et l'autre représentent le *même être physique*, qui est caractérisé par ses trois invariants.

7. De la relation d'incertitude. Calculons la partie purement aléatoire de la vitesse. On a :

$$V(0) = \frac{X(0)}{T(0)} = \frac{x_0(0) + X'(0)}{t_0(0) + T'(0)},$$

et, en vertu de l'hypothèse que les dispersions sont faibles :

$$V'(0) = \frac{1}{t_0(0)} [X'(0) - \gamma c T'(0)],$$

avec

$$\gamma c = \frac{x_0(0)}{t_0(0)}.$$

Formons le moment rectangle :  $\overline{X'(0)V'(0)}$ . On a :

$$\overline{X'(0)V'(0)} = \frac{1}{t_0(0)} [\overline{X'^2(0)} - \gamma c \overline{T'^2(0)}] = \frac{1}{t_0(0)} (E - \gamma c F).$$

Or :

$$E - \gamma c F = \frac{(E - Gc^2) + \sqrt{(E - Gc^2)^2 + 4c^2(EG - F^2)}}{2}$$

est un *invariant* que l'on peut désigner par :

$$E(\gamma) \quad \text{ou} \quad \overline{X'^2}(\gamma), \quad \text{car} \quad F(\gamma) = 0.$$

D'autre part :

$$\frac{1}{t_0(\gamma)} = \frac{m(\gamma)}{m(0)} = \frac{m(0) \sqrt{1 - \gamma^2}}{m(0)},$$

masse au repos, est aussi un *invariant*.

Puis :

$$t_0(\gamma) = t_0(0) \sqrt{1 - \gamma^2}$$

est également un *invariant* que nous désignerons par  $\frac{h}{2\pi}$ .

Maintenant, d'après l'inégalité de Schwarz :

$$m(0) \sqrt{\overline{X'^2(0)}} \sqrt{\overline{V'^2(0)}} \geq m(\gamma) \frac{X'^2(\gamma)}{|t_0(\gamma)|} = \frac{h}{2\pi}.$$



La borne inférieure de l'incertitude est donc un *invariant*, indépendant du système de référence  $S(0)$  — qui est un système de référence quelconque — et caractéristique de l'être physique envisagé.

*Remarques.* 1. Pour  $\gamma=1$ , le quotient  $\frac{\overline{X}^{12}(\gamma)}{|t_0(\gamma)|}$  se présente sous la forme indéterminée  $0/0$ ; on ne trouve donc pas, même dans le cas du photon une incertitude nulle.

2. Dans le système  $S(\gamma)$  du corpuscule, si l'on adopte le temps  $t_0(\gamma)$  qui est, dans ce système, le temps de l'événement probable du paquet d'événements (le temps propre du corpuscule, pourrait-on dire), on a :

$$\overline{X}^{12} = \frac{h}{m} t_0,$$

formule dans laquelle on reconnaît la loi du mouvement brownien.

Ainsi, «*l'évolution*» du paquet d'événements suit une loi *discontinue* ( $X$  non dérivable par rapport à  $t_0$ ). Il est curieux de remarquer que l'on peut cependant traiter la même problème à l'aide d'un paquet d'ondes, donc en utilisant la *dérivation aléatoire*. Ceci montre qu'il n'est pas interdit au schéma aléatoire dérivable de permettre la solution de problèmes qui semblent ressortir d'un schéma non dérivable<sup>1</sup>.

3. Une des grandes difficultés qui empêche le raccord des Nouvelles Mécaniques avec la Relativité est l'impossibilité apparente d'introduire un paramètre d'évolution jouant le rôle du temps. Il nous semble bien que le point de vue aléatoire résoud cette difficulté puisqu'on peut concevoir une évolution d'une distribution de probabilité dans l'espace-temps, en fonction du temps propre du point probable.

### III. LE CHAMP ÉLECTRO-MAGNÉTIQUE

1. *Champ électromagnétique.* Nous traiterons maintenant d'un troisième schéma qui va éclairer le sens physique à donner aux deux précédents.

<sup>1</sup> Cette remarque vise des objections qui nous ont été faites autrefois sur la limitation du pouvoir d'explication du schéma aléatoire dérivable. Nous avons, pour notre part, toujours soutenu la thèse de la nécessité de la dérivée pour faire de l'Analyse mathématique, et de l'efficacité de cette notion, convenablement généralisée — (Voir «*Mécanique Aléatoire*», 1<sup>re</sup> Partie).

Considérons un champ électromagnétique :

$$\begin{aligned} \mathfrak{E}(0, B_2, B_3) \\ \mathfrak{H}(0, H_2, H_3), \end{aligned}$$

normal à l'axe des  $x$ ; et une densité de charge électrique  $\rho$ , les charges étant animées d'une vitesse  $w$ , dirigée selon l'axe des  $x$ .

Le calcul montre que les équations de Maxwell, relatives à ce champ;

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z} = 4\pi\rho; \quad 0 = \frac{\partial B_2}{\partial z} - \frac{\partial B_3}{\partial y}; \quad 4\pi j = \frac{\partial H_3}{\partial y} - \frac{\partial H_2}{\partial z}, \\ \frac{\partial H_2}{\partial y} + \frac{\partial H_3}{\partial z} = 0; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial H_2}{\partial t} = \frac{\partial B_3}{\partial x}; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial B_2}{\partial t} = -\frac{\partial H_3}{\partial x}, \\ j = \rho \frac{w}{c}; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial H_3}{\partial t} = -\frac{\partial B_2}{\partial x}; \quad \frac{1}{c} \frac{\partial B_3}{\partial t} = \frac{\partial H_2}{\partial x}, \end{array} \right.$$

sont *invariantes* par rapport à la transformation de Lorentz étendue :

$$x = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{|1-\beta^2|}}(x' + \beta ct'); \quad y = y'; \quad z = z'; \quad t = \frac{1}{\varepsilon\sqrt{|1-\beta^2|}}\left(t' + \beta \frac{x'}{c}\right),$$

en adoptant les lois de transformation suivantes pour le champ électromagnétique :

$$\left\{ \begin{array}{l} B_2(\beta) = \frac{1}{\alpha'}(B_2 - \beta H_3); \quad H_2(\beta) = \frac{1}{\alpha'}(H_2 + \beta B_3); \\ B_3(\beta) = \frac{1}{\alpha'}(B_3 + \beta H_2); \quad H_3(\beta) = \frac{1}{\alpha'}(H_3 - \beta B_2); \\ \rho(\beta) = \frac{1}{\alpha'}(\rho - \beta j); \quad j(\beta) = \frac{1}{\alpha'}(j - \beta \rho); \\ \alpha' = \frac{1 - \beta^2}{\varepsilon\sqrt{|1 - \beta^2|}}. \end{array} \right.$$

Les vecteurs  $\mathfrak{E}$  et  $\mathfrak{H}$  forment dans le plan des  $y, z$  une figure géométrique qui, abstraction faite de son orientation dans le plan, est définie par les invariants géométriques suivants :

$$\mathfrak{E}^2, \quad \mathfrak{H}^2 \quad \text{et} \quad (\mathfrak{E} \times \mathfrak{H})_x.$$

Les deux premiers sont les modules carrés des vecteurs; le troisième, la composante selon l'axe des  $x$  de leur produit vectoriel (dont les deux autres composantes sont nulles).

Ces grandeurs se transforment ainsi :

$$\left\{ \begin{aligned} \mathcal{E}^2(\beta) &= \frac{1}{|1-\beta^2|} [\mathcal{E}^2 - 2\beta (\mathcal{E} \times \mathcal{C})_1 + \beta^2 \mathcal{C}^2]; \\ (\mathcal{E}(\beta) \times \mathcal{C}(\beta))_1 &= \frac{1}{|1-\beta^2|} [-\beta \mathcal{E}^2 + (1+\beta^2)(\mathcal{E} \times \mathcal{C})_1 - \beta \mathcal{C}^2]; \\ \mathcal{C}^2(\beta) &= \frac{1}{|1-\beta^2|} [\mathcal{C}^2 - 2\beta (\mathcal{E} \times \mathcal{C})_1 + \beta^2 \mathcal{E}^2]. \end{aligned} \right.$$

2. Association d'un champ électromagnétique à l'onde aléatoire. On remarque immédiatement que ces grandeurs se transforment comme :

$$Pc, \quad Q \quad \text{et} \quad R/c,$$

tandis que  $\rho$  et  $j$  se transforment comme  $\omega_0$  et  $\mu_0 c$ . Par conséquent, on peut associer les caractéristiques du paquet d'ondes aux grandeurs électromagnétiques en posant :

d'une part :

$$\frac{\rho \text{ (ou } j)}{\mu_0 c} = \frac{j \text{ (ou } c)}{\omega_0},$$

et d'autre part :

$$\frac{(\mathcal{E}^2 \text{ ou } \mathcal{C}^2)}{R/c} = \frac{(\mathcal{C}^2 \text{ ou } \mathcal{E}^2)}{Pc} = \frac{(\mathcal{E} \times \mathcal{C})_1}{Q}$$

On notera que les proportions précédentes sont bien *homogènes en dimensions* ( $\mathcal{E}$  est exprimé en unités électrostatiques et  $\mathcal{C}$ , en unités électromagnétiques).

Les trois invariants de la transformation des grandeurs électromagnétiques :

$$|\rho^2 - j^2|, \quad \mathcal{E}^2 - \mathcal{C}^2, \quad |\mathcal{E} \cdot \mathcal{C}|,$$

s'identifient respectivement aux trois invariants de la transformation des caractéristiques du paquet d'ondes :

$$|\mu_0^2 c^2 - \omega_0^2|, \quad |R/c - Pc|, \quad \sqrt{PR - Q^2}.$$

Dans les systèmes de l'onde et du corpuscule (vitesse  $\gamma$  et  $1/\gamma$ ), on a vu que :

$$\mu_0(\gamma) = 0 \quad \text{et} \quad \omega_0(1/\gamma) = 0.$$

Il en résulte que dans l'un de ces systèmes, ou  $\rho$  ou  $j$  est nul.

*Remarque.* Nous ne pouvons pas nous empêcher de souligner combien simplement le point de vue aléatoire permet d'incorporer (grâce

à l'apparition des caractéristiques  $P, Q, R$ , circonstance qui lui est propre) l'électromagnétisme dans la Relativité restreinte, alors que la Relativité généralisée ne réussit que très imparfaitement à en rendre compte. Et pourtant, la Relativité restreinte étant basée sur l'invariance des équations de Maxwell, on aurait dû raisonnablement penser qu'elle devait contenir en puissance l'électromagnétisme.

3. Charge électrique et moment magnétique. Choisissons, par exemple, l'association :

$$\frac{e}{\mu_0 c} = \frac{\omega_0}{j};$$

(ce que nous allons dire est vrai aussi bien pour l'autre association possible).

Alors  $\rho(\gamma)$  et  $j(1/\gamma)$  sont nuls.

Le corpuscule transporte une charge :

$$e(1/\gamma) = \rho(1/\gamma) dx(1/\gamma),$$

et l'onde est accompagnée par le courant électrique :

$$i(\gamma) = j(\gamma) dx(\gamma).$$

A ce courant, correspond un *moment magnétique*, situé dans le plan des  $(y, z)$ , et ayant pour composantes :

$$\begin{cases} \mathcal{M}_2(\gamma) = -zj(\gamma) dx(\gamma) \\ \mathcal{M}_3(\gamma) = yj(\gamma) dx(\gamma). \end{cases}$$

Montrons que la charge électrique et le moment magnétique sont des *invariants*.

On a d'abord :

$$\begin{cases} \rho(0) = \frac{\gamma}{\sqrt{|1-\gamma^2|}} \rho(1/\gamma) \\ j(0) = \frac{\gamma}{\sqrt{|1-\gamma^2|}} j(\gamma). \end{cases}$$

Ensuite :

$$|dx(0) dt(0)| = |dx(1/\gamma) dt(1/\gamma)| = |dx(\gamma) dt(\gamma)|,$$

et

$$\frac{dt(0)}{dt(1/\gamma)} = \frac{\gamma}{\sqrt{|1-\gamma^2|}}; \quad \frac{dt(0)}{dt(\gamma)} = \frac{1}{\sqrt{|1-\gamma^2|}};$$

d'où enfin :

$$\rho(1/\gamma) dx(1/\gamma) = \rho(0) dx(0)$$

$$j(\gamma) dx(\gamma) = j(0) dx(0);$$

et comme  $y$  et  $z$  se transforment selon l'identité,  $\rho$ ,  $\partial n_2$  et  $\partial n_3$  ne dépendent pas du système de référence.  $S(0)$ .

Ainsi, à un paquet d'ondes aléatoire, de vitesse de phase  $\gamma$ , sont associés :

$$\left. \begin{array}{l} \text{une charge électrique} \\ \text{un moment magnétique} \end{array} \right\} \text{invariants,}$$

et l'on peut considérer que la charge électrique accompagne un corpuscule de vitesse  $1/\gamma$  et que le moment magnétique accompagne une onde de vitesse  $\gamma$  (ou inversement).

Il y a donc une espèce de «dédoublément» de la conception courante qui consiste à attacher à un corpuscule à la fois une charge électrique et un moment magnétique. Ces entités se rattachent en fait à l'être physique : paquet d'ondes, et l'une accompagne l'aspect corpuscule, l'autre, aspect onde.

Lorsque  $\gamma=1$ , l'invariant  $|\rho^2 - j^2|$  est nul, ce qui entraîne que  $\rho(1)$  et  $j(1)$  sont nuls. Un paquet d'ondes lumineuses (ou un photon) n'a donc ni charge électrique ni moment magnétique.

4. Ondes électromagnétiques de Maxwell. Supposons d'abord le paquet formé d'ondes électromagnétiques de vitesse 1.

Alors l'équation :

$$Q(\beta)=0,$$

admet la racine double 1, ce qui entraîne à la fois :

$$\begin{cases} R/c - Pc = 0 \\ PR - Q^2 = 0. \end{cases}$$

On aussi d'autre part :

$$\mu_0^2 c^2 - \omega_0^2 = 0,$$

puisque par hypothèse :  $\frac{\omega_0}{\mu_0} = c$ .

Cela exprime :

1.<sup>o</sup>) que le corpuscule de vitesse égale à  $c$  (photon) n'a pas de charge électrique ;

2.<sup>o</sup>) qu'il est accompagné par des champs électrique et magnétique *orthogonaux* et *égaux*, car :

$$\mathcal{E} \cdot \mathcal{E} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}^2 - \mathcal{E}^2 = 0;$$

Ces conséquences sont de nature à donner confiance dans l'assimilation

que nous avons faite des propriétés électromagnétiques aux caractéristiques statistiques du paquet d'ondes.

5. Ondes de vitesse  $\gamma \neq 1$ . Soit maintenant un paquet d'ondes de vitesse de phase  $\gamma \neq 1$ .

Si  $\gamma > 1$ , nous pouvons appeler ces ondes : ondes de *L. de Broglie*, et nous avons vu que le paquet représente : un (infra) corpuscule, de vitesse  $1/\gamma < 1$ , et une (ultra) onde, de vitesse  $\gamma > 1$ .

Si  $\gamma < 1$ , c'est un nouveau genre d'ondes, duales des précédentes, dont le paquet se manifeste sous l'aspect :

d'un (ultra) corpuscule, de vitesse  $1/\gamma > 1$ ,  
et d'une (infra) onde, de vitesse  $\gamma < 1$ .

Dans les systèmes de référence liés aux corpuscules et aux ondes, on a :

$$Q(\gamma) = Q(1/\gamma) = 0.$$

Il en résulte que :

$$\mathfrak{B} \times \mathfrak{C} = 0,$$

c'est à dire que, dans ces systèmes, les vecteurs  $\mathfrak{B}$  et  $\mathfrak{C}$  sont portés par le même support.

D'ailleurs, les supports relatifs au système  $(1/\gamma)$  sont *orthogonaux*. On le voit, en remarquant que le changement de  $\beta$  en  $1/\beta$  produit, dans les formules de transformation du champ électromagnétique, l'effet suivant :

$$\begin{cases} B_2(1/\beta) = H_3(\beta) & H_2(1/\beta) = -B_3(\beta) \\ B_3(1/\beta) = -H_2(\beta) & H_3(1/\beta) = B_2(\beta), \end{cases}$$

de sorte que :

$$\mathfrak{B}(\beta) \cdot \mathfrak{B}(1/\beta) = B_2(\beta) B_2(1/\beta) + B_3(\beta) B_3(1/\beta) = [\mathfrak{B}(\beta) \times \mathfrak{C}(\beta)]_1,$$

soit zéro si  $\beta = \gamma$  ou  $1/\gamma$ .

Les vitesses  $\gamma$  et  $1/\gamma$  des corpuscules et des ondes sont reliées au champ électromagnétique par les formules :

$$\gamma \begin{cases} \\ 1/\gamma \end{cases} \left\{ = \frac{\mathfrak{B}^2 + \mathfrak{C}^2 \pm \sqrt{(\mathfrak{B}^2 - \mathfrak{C}^2)^2 + 4(\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{C})^2}}{2(\mathfrak{B} \times \mathfrak{C})_1} \right.$$

Dans le cas de corpuscules et d'ondes *parfaits*, c'est à dire lorsque :

$$PR - Q^2 = 0,$$

on encore, lorsque la dispersion (optique) est certaine — cas des ondes électromagnétiques dans un diélectrique — on a, de plus :

$$P(\gamma) = 0; \quad R(1/\gamma) = 0,$$

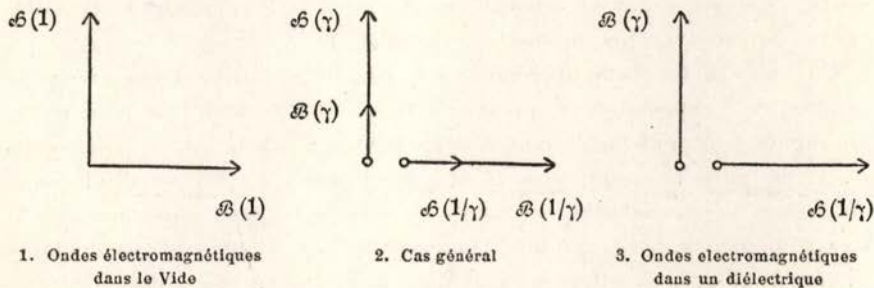
d'où :

$$\mathcal{E}(\gamma) = 0; \quad \mathcal{B}(1/\gamma) = 0.$$

Alors, chaque corpuscule (ou onde) est accompagné par un champ exclusivement électrique ou exclusivement magnétique, orthogonaux et égaux en module. Il y a une sorte de *dédoublément* de l'onde électromagnétique de Maxwell.

Il y a là une différence avec la propre théorie de Maxwell, selon laquelle les vecteurs électrique et magnétique sont alors inégaux en module et orthogonaux, et se propagent avec la même vitesse.

La figure suivante résume nos conclusions :



6. Association d'un champ électromagnétique à une distribution de probabilité. Si nous rapprochons maintenant l'association faite dans la section II, de la probabilité de présence au paquet d'ondes, de celle que nous venons de faire du champ électromagnétique au paquet d'ondes, nous obtenons l'identification suivante :

$$\text{d'un part : } \frac{x_0}{j} = \frac{ct_0}{\rho} \quad \text{ou} \quad \frac{x_0}{\rho} = \frac{ct_0}{j},$$

$$\text{d'autre part : } \frac{E}{\mathcal{E}^2} = \frac{Gc^2}{\mathcal{B}^2} = \frac{Fc}{(\mathcal{E} \times \mathcal{B})_1} \quad \text{ou} \quad \frac{E}{\mathcal{B}^2} = \frac{Gc^2}{\mathcal{E}^2} = \frac{Fc}{(\mathcal{E} \times \mathcal{B})_1}.$$

Nous laissons au lecteur le soin d'exprimer en langage clair les conséquences de cette nouvelle analogie.

7. Généralité des résultats précédents. Nous croyons n'avoir rien enlevé d'essentiel à l'exposé de nos idées, en limitant dans les schémas

aléatoires l'espace-temps à deux dimensions. Nous indiquerons pourtant que si l'on voulait traiter le problème sous une forme tensorielle générale, il faudrait :

1°) dans le schéma de l'onde aléatoire, partir d'un coefficient de corrélation :

$$r(\tau, k_1, k_2, k_3) = \overline{\cos(\Omega\tau - M_1 k_1 - M_2 k_2 - M_3 k_3)},$$

la loi de probabilité  $(\omega, \mu_1, \mu_2, \mu_3)$  étant dans la linéarisation du paquet — représentée par le tenseur symétrique formé avec les 16 moments rectangles (10 différents) des  $\Omega$  et des  $M$ .

2°) dans le schéma de la probabilité de présence, partir d'un loi de distribution :

$$(x, y, z, t);$$

qui se représente par un tenseur symétrique à 16 composantes (10 différents), formé avec les moments rectangles de  $X, Y, Z, T$ .

Chacun des tenseurs précédents représente en fait, le tenseur *le plus général* de l'espace-temps, puisqu'en faisant varier la loi de probabilité conjuguée, on peut lui donner *n'importe quelle valeur*. Il a là, croyons nous, en puissance, une possibilité d'explication, en termes d'ondes ou (en) termes de probabilité, de toutes les lois physiques, puisque celles-ci s'expriment par des relations tensorielles. Un tenseur quelconque pourra toujours, en effet, être identifié avec une certaine onde aléatoire (ou distribution de fréquences et de longueurs d'ondes dans un espace d'ondes).

En second lieu, il serait évidemment intéressant de reprendre ces idées, en se dispensant de la linéarisation qui nous a permis de ne faire que des calculs élémentaires.

#### IV. LES ULTRACORPUSCULES ET LA LUMIÈRE

1. Les ultracorpuscules et leur dynamique. Nous avons soutenu que, au même titre que L. de Broglie a associé une (ultra) onde à un (infra) corpuscule, on devait aussi associer un (ultra) corpuscule à une (infra) onde. Or, les ondes lumineuses dans un milieu réfringent sont justement des infraondes. On doit donc pouvoir aussi bien traiter de leurs propriétés en langage d'ultra corpuscules (disons même d'ultra-photons), à condition de prêter à ceux-ci la dynamique qui leur convient. Notre avis est d'ailleurs que si la théorie corpusculaire de la Lumière



n'a pas encore pu être réconciliée avec sa théorie ondulatoire, c'est parce qu'on a songé uniquement à des infracorpuscules, les vitesses supérieures à  $c$ , étant considérées, à tort, comme prohibées par la Théorie de la Relativité restreinte.

L'ultracorpuscule suit, bien entendu, une dynamique différente de la relativiste classique (où  $\beta < 1$ ). Dans le groupe de Lorentz étendu, on est conduit à baser ainsi la dynamique du corpuscule (infra ou ultra):

$$\text{Masse: } m(0) = \frac{m(\beta)}{\sqrt{|1-\beta^2|}}.$$

$$\text{Quantité de mouvement: } p(0) = \frac{m(\beta) c \beta}{\sqrt{|1-\beta^2|}}.$$

$$\text{Énergie: } \varepsilon(0) = \frac{m(\beta) c^2}{\sqrt{|1-\beta^2|}}.$$

Ces formules qui, pour  $\beta^2 < 1$ , rejoignent la dynamique relativiste, créent d'assez sérieuses différences lorsque  $\beta^2 > 1$ .

Pour  $\beta = \infty$ , la masse est nulle; la quantité de mouvement est égale à  $m(\infty) c$ ; et l'énergie est nulle.

On remarquera que l'on a, en tous cas, la relation suivante entre la quantité de mouvement et l'énergie:

$$p(0) = \frac{E(0)}{c} \beta.$$

**2. Propagation rectiligne de la lumière.** On a tendance à croire que la théorie corpusculaire de la Lumière rend compte ipso-facto des faits de l'Optique Géométrique et n'éprouve de difficultés qu'en face de l'Optique Ondulatoire. Or à notre avis, tel n'est pas le cas. Car si la Lumière est formée de petits projectiles susceptibles de choquer les particules élémentaires de la matière, on explique bien la diffusion, particulièrement l'incohérente (*effet Compton*), mais on devient incapable d'expliquer un aussi *gros fait* que la *propagation rectiligne* de la Lumière, sans diffusion appréciable, dans certains milieux *matériels* dits transparents et homogènes (comme les verres d'optique). Il faudrait en effet nous expliquer pourquoi la lumière est capable de poursuivre imperturbablement sa course rectiligne, en dépit des chocs qu'éprouvent les photons avec les constituants élémentaires du milieu *non vide* qu'elle traverse. Et aussi pourquoi les rayons lumineux se traversent les uns les autres et reprennent leur course sans modification après être sortis de la zone d'interférence.

Eh bien! nous allons précisément constater, sur nos équations, que

le choc des photons (ou plutôt des ultraphotons) sur des ultracorpuscules ne modifient ni leur trajectoire, ni leur fréquence.

Considérons un milieu matériel, formé d'ultracorpuscules, et ayant l'indice de réfraction :  $n$ . La lumière, dans ce milieu, ne consiste pas en photons proprement dits (de vitesse  $c$ ), mais en *ultraphotons* de vitesse  $nc > c$ , qui sont associés aux ondes *infralumineuses* de vitesse  $c/n$ . La dynamique de ces ultraphotons est caractérisée, d'après ce que nous avons dit, par la relation :

$$p = \frac{\varepsilon}{c} n.$$

Examinons ce qui se passe quand, par un phénomène tout à fait analogue à l'effet Compton, un ultraphoton *choque* un ultracorpuscule de masse propre  $m_0$ .  $\varepsilon_0$  et  $\varepsilon_1$  étant ses énergies avant et après le choc ;  $\theta$ , l'angle de déviation du rayon lumineux, et  $\varphi$  l'angle de la direction de recul de l'ultracorpuscule choqué, écrivons les équations de conservation. On obtient<sup>1</sup> :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{\beta^2 - 1}} + \varepsilon_1 \\ \frac{n\varepsilon_0}{c} = \frac{n\varepsilon_1}{c} \cos \theta + m_0 c \cos \varphi \left[ \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} - 1 \right] \\ 0 = \frac{n\varepsilon_1}{c} \sin \theta + m_0 c \sin \varphi \left[ \frac{\beta}{\sqrt{\beta^2 - 1}} - 1 \right]. \end{array} \right.$$

On en tire, par un calcul tout à fait parallèle au calcul classique :

$$(n^2 - 1)(\varepsilon_0^2 + \varepsilon_1^2) + 2(1 - n^2 \cos^2 \theta) \varepsilon_0 \varepsilon_1 = 2m_0 c^2 [m_0 c^2 - \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)^2 + m_0^2 c^4}]$$

expression qui se laisse mettre sous la forme *remarquable* :

$$(n^2 - 1)(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)^2 + 2n^2(1 - \cos \theta) \varepsilon_0 \varepsilon_1 = 2m_0 c^2 [m_0 c^2 - \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)^2 + m_0^2 c^4}].$$

Cette égalité va nous conduire à des relations *très strictes*. Le premier membre est, en effet :  $\geq 0$ , et le second :  $\leq 0$ . On doit donc avoir *nécessairement* :

$$\begin{array}{l} \varepsilon_0 = \varepsilon_1 \text{ (pas de changement de fréquence);} \\ \cos \theta = 1 \text{ (pas de déviation du rayon lumineux).} \end{array}$$

<sup>1</sup> On étudie le choc dans un système de référence dans lequel l'anticorpuscule a la vitesse  $\beta = \infty$  avant le choc, c'est à dire aussi, dans lequel l'infrarouge est stationnaire.

Pour mémoire, nous noterons que l'anticorpuscule reste immobile. Ainsi, la Lumière est bien — comme l'expérience *la plus grossière* nous l'a d'abord montré — capable de traverser sans perturbation certains milieux.

Ce calcul nous explique aussi pourquoi des faisceaux lumineux se traversent sans modification (puisqu'il s'agit toujours du choc nul de deux ultracorpuscules). Cela ne préjuge rien de ce qui peut se passer dans la zone d'interférence parce que :

1°) Les équations du choc ne sont qu'un bilan « avant, après » qui ignore le détail du mécanisme du choc.

2) Les franges résultent d'une question d'intensité, et non pas du mécanisme élémentaire. Elles doivent s'expliquer par des superpositions de probabilité.

Si nous tirons de là les conséquences qui s'imposent, il nous paraît qu'il faille y voir une confirmation de l'existence *physique* des ultracorpuscules : il faut les chercher parmi les constituants élémentaires de la matière transparente et homogène.

**3. La masse des ultraphotons.** Aux ondes lumineuses dans un milieu réfringent, il faut associer non des photons, mais des ultraphotons. Ceux-ci ont une masse, d'ailleurs très petite, dont on peut évaluer l'ordre de grandeur de la manière suivante.

La longueur d'onde associée étant :

$$\lambda(0) = \frac{h}{p(0)},$$

on en déduit :

$$m(\beta) = \frac{h}{\lambda(0)c} \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta}.$$

La masse propre des ultraphotons est nulle pour  $\beta = 1$ , et ce sont alors des photons. Elle croît ensuite avec  $\beta$  et tend vers la limite :

$$m(\infty) = \frac{h}{\lambda(0)c}.$$

Or, on a :

$$\frac{h}{c} = \frac{6,6 \times 10^{-27}}{3 \times 10^{10}} = 2,2 \times 10^{-37}.$$

Donc pour les ondes lumineuses ( $\lambda(0)$  compris entre  $10^{-6}$  et  $10^{-1}$  cm),  $m(\infty)$  est compris entre :

2,2×10<sup>-31</sup> et 1,2×10<sup>-33</sup>  
 (pour mémoire : masse de l'électron = 0,9 · 10<sup>-27</sup>).

4. La loi de la réfraction. La loi de la réflexion s'interprète banalement en termes corpusculaires, que le corpuscule accompagne ou non l'onde lumineuse. Il en va tout autrement de la loi de la réfraction qui, si l'on attache le corpuscule à l'onde, donne pour l'indice de réfraction l'inverse de la valeur réelle<sup>1</sup>.

Le raisonnement corpusculaire peut se résumer ainsi :

On pose la conservation de l'énergie et de la quantité de mouvement parallèle à la surface de séparation des deux milieux.

Et cela donne :

$$\frac{E}{c} \sin i = \frac{E\beta}{c} \sin r,$$

$\beta c$  étant la vitesse du photon réfracté.

Or,  $\beta = \frac{1}{n}$  ( $n$  = indice de réfraction) et l'on a le résultat faux :

$$\sin i = \frac{1}{n} \sin r.$$

Dans le concept de l'ultraphoton, la loi de Descartes s'établit au contraire, *correctement*. En effet, à l'onde infralumineuse de vitesse  $\frac{c}{n}$  dans le milieu réfringent, s'associe un ultraphoton de vitesse  $nc$ .

Par suite l'on a bien :

$$\sin i = n \sin r.$$

La loi de Descartes est équivalente au principe de Fermat. Donc, on a :

$$\int n ds \text{ minima;}$$

ce qui s'écrit aussi :

$$\int v ds \text{ minima;}$$

$v = nc$  étant la vitesse de l'ultraphoton.

Le principe de Fermat est donc identique au principe de Maupertuis appliqué à l'ultraphoton, et ce dernier principe résulte de la dynamique des ultracorpuscules (puisque  $E$  se conserve).

<sup>1</sup> Les remarques qui suivent ne sont pas nouvelles. L. de Broglie y a déjà beaucoup insisté, mais ce que nous apportons de neuf c'est l'ultraphoton (corpuscule de vitesse supérieure à  $c$ ).

Nous pensons avoir montré que les faits fondamentaux de l'optique s'expliquent avec une grande simplicité, dans l'hypothèse corpusculaire, lorsqu'on admet des vitesses supérieures à  $c$ , ce que nous avons montré ne pas être interdit par la conception relativiste.

## V. LES PARTICULES ÉLÉMENTAIRES

1. *Idées générales.* Lorsque la Physique expérimentale décrit le résultat de ses investigations dans le domaine atomique, elle s'exprime en langage de «*particules*», c'est à dire de corps matériels très petits, doués de certaines propriétés mécaniques et électromagnétiques. Tout le monde sait bien à présent que les particules élémentaires sont tout autre chose que de simples «*petites billes*». Nous croyons avoir précisément montré quelle idée on pouvait s'en faire, soit comme *paquet d'ondes*, soit comme *paquet d'événements*. Et nous sommes amenés à appeler «*particule*» cet être physique *ambigu* qui se compose d'un corpuscule et d'une onde associés.

Mais une fois *pensé* cet être, il y a bien des cas où l'on peut raisonner sur lui comme sur une «*petite bille*» — la théorie cinétique a tout de même donné des résultats, et la Mécanique Céleste traite les astres comme des points matériels. Peut être un jour se dispensera-t-on d'employer de telles images. En attendant, nous les utiliserons encore car c'est le seul moyen de confronter nos concepts avec les connaissances expérimentales.

Rappelons que nous avons distingué deux sortes de particules, que nous appellerons dorénavant :

*infraparticules* (infracorpuscule/ultraonde)  
et *ultraparticules* (ultracorpuscule/infraonde).

Laissons provisoirement de côté l'interprétation à donner de cette distinction, et voyons comment s'attribuent aux particules élémentaires une charge électrique et un moment magnétique.

2. *Charge électrique et moment magnétique des particules élémentaires.* La charge électrique d'une particule est l'intégrale invariante :

$$e = \int \rho \, dx \, dy \, dz.$$

Lorsqu'il s'agit d'une particule «*simple*», les différentes charges qui constituent la distribution électrique dans l'espace sont toutes de même

signe, et la charge totale  $e$  ne saurait être nulle sans que  $\rho$  le soit. On a vu qu'il en résulte alors que la particule a nécessairement la vitesse de la lumière (aussi bien sous l'aspect corpuscule que sous l'aspect onde): c'est un *photon*.

Mais pour une particule «*complexe*»,  $e$  peut être nul sans que  $\rho$  le soit, par suite des compensations entre les charges des deux signes. On échappe ainsi à la conclusion précédente et on peut concevoir des particules neutres n'ayant pas obligatoirement la vitesse de la lumière (neutron, atome).

Quant au moment magnétique, ses composantes sont:

$$\mathcal{M}_2 = - \int z j \, dx \, dy \, dz;$$

$$\mathcal{M}_3 = \int y j \, dx \, dy \, dz;$$

avec  $j = c\gamma$  ou  $c/\gamma$ .

Si  $j=0$ , la particule a nécessairement la vitesse de la lumière, à la fois sous ses aspects corpuscule et onde: c'est un *photon*.

Mais une particule *simple* peut avoir un moment magnétique nul sans que  $j$  le soit: cela dépend de la distribution des charges, à les supposer même toutes du même signe. Il peut y avoir également des particules neutres pourvues d'un moment magnétique. Enfin, moment magnétique nul n'entraîne pas *spin* nul, si la particule est neutre (photon).

**3. Confrontation avec les particules élémentaires de la Physique.** Nous n'avons évidemment pas l'ambition, par des schémas aussi simplifiés, d'apporter une *explication* des particules élémentaires, mais seulement de tirer les conséquences de nos considérations et de les confronter avec les connaissances expérimentales.

Nous partons de l'idée de représenter les particules élémentaires de la Physique par un «*paquet*» d'ondes ou d'événements. Nous savons d'abord que ce paquet revêt deux aspects que nous noterons.

$$\circ \sim \text{ et } \sim \circ,$$

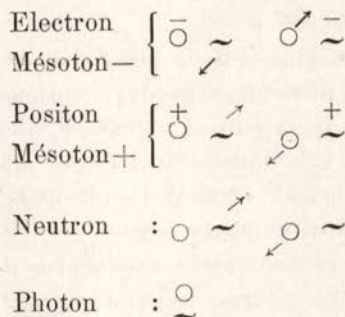
— le signe  $\circ$ , désignant l'aspect corpuscule et le signe  $\sim$ , l'aspect onde — selon que c'est le corpuscule ou l'onde qui a une vitesse inférieure à 1.

Nous nous occuperons seulement des infraparticules.

Nous devons attribuer ensuite à chaque demi-entité ( $\circ$  ou  $\sim$ ) une charge de l'un ou l'autre signe et un moment magnétique susceptible de deux signes. L'un ou l'autre de ces deux caractères, ou même les deux, peuvent d'ailleurs faire défaut.

Enfin, de part et d'autre de la vitesse de la lumière, charges et moments changent de signe.

La confrontation donne les résultats suivants :



Il y a dans ce tableau certaines coïncidences heureuses :

a) Une même particule chargée et pourvue d'un moment magnétique existe sous quatre formes ; ainsi :

electron/position  
mésoton - /mésoton +.

b) La combinaison de deux particules de même nature et de charge opposées crée un photon.

En effet, l'ensemble infraparticule (vitesse  $\beta$ ) et ultraparticule (vitesse  $1/\beta$ ) a pour quantité de mouvement :

$$p = \frac{mc\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{mc/\beta}{\sqrt{1/\beta^2-1}} = \frac{mc(\beta+1)}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

et pour énergie :

$$\varepsilon = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\beta^2}} + \frac{mc^2}{\sqrt{1/\beta^2-1}} = \frac{mc^2(1+\beta)}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ d'où : } \frac{\varepsilon}{p} = c.$$

c) Le photon est bien représenté, car absence de moment magnétique ne veut pas nécessairement dire *spin nul* (quand la charge est nulle).

Il y a aussi quelques discordances :

a) Il y aurait la possibilité de particules chargées sans moment magnétique ; elles ne sont pas connues.

b) Le proton ne trouve pas sa place (il n'a pas de correspondant de charge négative), mais on sait qu'il est possible de le considérer

comme formé de la combinaison d'un neutron avec un méson positif.

4. Interprétation des ultraparticules. L'hypothèse que nous allons émettre ici est toute intuitive.

Un des résultats les plus nets de nos Schémas est qu'une même particule élémentaire se présente sous deux variétés; infra ou ultraparticule selon que son aspect corpuscule a une vitesse inférieure ou supérieure à la lumière. L'hypothèse spéculative que nous avançons est celle-ci: les infraparticules seraient les éléments extranucléaires et les ultraparticules, les constituants du noyau.

Nous allons examiner quelques conséquences de cette conception.

Calculons d'abord les ordres de grandeur des ondes associées aux particules élémentaires considérées non plus comme des *infra-*, mais comme des *ultra-* particules. La formule à appliquer est:

$$\lambda(0) = \frac{h}{m(\beta)c} \frac{\sqrt{\beta^2 - 1}}{\beta}; \quad \beta > 1;$$

Contrairement à ce qui se passe pour la formule de L. de Broglie (avec  $\beta < 1$ ), la longueur d'onde associée à un ultracorpuscule n'est pas très sensible à la vitesse. Ainsi  $\beta$  serait il égal à 2 — ce qui est le cas homologue des électrons les plus rapides connus (vitesse 1/2) —, que  $\lambda(0)$  ne serait diminué que dans le rapport 0,85.

Nous calculerons donc sur l'expression:

$$\lambda = \frac{h}{mc},$$

(connue d'autre part sous le nom de longueur d'onde de Compton).

On obtient:

Pour l'électron:  $\lambda = \frac{2,2 \cdot 10^{-37}}{0,9 \cdot 10^{-27}} = 2,4 \cdot 10^{-10}$  cm, soit de l'ordre de  $10^{-2}$  Å,

qui est la longueur d'onde des rayons  $\gamma$ .

Pour le proton (ou le neutron):  $\lambda = \frac{2,2 \cdot 10^{-37}}{1,65 \cdot 10^{-24}} = 1,3 \cdot 10^{-13}$  cm, soit de l'ordre de  $10^{-5}$  Å, ce qui correspond à des ondes apparemment en dehors du domaine exploré.

5. Comment se conçoit la désintégration. La conception ordinaire du noyau est celle d'une matière fortement concentrée dans un très petit espace et défendu contre les bombardements de particules par une



solide barrière de potentiel. Ce noyau renferme une énorme quantité d'énergie (relativiste):  $mc^2$ . La « désintégration » du noyau amène la libération de cette énergie ou d'une partie de cette énergie.

Nous sommes conduits à voir les choses d'une manière extrêmement différente. Les particules sont des êtres physiques ayant une extension spatio-temporelle quelconque; tout au plus celle-ci est-elle concentrée autour d'un point probable. Ces particules sont à la fois des corpuscules et des ondes. Elles revêtent en outre deux aspects: *infra* et *ultra*, selon que leur *corpuscule* est *moins* ou *plus* rapide que la lumière, ou encore que leur *onde* est *plus* ou *moins* rapide que la lumière. L'aspect *ultra* est celui des particules du *noyau*. La *barrière de potentiel* est remplacée par la *ligne de démarcation* de la vitesse de la lumière.

Nous avons dit que l'on pouvait jusqu'à un certain point raisonner sur les particules comme sur des petites billes. La théorie de l'*effet Compton* en est un des meilleurs exemples. Nous avons vu, en étudiant un *ultra-effet Compton* (choc d'ultracorpuscules) qu'en raison de leur dynamique toute spéciale, les billes se traversaient, dans ce cas, sans perturbation. Ceci montre bien à quel point il est nécessaire d'idéaliser cette image des billes. Nous avons pu expliquer ainsi pourquoi la lumière se propage en ligne droite et pourquoi deux rayons lumineux se croisent sans accident. Maintenant, nous allons étudier un autre phénomène: celui où le choc transforme une des *ultra* particules en une *infra* particule.

Plaçons nous dans un système de référence où un ultracorpuscule du noyau a une vitesse infinie — c'est à dire où son onde associée est *stationnaire*. L'énergie de l'ultracorpuscule est alors *nulle*. On voit que, contrairement à la conception d'*Einstein*, nous considérons le noyau « *au repos* » comme dépourvu d'énergie, et non pas doué de l'énergie énorme  $mc^2$ . Il possède par contre une quantité de mouvement « *au repos* » égale à  $mc$ .

Bombardons maintenant le noyau avec d'autres ultracorpuscules (c'est à dire avec un « rayonnement » au sens habituel, de vitesse  $\frac{c}{n}$ ).

Ecrivons les équations du choc élastique :

$$\left\{ \begin{array}{l} \varepsilon_0 = \varepsilon_1 + \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \\ \frac{n\varepsilon_0}{c} = \frac{n\varepsilon_1}{c} \cos \theta + m_0 c \cos \varphi \left( \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right) \\ 0 = \frac{n\varepsilon_1}{c} \sin \theta + m_0 c \sin \varphi \left( \frac{\beta}{\sqrt{1-\beta^2}} - 1 \right). \end{array} \right.$$

Le calcul familier donne :

$$(n^2 - 1)(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)^2 + 2\varepsilon_0 \varepsilon_1 n^2 (1 - \cos \theta) = -2m_0 c^2 \sqrt{(\varepsilon_0 - \varepsilon_1)^2 - m_0^2 c^4},$$

et comme  $n \geq 1$  (les particules incidentes étant des «ultra»), l'égalité ne peut être satisfaite que si.

$$a) \quad \theta = 0;$$

$$b) \quad \varepsilon_0 - \varepsilon_1 = m_0 c^2.$$

Le choc a donc transformé l'*ultra* particule au repos, du noyau, en une *infra* particule au repos, pourvue de l'énergie  $m_0 c^2$ . La libération de l'énergie a consisté au total, à convertir l'énergie du rayonnement incident en une énergie *infra*-particulaire. Il a été «arraché» au noyau une masse  $m_0$  qui s'est trouvée de ce fait dotée d'une énergie  $m_0 c^2$  qu'elle n'avait pas, tant qu'elle appartenait au noyau. Cette énergie a été empruntée au rayonnement incident : elle a seulement changé de forme. Pourrait on dire : elle a été *transférée* du monde ultraluminaire (intra-nucléaire) dans *notre* monde infraluminaire (extranucléaire).

La condition de possibilité de ce transfert est que l'énergie initiale du rayonnement incident,  $\varepsilon_0$ , soit supérieure ou égale à  $m_0 c^2$ . Or, pour ce rayonnement incident — qui est une *ultra*-particule — on a :

$$\varepsilon_0 = h\nu,$$

$\nu$  étant la fréquence de son ultracorpuscule (associé à une infraonde). On a vu que la longueur d'onde de celle-ci est :

$$\lambda = \frac{c}{\nu}.$$

D'où la condition de possibilité :

$$\lambda < \frac{h}{m_0 c}.$$

Si l'on admet que le plus petit constituant de la matière est l'électron, on voit qu'un rayonnement ne commence à provoquer la désintégration du noyau qu'à partir des rayons  $\gamma$  :

$$\lambda < \lambda_{\gamma}^{-}.$$

La désintégration sera en général, d'autant plus facile que les «*ultra-projectiles*» employés seront *lourds*. En fait, c'est avec des particules  $\alpha$  que Rutherford a réussi les premières désintégrations artificielles. Et

dans les désintégrations réussies couramment depuis, (par neutrons, protons, deutérons), la longueur d'onde associée<sup>1</sup> est très courte ( $10^{-5}$  Å).

Il commence à se manifester une certaine «cohérence» dans les conséquences de notre hypothèse. Des rayonnements d'une longueur d'onde supérieure à celle des rayons  $\gamma$  ont la propriété de traverser sans les perturber ni sans être perturbés, les noyaux atomiques. Cela explique bien la *transparence* de certains corps à la lumière et aux rayons X. Les interactions entre rayonnement et matière sont dus aux électrons libres et périphériques (émission, absorption, diffusion, diffraction). Et si la longueur d'onde du rayonnement incident dépasse  $\lambda_\gamma$ , on assiste à un nouveau genre de phénomènes : interaction du rayonnement et de la matière nucléaire.

6. La Radioactivité. Les phénomènes de la radioactivité ont ceci de surprenant qu'ils paraissent violer le principe sacro-saint de la conservation de l'énergie. La difficulté est levée quand on confère l'énergie relativiste  $mc^2$  à la matière au repos. Mais, dans notre thèse, la matière nucléaire au repos ne possède pas d'énergie. Il n'y a plus place à une «désintégration spontanée» d'éléments instables, puisque le réservoir d'énergie est *vide*. La désintégration ne peut venir que de chocs entre ultracorpuscules, disons plus brièvement entre noyaux. C'est le moment de se servir de l'image des «*petites billes*».

A une autre échelle, nous avons l'exemple des trois états de la matière : gaz d'une part et solide, liquide d'autre part. Les molécules des gaz sont douées d'une agitation «*thermique*», en conséquence de laquelle, elles se choquent, ce qui n'arrive pas aux molécules des deux autres états.

Il y a, disons nous, la même différence entre un élément chimique *radioactif* et un élément chimique *stable*, qu'entre les états gazeux et les états solide et liquide.

Dans un élément radioactif, ce sont les ultracorpuscules (ou noyaux) qui sont doués d'une agitation qui les amène à se choquer. Bien des chocs sont inoffensifs ( $\lambda > \lambda_\gamma$ ), mais ceux des noyaux pour lesquels :  $\lambda < \lambda_\gamma$ , provoquent des catastrophes nucléaires, dont la fréquence dépend de la distribution en probabilité des longueurs d'onde associées.

<sup>1</sup> En tant qu'ultracorpuscules, bien entendu.

7. Conclusion. Les ressources de nos schémas aléatoires sont encore loin d'être épuisées. Si, dans leur forme actuelle, ils ne sont pas encore en mesure d'apporter des théories *quantitatives*, ils auront du moins, projeté quelque lumière sur des concepts obscurs des Nouvelles Mécaniques, et peut être, ouvert une voie à la Mécanique nucléaire.

#### REMARQUES COMPLÉMENTAIRES

1. Le paramètre d'évolution. Il a été reconnu souhaitable pour le raccord, de la Mécanique quantique avec la Relativité, d'introduire une statistique sur la coordonnée  $t$ , mais la difficulté est de le faire, en gardant dans la théorie, une *variable d'évolution*, ce qui ne paraît pas très facile (L. de Broglie<sup>1</sup>).

Nous croyons bien que ce souhait est précisément réalisé par les considérations précédentes. Un paquet d'événements représente en effet, un être physique, à un instant *macroscopique*  $t_0$ , entaché de l'incertitude  $\sqrt{T^{1/2}}$ . L'évolution d'un être physique est représenté par une *suite continue* de paquets d'événements, au même titre qu'en Relativité (non statistique), l'évolution d'un être physique *ponctuel* est représentée par une *ligne d'Univers*. L'évolution d'un être physique *aléatoire* est donc représentée par un *faisceau de lignes d'Univers*, concentré autour de la ligne d'Univers de l'événement *probable*. Celle-ci définit, à chaque instant  $t_0$  (qui est le temps propre du système de référence considéré), la position du point probable dans l'espace géométrique, tandis que les caractéristiques statistiques du paquet (moments du second ordre), varient avec  $t_0$ . En somme, on peut dire que le point aléatoire  $(X, T)$  de l'espace-temps, est une *fonction aléatoire* du paramètre d'évolution  $t_0$ .

Il est donc parfaitement — et très naturellement — possible d'introduire une statistique sur le temps, *tout en gardant une variable d'évolution*.

L'idée d'un temps aléatoire nous paraît, d'autre part, conférer au temps de nouvelles propriétés qui pourraient rapprocher la notion vulgaire du Temps de sa notion relativiste. Mais ce sujet dépasse le cadre de cette Note.

2. Des moyennes; de la réconciliation du champ et du corpuscule. La Mécanique quantique, sous sa forme relativiste (*Dirac*) considère exclusivement des moyennes prises dans l'espace géométrique; ce sont

<sup>1</sup> Rapport présenté à la Réunion organisée à Varsonie, en 1938, par l'Institut International de Coopération Intellectuelle.

des fonctions du temps *seul*. On peut les appeler des «moyennes corpusculaires» puisqu'elles se rapportent à chaque instant, à un être physique ayant une certaine extension spatiale, définie par une probabilité de présence.

Pour avoir des «grandeurs de champ», c'est à dire fonctions de  $x$  et de  $t$ , il faut considérer les «densités de moyenne», c'est à dire le coefficient de l'élément différentiel sous le signe  $\int$ . Mais alors, ces grandeurs, n'étant plus des moyennes, n'ont pas de signification physique.

Le schéma d'une distribution statistique dans l'espace-temps, fait disparaître ipso-facto ces difficultés et fait même surgir une possibilité nouvelle et inattendue, qui est sans doute la véritable clef du problème.

La loi de probabilité conjuguée  $(x, t)$ , des deux nombres aléatoires  $(X, T)$ , peut se décomposer de deux manières en le produit d'une loi individuelle par une loi liée :

$$(x, t) = (x)(x; t) = (t)(t; x).$$

Il y a donc deux sortes de lois liées :

a)  $(x; t)$ , qui est déjà connue sous le nom de : *probabilité de présence* et qui est, en fait, celle employée dans les moyennes quantiques. Elle donne lieu à des moyennes fonctions de  $t$  seul (ou «corpusculaires»).

b)  $(t; x)$ , qu'est une loi jamais encore considérée et qu'on pourrait appeler : *probabilité d'existence*. Il lui correspond des moyennes, fonction de  $x$  (ou «moyennes de champ»).

Ces moyennes sont, comme les «densités de moyenne», des grandeurs de champ, mais elles sont susceptibles de recevoir un sens physique, du fait qu'elles sont des moyennes.

En réalité, les moyennes qui ont un sens physique *absolu* sont les moyennes *spatio-temporelles* (loi  $(x, t)$ ) étendues au paquet d'événements qui seul, représente l'être physique sans découpage arbitraire. Ce qui a retenu jusqu'à présent, de les considérer, c'est que ces moyennes paraissaient être des *constantes*, ce qui aurait conduit à une Physique purement statique. Comme le dit L. de Broglie<sup>1</sup>, au cours du temps, un atome subit des actions très diverses, est le siège d'effets *Stark* et d'effets *Zeeman* etc... Il paraît inacceptable de définir des valeurs propres dépendant de toute l'existence de l'atome, mais invariables au cours du temps.

<sup>1</sup> Loc cit.

La difficulté est ainsi mise en évidence, de la manière la plus claire, par ces citations (approximatives) empruntées au rapport de L. de Broglie.

Or, nous venons précisément de voir, que la vie d'une être physique est représentée par une *suite continue* de paquets d'événements — comme, lorsque cet être est ponctuel, elle est tracée par une ligne d'Univers. Alors, les moyennes spatio-temporelles, prises sur un paquet d'événements, deviennent des *fonctions du temps*  $t_0$ , qui n'est autre que le *temps propre* d'un système de référence quelconque, ou encore le temps propre d'un observateur macroscopique quelconque.

Ce point de vue nous paraît éminemment susceptible d'apporter une solution aux difficultés éprouvées par la Mécanique quantique relativiste, particulièrement par celle des Systèmes.

**3. Considération des 4 dimensions.** En réduisant l'espace-temps à 2 dimensions:  $x$  et  $t$ , nous avons simplifié à l'extrême l'exposé de nos idées — et c'était nécessaire pour les faire bien comprendre — mais nous nous sommes privés en revanche des ressources complémentaires qu'offraient les dimensions  $x$  et  $y$ .

Introduisons les à présent et voyons comment elles enrichissent le schéma du paquet d'événements. On peut toujours placer l'axe des  $x$ , de manière que :

$$y_0 = \bar{Y} = 0 \text{ et } z_0 = \bar{Z} = 0.$$

Les nouveaux moments à considérer sont :

a)  $\bar{Y}^2$ ,  $\bar{YZ}$ ,  $\bar{Z}^2$ , qui se transforment selon l'identité; le moment rectangle  $\bar{YZ}$  peut d'ailleurs disparaître par une rotation convenable des axes  $(y, z)$ . Mais après cela les 3 axes  $O(x, y, z)$  se trouvent fixés.

b)  $\bar{XY}$ ,  $\bar{TY}$  et  $\bar{XZ}$ ,  $\bar{TZ}$ , qui se transforment selon :

$$\begin{cases} \bar{XY}(0) = \frac{1}{\sqrt{|1-\beta^2|}} [\bar{XY}(\beta) + \beta c \bar{TY}(\beta)] \\ \bar{TY}(0) = \frac{1}{\sqrt{|1-\beta^2|}} [\bar{TY}(\beta) + \beta/c \bar{XY}(\beta)], \end{cases}$$

et deux formules analogues pour  $\bar{XZ}$  et  $\bar{TZ}$ .  $\bar{XY}$  et  $\bar{TY}$  se transforment donc respectivement comme  $x_0$  et  $t_0$ , ou comme  $ct_0$  et  $x_0/c$ .

D'après le principe suivi jusqu'à présent, d'identifier les grandeurs

covariantes, nous devons poser :

$$\text{soit : } \frac{\overline{XY}}{x_0} = \frac{\overline{TY}}{t_0}$$

$$\text{soit : } \frac{\overline{XY}}{ct_0} = \frac{\overline{TY}}{x_0/c},$$

la valeur commune des rapports étant un *invariant*. Il y aura donc une des vitesses  $\gamma$  ou  $1/\gamma$ , pour laquelle :  $\overline{TY}(\gamma)=0$ ,

— car  $x_0(\gamma)$  ou  $t_0(\gamma)$  est nul —  
 et pour la même raison :  $\overline{TZ}(\gamma)=0$ .

Dans le système  $S(\gamma)$ , les coordonnées d'espace sont indépendantes en probabilité de la coordonnée de temps.

Symétriquement, dans le système  $S(1/\gamma)$ , c'est  $X$  qui est indépendant de  $(T, Y, Z)$ .

La transformation des moments rectangles admet l'invariant :

$$|\overline{XY}^2 - c^2 \overline{TY}^2|,$$

qui est égal à :

$$\overline{XY}^2(\gamma),$$

puisque  $\overline{TY}(\gamma)=0$ .

4. Polarisation. Dans un système de référence quelconque, la distribution de probabilité dans le plan  $(y, z)$  consiste en une famille d'ellipses homothétiques. Cette famille est *invariante* par rapport à un changement du système de référence. C'est donc bien une *caractéristique intrinsèque* de l'être physique représenté par le paquet d'événements. Elle est éminemment propre à représenter la *polarisation* d'une onde (elliptique, circulaire ou rectiligne).

5. Moment cinétique de spin. A la vitesse aléatoire  $V = \frac{X}{T}$ , dirigée selon l'axe des  $x$ , correspond un moment cinétique, situé dans le plan  $(y, z)$  :

$$\xi_1=0, \quad \xi_2=m\overline{ZV}, \quad \xi_3=-m\overline{YV}.$$

Les moyennes sont prises dans *l'espace-temps* (ce qui est logiquement nécessaire puisque le temps est aléatoire, dans notre schéma).

Plaçons nous dans le système  $S(0)$ . On a :

$$V(0) = \frac{x_0(t_0)}{t_0(0)} + \frac{X'(0) - \gamma c T'(0)}{t_0(0)}.$$

D'où :

$$\xi_2(0) = \frac{m(0)}{t_0(0)} [Z\bar{X}'(0) - \gamma c \bar{T}'Z(0)];$$

et en vertu des formules de transformation :

$$\xi_2(0) = \frac{m(\gamma)}{t_0(\gamma)} \bar{Z}\bar{X}'(\gamma) = \xi_2(\gamma).$$

$\bar{Z}\bar{X}'(\gamma)$  étant un invariant,  $\xi_2$  est aussi un *invariant* (car  $S(0)$  est un système de référence quelconque).

Le paquet d'événements est donc pourvu d'un moment cinétique de «*spin*», invariant, situé dans le plan  $(y, z)$  et dont la grandeur est :

$$\xi = \frac{m(\gamma)}{t_0(\gamma)} \sqrt{\bar{Z}\bar{X}'^2(\gamma) + \bar{Y}\bar{X}'^2(\gamma)}.$$

Si l'on attribue à ce moment la valeur  $h/4\pi$  et qu'on le compare à l'expression trouvée pour l'incertitude :

$$\frac{m(\gamma)}{t_0(\gamma)} \bar{X}'^2(\gamma) = \frac{h}{4\pi},$$

on obtient la relation :

$$\bar{X}'^2(\gamma) = \sqrt{\bar{Z}\bar{X}'^2(\gamma) + \bar{Y}\bar{X}'^2(\gamma)},$$

qu'on peut encore écrire :

$$\bar{X}'^2 = r_1 \bar{Y}^2 + r_2 \bar{Z}^2,$$

$r_1$  et  $r_2$  étant les coefficients de corrélation de  $Y$  et  $Z$  avec  $X$  (relation valable dans le système  $S(\gamma)$ ).

*Remarques.* 1. D'après l'assimilation que nous avons faite des moments rectangles à  $x_0$  et  $t_0$ , nous avons :

$$\frac{\bar{X}\bar{Y}(\gamma)}{c t_0(\gamma)} = \frac{\bar{X}\bar{Z}(\gamma)}{c t_0(\gamma)} = z,$$

$z$  étant un invariant (il n'y a pas de raison d'attribuer des  $z$  différents aux coordonnées  $Y$  et  $Z$ ).



Nous aurons donc :

$$\begin{cases} \overline{XY}(\gamma) = \overline{XZ}(\gamma) = zc t_0(\gamma) \\ \overline{X^{12}}(\gamma) = \sqrt{2} zc t_0(\gamma). \end{cases}$$

Ce sont là les lois d'évolution des caractéristiques statistiques du paquet (sous son aspect corpuscule), en fonction du temps propre  $t_0(\gamma)$  du système de référence attaché au corpuscule.

Comme d'autre part :

$$\overline{X^{12}}(\gamma) = \frac{h}{4\pi m(\gamma)} t_0(\gamma),$$

on en déduit :

$$z = \frac{h}{4\sqrt{2} \pi m(\gamma) c} = \frac{\lambda_0(\gamma)}{4\sqrt{2} \pi},$$

$\lambda_0(\gamma)$ , étant la longueur d'onde associée au corpuscule (exprimée dans le système de référence qui lui est attaché).

2.  $\lambda_0(\gamma)$ , qui est proportionnel à  $X^{12}(\gamma)$ , mesure l'étendue spatiale du corpuscule. C'est aussi un ordre de grandeur de la dimension au dessous de laquelle les concepts statistiques cessent d'être valables, puisqu'alors la finesse de l'observation est telle qu'on n'intègre pas dans un domaine assez grand pour *estimer* les valeurs probables.

A cette échelle, le déterminisme statistique n'existe plus, l'observation portant sur un trop petit nombre d'épreuves individuelles pour permettre à la régularisation des moyennes, de jouer. La loi d'évolution :

$$\overline{X^{12}}(\gamma) = \frac{h}{4\pi m(\gamma)} t_0(\gamma),$$

qui est celle du mouvement brownien, montre d'ailleurs bien que les déplacements des points-événements suivent les caprices du hasard.

6. Nouvelle conception de la charge électrique. Nous avons, comme il est classique, considéré la charge électrique comme étant la moyenne *spatiale* de la densité de charge électrique. Conformément à notre nouveau point de vue, au sujet des moyennes, ce sera maintenant la moyenne *spatio-temporelle* de la densité de charge. La charge du corpuscule sera donc :

$$\bar{\rho}(\gamma);$$

c'est un *invariant*, qui s'écrit dans le système de référence de l'observateur :

$$\text{Moy} \left\{ \sqrt{|\bar{\rho}^2(0) - j^2(0)|} \right\}.$$

7. Moment magnétique de spin. Avec le point de vue des moyennes *spatio-temporelles*, le moment magnétique de spin est :

$$\mathfrak{M}_1 = 0; \quad \mathfrak{M}_2 = \bar{\rho} \frac{\overline{ZV}}{c}; \quad \mathfrak{M}_3 = -\bar{\rho} \frac{\overline{YV}}{c}.$$

Dans le système  $S(0)$ , on a :

$$\mathfrak{M}_2(0) = \bar{\rho}(0) \frac{\overline{ZX}(0) - \gamma c \overline{TX}(0)}{ct_0(0)} = \bar{\rho}(\gamma) \frac{\overline{ZX}(\gamma)}{ct_0(\gamma)},$$

qui est un *invariant*.

$\bar{\rho}(\gamma)$  n'étant autre que la charge  $e$  du corpuscule, on a :

$$\mathfrak{M} = \frac{e\hbar}{mc} = \frac{he}{4\pi mc}.$$

Le corpuscule est donc doué d'un moment magnétique, porté par le même support que le moment cinétique, et égal à un magnéton quand le moment cinétique est égal à un demi-quantum.

Il nous semble bien à présent que nous ayons réussi à fabriquer un être mathématique pourvu de toutes les propriétés que les Physiciens prêtent aux particules élémentaires, y compris leur double aspect d'onde et de corpuscule. Et nous sommes persuadés qu'il y a là beaucoup plus qu'une simple image.

## TABLE DES MATIÈRES

|                        |     |
|------------------------|-----|
| INTRODUCTION . . . . . | 149 |
|------------------------|-----|

### I—L'ONDE ALÉATOIRE

|   |     |
|---|-----|
| 1. Qu'est-ce que l'onde aléatoire? . . . . .  | 150 |
| 2. Qu'est-ce qu'un paquet d'ondes? . . . . .  | 151 |
| 3. Effet de la transformation de Lorentz sur le paquet d'ondes. . . . .   | 151 |
| 4. Equivalence du changement du système de référence avec un certain mode d'observation dans le système primitif. . . . . | 153 |
| 5. Les systèmes de référence de vitesse supérieure à $c$ . . . . .  | 155 |
| 6. La transformation de Lorentz étendue . . . . .   | 156 |
| 7. Propriétés de la transformation de Lorentz étendue . . . . .   | 157 |
| 8. La dualité onde/corpuscule . . . . .   | 159 |
| 9. La formule de Louis de Broglie . . . . .   | 161 |
| 10. Infra et ultra-corpuscule; Ultra et infraonde . . . . .   | 163 |
| 11. Définition plus précise des corpuscules et des ondes . . . . .  | 163 |
| 12. Corpuscules imparfaits. . . . .   | 165 |
| 13. Constantes physiques d'un paquet d'ondes. . . . .   | 167 |

### II—LA PROBABILITÉ DE PRÉSENCE DANS L'ESPACE-TEMPS

|   |     |
|---|-----|
| 1. Distribution statistique d'événements . . . . .                                    | 169 |
| 2. Sens physique d'une densité de probabilité dans l'espace-temps . . . . .           | 169 |
| 3. Le paquet d'événements . . . . .   | 170 |
| 4. Autre forme de la dualité onde/corpuscule. . . . .                                 | 171 |
| 5. Considération des moments du second ordre . . . . .                                | 172 |
| 6. Raccord des schémas de l'onde aléatoire et de la probabilité de présence . . . . . | 173 |
| 7. De la relation d'incertitude . . . . .   | 174 |

### III—LE CHAMP ÉLECTROMAGNÉTIQUE

|  |     |
|--|-----|
| 1. Champ électromagnétique . . . . .                                     | 175 |
| 2. Association d'un champ électromagnétique à l'onde aléatoire . . . . . | 177 |
| 3. Charge électrique et moment magnétique . . . . .                      | 178 |

|   |     |
|---|-----|
| 4. Ondes électromagnétiques de Maxwell . . . . .  | 179 |
| 5. Ondes de vitesse $\gamma \neq 1$ . . . . .   | 180 |
| 6. Association d'un champ électromagnétique à une distribution de probabilité . . . . . | 181 |
| 7. Généralité des résultats précédents . . . . .  | 181 |

#### IV — LES ULTRACORPUSCULES ET LA LUMIÈRE

|   |     |
|---|-----|
| 1. Les ultracorpuscules et leur dynamique . . . . . | 182 |
| 2. Propagation de la lumière . . . . .              | 183 |
| 3. La masse des ultraphotons . . . . .              | 185 |
| 4. La loi de la réfraction. . . . .                 | 186 |

#### V — LES PARTICULES ÉLÉMENTAIRES

|   |     |
|---|-----|
| 1. Idées générales . . . . .  | 187 |
| 2. Charge électrique et moment magnétique des particules élémentaires . . . . . | 187 |
| 3. Confrontation avec les particules élémentaires de la Physique. . . . .       | 188 |
| 4. Interprétation des ultraparticules. . . . .                                  | 189 |
| 5. Comment se conçoit la désintégration . . . . .                               | 190 |
| 6. La Radioactivité . . . . .   | 193 |
| 7. Conclusion . . . . .   | 194 |

#### REMARQUES COMPLÉMENTAIRES

|   |     |
|---|-----|
| 1. Le paramètre d'évolution. . . . .                                      | 194 |
| 2. Des moyennes; de la réconciliation du champ et du corpuscule . . . . . | 194 |
| 3. Considération des 4 dimensions. . . . .                                | 196 |
| 4. Polarisation . . . . .   | 197 |
| 5. Moment cinétique de spin . . . . .                                     | 197 |
| 6. Nouvelle conception de la charge électrique . . . . .                  | 199 |
| 7. Moment magnétique de spin. . . . .                                     | 200 |

## LE PROBLÈME ATMOSPHÉRIQUE D'APRÈS LA THÉORIE DES PERTURBATIONS SPONTANÉES

par ANTONIO GIÃO

(Reçu le 13 Déc. 1946)

1. Le système d'équations de la théorie des perturbations. J'ai exposé récemment<sup>1</sup> l'état actuel de la théorie des perturbations spontanées et montré que ses théorèmes fondamentaux conduisent à une explication rationnelle des principaux phénomènes de l'hydrodynamique solaire. Il s'agit maintenant d'appliquer la même théorie à l'important problème des perturbations atmosphériques, dont elle donne, comme nous le verrons, une solution complète, susceptible d'être traduite en pratique par une méthode simple de prévision mathématique du temps à courte échéance ( $\leq 48$  heures).

La théorie des perturbations spontanées peut être résumée par un système de trois équations aux dérivées partielles du premier ordre (une équation vectorielle et deux scalaires), dont la solution est équivalente à la solution générale du problème du mouvement d'un milieu fluide quand l'effet hydrodynamique direct des actions extérieures qui agissent sur ce milieu est considéré comme une donnée<sup>2</sup>.

Soit  $U^*$  une propriété quelconque du fluide. Sa valeur totale (valeur réelle ou observable) peut être décomposée, d'après la théorie des perturbations, en deux parties :

$$(1) \quad U^* = U + u,$$

<sup>1</sup> «Nouvelles recherches sur les perturbations spontanées du mouvement des fluides avec des applications à l'hydrodynamique solaire». Bulletin de la Société de Géographie de Lisbonne, 1943, Sept.-Dec. et 1944, Janv.-Avril.

<sup>2</sup> Pour tout ce qui concerne la déduction des équations fondamentales nous renvoyons le lecteur à notre mémoire cité (première partie).

où  $U$  représente le *champ entretenu* qui correspond au *mouvement entretenu* dans le fluide par les actions extérieures (ce mouvement étant l'équivalent hydrodynamique direct de ces actions) et  $u$  le champ de perturbation spontanée<sup>1</sup>. Nous appliquerons très souvent aux grandeurs une opération de moyenne temporelle :

$$(2) \quad \frac{1}{\tau} \int_{t-\tau}^t dt,$$

à laquelle correspond la décomposition suivante des valeurs totales :

$$(3) \quad U^* = U_m^* + u',$$

$U_m^*$  étant la moyenne temporelle, à l'instant  $t$ , relative à l'intervalle de temps  $\tau$  (résultat de l'application de (2) aux valeurs  $U^*$ ). S'il s'agit d'une valeur  $U$  du champ entretenu, alors nous poserons :

$$(4) \quad U = U_m + U'$$

Nous utiliserons les notations suivantes :

$x, y, z$  : coordonnées cartésiennes rectangulaires d'un point  $A$  quelconque du fluide dont le rayon-vecteur est  $\vec{r}(x, y, z)$ .

$\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z$  : vecteurs unitaires des axes  $x, y, z$ .

$\lambda, \varphi, \eta$  : longitude, latitude et géopotential.

$\xi$  : longueurs mesurées sur les verticales ascendantes (trajectoires orthogonales des surfaces  $\eta = C^{te}$ ).

$r$  : Distance d'un point au centre de la Terre (centre du géoïde).

$\sigma$  : Surface du géoïde.

$t$  : Temps.

$\nabla$  : Opérateur de Hamilton ou opérateur gradient ( $\nabla \cdot \equiv \text{div}$ ).

$\nabla_h$  : Opérateur gradient horizontal.

$\frac{\partial}{\partial t}$  : Opérateur des variations locales en un point quelconque.

$\vec{V}^*$  : Vitesse des particules du fluide.

<sup>1</sup> Les valeurs totales des propriétés du fluide sont désignées par un astérisque, celles qui correspondent aux champs entretenus par des majuscules et celles des champs de perturbation par des minuscules.

$\frac{d}{dt}$ : Opérateur des variations individuelles (sur une particule quel-

conque:  $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{V}^* \cdot \nabla$ ).

$\vec{\Omega}$ : Vitesse angulaire absolue (galiléenne) du référentiel principal du fluide [axes par rapport auxquels la vitesse et le moment angulaire moyens (moyennes «massiques» relatives à tout le fluide) sont constamment nuls].

$\frac{d_a V_R}{d_a t}$ : Accélération absolue (galiléenne) du mouvement de translation du référentiel principal.

$P^*$ : Pression.

$S^*$ : Volume spécifique ( $\Psi^* = \frac{1}{S^*} =$  densité).

$T^*$ : Température ( $\theta =$  perturbation de température).

$R$ : Constante des gaz pour l'air ( $P^* S^* = RT^*$ ).

$g^*$ : Accélération de la pesanteur.

$E_g^*$ : Énergie potentielle de la pesanteur (par unité de masse).

$E$ : Énergie hydromécanique du mouvement entretenu (par unité de masse), définie par la fonction:  $E \equiv SP + \frac{1}{2} V^2 + E_g = RT + \frac{1}{2} V^2 + E_g$ .

Désignons maintenant par  $D$  le déterminant suivant:

$$(5) \quad D = \begin{vmatrix} A_{11} = \frac{\partial V_x}{\partial x} & A_{12} = \frac{\partial V_x}{\partial y} - 2\Omega_z & A_{13} = \frac{\partial V_x}{\partial z} + 2\Omega_y \\ A_{21} = \frac{\partial V_y}{\partial x} + 2\Omega_z & A_{22} = \frac{\partial V_y}{\partial y} & A_{23} = \frac{\partial V_y}{\partial z} - 2\Omega_x \\ A_{31} = \frac{\partial V_z}{\partial x} - 2\Omega_y & A_{32} = \frac{\partial V_z}{\partial y} + 2\Omega_x & A_{33} = \frac{\partial V_z}{\partial z} \end{vmatrix}$$

Soit  $\chi_{ij}$  le mineur de  $D$  relatif à l'élément  $A_{ij}$  ( $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$ ) affecté du signe  $(-1)^{i+j}$ , c'est-à-dire:

$$(6) \quad \chi_{ij} = \frac{\partial D}{\partial A_{ij}}.$$

En posant :

$$(7) \quad \vec{J} = - \frac{d\vec{\Omega}}{dt} \times \vec{r} - \frac{d_a \vec{V}_R}{d_a t},$$

et :

$$(8) \quad \chi = \sum_{ij} \chi_{ij} \vec{k}_i \vec{k}_j,$$

on peut définir une importante fonction des champs entretenus de vitesse et d'énergie (à laquelle nous donnerons le nom de *vecteur de prévision*) par la relation :

$$(9) \quad \vec{H} = \frac{1}{D} \chi \cdot (\nabla E - \vec{J}).$$

Les mineurs réduits  $\frac{\chi_{ij}}{D}$  forment un tenseur contravariant du second ordre, qui est symétrique lorsque la vitesse entretenue  $\vec{V}$  est irrotationnelle ( $\text{rot } \vec{V} = 0$ ) et  $\vec{\Omega} = 0$ . On a en effet :

$$(10) \quad A_{ij} - A_{ji} = \frac{\partial V_i}{\partial x^j} - \frac{\partial V_j}{\partial x^i} = - \text{rot}_i \vec{V}.$$

Le système d'équations qui résume la théorie des perturbations spontanées peut alors s'écrire comme suit :

$$(11) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P^*}{\partial t} = - \vec{H} \cdot \nabla P^* - P^* \text{div } \vec{V}^* + \frac{1}{S^*} \vec{H} \cdot \left( \vec{g}^* + \vec{J} - \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) + \\ \quad + \frac{1}{S^*} \frac{\partial}{\partial t} (E - E_g^*), \\ \vec{V}^* = - \frac{1}{D} \left( S^* \nabla P^* - \vec{g}^* - \vec{J} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) \cdot \chi, \\ \frac{\partial S^*}{\partial t} + \vec{V}^* \cdot \nabla S^* = S^* \text{div } \vec{V}^*. \end{array} \right.$$

La solution de ce système de trois (cinq) équations à trois (cinq) inconnues  $P^*$ ,  $S^*$ ,  $\vec{V}^*$  ( $V_x^*$ ,  $V_y^*$ ,  $V_z^*$ ) qui satisfait aux conditions initiales  $P^*(x, y, z, t = t_0) = P_0^*(x, y, z)$ ;  $S^*(x, y, z, t = t_0) = (S_0^*(x, y, z)$ ;  $\vec{V}^*(x, y, z, t = t_0) = \vec{V}_0^*(x, y, z)$  et à certaines conditions aux limites (que nous indiquerons plus loin), résoud le problème général du mou-



vement du fluide quand les champs entretenus de pression  $P(x, y, z, t)$ , de volume spécifique  $S(x, y, z, t)$  et de vitesse  $\vec{V}(x, y, z, t)$  peuvent être considérés comme des données.

2. Le problème atmosphérique. Au point de vue des équations de la théorie des perturbations spontanées, ce problème est caractérisé par les trois conditions suivantes :

1°. On a en chaque point de l'atmosphère :

$$(12) \quad \vec{g}^* = \vec{g}; \quad \frac{\partial E_g^*}{\partial t} = 0.$$

2°. Le référentiel principal de l'atmosphère a une vitesse angulaire ( $\vec{\Omega}$ ) et une vitesse de translation ( $\vec{V}_R$ ) constantes, c'est-à-dire d'après (7) :

$$(13) \quad \vec{J} = 0.$$

3°. Il règne un équilibre quasi-statique le long des verticales, ce qui permet d'écrire :

$$(14) \quad -\vec{H} \cdot \nabla P^* + \frac{1}{S^*} \vec{g} \cdot \vec{H} = -\vec{H} \cdot \nabla_h P^*$$

Les équations de base (11) deviennent donc, grâce à ces conditions :

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P^*}{\partial t} = -\vec{H} \cdot \nabla P^* - P^* \operatorname{div} \vec{V}^* + \frac{1}{S^*} \left( \frac{\partial E}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right), \\ \vec{V}^* = -\frac{1}{D} \left( S^* \nabla P^* - \vec{g} + \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) \cdot \chi, \\ \frac{\partial S^*}{\partial t} + \vec{V}^* \cdot \nabla S^* = S^* \operatorname{div} \vec{V}^*. \end{array} \right.$$

Appliquons maintenant à ces équations l'opération de moyenne relative à un intervalle de temps  $\tau$ . En tenant de compte de (3) et de (4), le système fondamental précédent donne d'une part :

$$(16) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial P_m^*}{\partial t} = -(\vec{H} \cdot \nabla_h P^*)_m - (P^* \operatorname{div} \vec{V}^*)_m + \left[ \frac{1}{S^*} \left( \frac{\partial E}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) \right]_m, \\ \vec{V}_m^* = - \left[ S^* \nabla P^* \cdot \left( \frac{\chi}{D} \right) \right]_m + \vec{g} \cdot \left( \frac{\chi}{D} \right)_m - \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \left( \frac{\chi}{D} \right) \right]_m, \\ \frac{\partial S_m^*}{\partial t} + (\vec{V}^* \cdot \nabla S^*)_m = (S^* \operatorname{div} \vec{V}^*)_m, \end{array} \right.$$

et d'autre part :

$$(17) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial p'}{\partial t} &= -\vec{H}_m \cdot \nabla_h p' - \vec{H}' \cdot \nabla_h p' - \vec{H}' \cdot \nabla_h P_m^* - \\ &\quad - [\vec{H}_m \cdot \nabla_h P_m^* - (\vec{H} \cdot \nabla_h P^*)_m] - P_m^* \operatorname{div} \vec{v}' - \\ &\quad - p' \operatorname{div} \vec{V}_m^* - p' \operatorname{div} \vec{v}' - [P_m^* \operatorname{div} \vec{V}_m^* - (P^* \operatorname{div} \vec{V}^*)_m] + \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{S^*} \left( \frac{\partial E}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) - \left[ \frac{1}{S^*} \left( \frac{\partial E}{\partial t} - \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \right) \right]_m \right\}, \\ \vec{v}' &= -S_m^* \nabla p' \cdot \left( \frac{\chi}{D} \right) - s' \nabla P_m^* \cdot \left( \frac{\chi}{D} \right) - s' \nabla p' \cdot \left( \frac{\chi}{D} \right) - \\ &\quad - S_m^* \nabla P_m^* \cdot \left( \frac{\chi}{D} \right) + \left[ S^* \nabla P^* \cdot \left( \frac{\chi}{D} \right) \right]_m + \vec{g} \cdot \left( \frac{\chi}{D} \right)' - \\ &\quad - \frac{\partial \vec{V}_m^*}{\partial t} \cdot \left( \frac{\chi}{D} \right)' - \frac{\partial \vec{V}'}{\partial t} \cdot \left( \frac{\chi}{D} \right) - \left\{ \frac{\partial \vec{V}_m^*}{\partial t} \cdot \left( \frac{\chi}{D} \right)_m - \left[ \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} \cdot \left( \frac{\chi}{D} \right) \right]_m \right\}, \\ \frac{\partial s'}{\partial t} &+ \vec{V}_m^* \cdot \nabla s' + \vec{v}' \cdot \nabla S_m^* + \vec{v}' \cdot \nabla s' + \\ &+ [\vec{V}_m^* \cdot \nabla S_m^* - (\vec{V}_m^* \cdot \nabla S^*)_m] = S_m^* \operatorname{div} \vec{v}' + \\ &+ s' \operatorname{div} \vec{V}_m^* + s' \operatorname{div} \vec{v}' + [S_m^* \operatorname{div} \vec{V}_m^* - (S^* \operatorname{div} \vec{V}^*)_m]. \end{aligned} \right.$$

3. Les équations des perturbations atmosphériques. Pour étudier les perturbations atmosphériques, il est indispensable d'éliminer les variations lentes (qui proviennent du champ entretenu) en prenant un intervalle de temps  $\tau$  tel que les variations temporelles locales des moyennes correspondantes :

$$(18) \quad \frac{\partial U_m^*}{\partial t} = \frac{1}{\tau} [U^*(t) - U^*(t - \tau)],$$

soient négligeables par rapport aux variations totales  $\partial U^*/\partial t$ . En météorologie dynamique et dans la prévision à courte échéance ( $\leq 48$  heures) il faut admettre que ceci a lieu lorsque :

$$(19) \quad \left| \frac{\partial U_m^*}{\partial t} \right| \leq \frac{1}{10} \left| \frac{\partial U^*}{\partial t} \right|.$$

Pour satisfaire à cette condition pour les trois inconnues  $P^*$ ,  $S^*$  et  $V^*$ , il suffit, d'après (18), que  $\tau$  soit de l'ordre de grandeur de 10 jours. Etant donné, par ailleurs, l'ordre de grandeur des variations tempo-

relles locales de éléments du champ entretenu de l'atmosphère, les équations (16) se simplifient beaucoup et deviennent :

$$(20) \quad \begin{cases} -\vec{H} \cdot \nabla_h P_m^* = P_m^* \operatorname{div} \vec{V}_m^*, \\ \vec{V}_m^* = -\frac{1}{D} (S_m^* \nabla P_m^* - \vec{g}) \cdot \chi, \\ \vec{V}_m^* \cdot \nabla S_m^* = S_m^* \operatorname{div} \vec{V}_m^*. \end{cases}$$

tandis que le système (17) prend la forme simple :

$$(21) \quad \begin{cases} \frac{\partial p'}{\partial t} = -\vec{H} \cdot \nabla p' - P_m^* \operatorname{div} \vec{v}', \\ \vec{v}' = -S_m^* \nabla p' \cdot \left( \frac{\chi}{D} \right) - s' \nabla P_m^* \cdot \left( \frac{\chi}{D} \right), \\ \frac{\partial s'}{\partial t} + \vec{V}_m^* \cdot \nabla s' + \vec{v}' \cdot \nabla S_m^* + \vec{v}' \cdot \nabla s' = S_m^* \operatorname{div} \vec{v}'. \end{cases}$$

ou bien, en remplaçant  $\nabla P_m^*$  par sa valeur déduite de la deuxième équation (20) :

$$(22) \quad \begin{cases} \frac{\partial p'}{\partial t} = -\vec{H} \cdot \nabla_h p' - P_m^* \operatorname{div} \vec{v}' \\ \vec{v}' = -S_m^* \nabla p' \cdot \frac{\chi}{D} - \frac{s'}{S_m^*} \left( \vec{V}_m^* - \vec{g} \cdot \frac{\chi}{D} \right) \\ \frac{\partial s'}{\partial t} + \vec{V}_m^* \cdot \nabla s' + \vec{v}' \cdot \nabla S_m^* + \vec{v}' \cdot \nabla s' = S_m^* \operatorname{div} \vec{v}' \end{cases}$$

Ce sont les équations fondamentales des perturbations atmosphériques, tandis que le système (20) traduit les propriétés du champ des valeurs moyennes lorsque  $\tau \geq 10$  jours.

Le problème des perturbations atmosphériques, dans la théorie des perturbations spontanées, se confond donc avec le problème de l'intégration du système (22) précédent de cinq équations aux dérivées partielles du premier ordre pour les cinq inconnues  $v'_x, v'_y, v'_z, p'$  et  $s'$ . Il s'agit donc de trouver deux fonctions scalaires  $p'(x, y, z, t)$ ,  $s'(x, y, z, t)$  et une fonction vectorielle  $\vec{v}'(x, y, z, t)$  satisfaisant aux équations (22) ainsi qu'aux conditions initiales :

$$(23) \quad \begin{cases} p'(x, y, z, t=t_0) = p'_0(x, y, z), \\ s'(x, y, z, t=t_0) = s'_0(x, y, z), \\ \vec{v}'(x, y, z, t=t_0) = \vec{v}'_0(x, y, z), \end{cases}$$

( $p'_0, s'_0$  et  $\vec{v}'_0$  étant des fonctions données) et aux conditions aux limites suivantes :

1°. Conditions aux limites extérieures de l'atmosphère :

$$(24) \quad \lim_{r \rightarrow \infty} p' = 0; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} s' = 0; \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{v}' = 0.$$

2°. Condition cinématique sur la surface ( $\sigma$ ) du géoïde :

$$(25) \quad (v'_z)_\sigma = 0.$$

Cette condition peut être exprimée, comme nous allons le voir, par une relation remarquable sur le champ de pression à la surface du géoïde. De la deuxième équation de (22) on déduit en effet, en tenant compte de (25) et de la condition cinématique  $[(V_m^*)_\zeta]_\sigma = 0$  pour le mouvement moyen :

$$(26) \quad S_m^* \left[ (\nabla_h p'_\sigma \cdot \chi)_\zeta + \chi_{\zeta\zeta} \left( \frac{\partial p'}{\partial \zeta} \right)_\sigma \right] - \frac{s'}{S_m^*} \chi_{\zeta\zeta} g = 0.$$

Par suite de la relation :

$$(27) \quad \frac{\partial p'}{\partial \zeta} = -g\psi'$$

qui exprime l'équilibre quasi-statique le long des verticales et de  $s' = -S_m^{*2} \psi'$ , la relation précédente (26) devient :

$$(28) \quad S_m^* \nabla_h p'_\sigma \cdot \chi + 2g \chi_{\zeta\zeta} \frac{s'}{S_m^*} = 0,$$

ce qu'on peut écrire en coordonnées sphériques  $\varphi, \lambda, r$  :

$$(28 \text{ bis}) \quad \frac{\chi_{x\zeta}}{\cos \varphi} \frac{\partial p'_\sigma}{\partial \lambda} + \chi_{y\zeta} \frac{\partial p'_\sigma}{\partial \varphi} = -2gr_\sigma \chi_{\zeta\zeta} \frac{s'}{S_m^{*2}}.$$

Remarquons que cette expression de la condition cinématique aux limites permet de déduire immédiatement quelques propriétés importantes des centres de perturbation de pression sur la surface du géoïde. En un tel centre on a  $\nabla_h p'_\sigma = 0$  et (28) donne alors la condition :

$$(29) \quad (\chi_{\zeta\zeta} s'_\sigma)_c = 0,$$

l'indice  $c$  désignant la position d'un centre. On doit donc avoir, soit  $(s'_\sigma)_c = 0$ , soit  $(\chi_{\zeta\zeta})_c = 0$ , en chaque point de la trajectoire d'un centre de pression. Mais on peut écrire presque rigoureusement :

$$(30) \quad \frac{s'}{S_m^*} = \frac{\theta'}{T_m^*} - \frac{p'}{P_m^*}$$

de sorte que la condition  $(s'_\sigma)_c = 0$  est presque équivalente à la condition

$$(\theta'_\sigma)_c = \frac{T_m^*}{P_m^*} (p'_\sigma)_c.$$

Considérons, en particulier, les centres de basse pression pour lesquels on a  $(p'_\sigma)_c < 0$ ; alors  $(\theta'_\sigma)_c < 0$ . Autrement dit, un centre de basses pressions (de perturbation) à la surface du géoïde est toujours un centre « froid » si  $\chi_{\zeta\zeta} \neq 0$  sur sa trajectoire. Sur la trajectoire de tout centre « chaud »  $[(\theta'_\sigma)_c > 0]$  de basses pressions (de perturbation) on a donc forcément  $\chi_{\zeta\zeta} = 0$ .

4. Equation spatio-temporelle du champ de pression sur la surface du géoïde. La partie de beaucoup la plus importante du problème météorologique est la prévision des inconnues  $p'$ ,  $s'$  et  $\vec{v}'$  sur la surface du géoïde, indépendamment de leurs valeurs dans tout le reste de l'atmosphère. Avant de traiter l'intégration du système général (22) dans toute l'atmosphère, il est donc extrêmement intéressant de déduire une équation aux dérivées partielles spatio-temporelles pour la fonction  $p'$  à la surface du géoïde.

Supposons que l'atmosphère libre est en contact avec la surface du géoïde par une couche limite mince, à la Prandtl, adhérant à cette surface, et pouvant être considérée, s'il y a lieu, comme une couche fictive auxiliaire. Cette hypothèse est toujours permise et ne diminue en rien la généralité des résultats, car d'une part on peut toujours admettre que la pression et le volume spécifique sur la surface du géoïde ont les mêmes valeurs avec ou sans couche limite et quelle que soit l'épaisseur et la structure de celle-ci; et d'autre part, malgré l'adhérence, le vent à une hauteur arbitrairement petite au dessus de la surface du géoïde peut toujours être supposé égal au vent effectivement observé.

L'effet de l'adhérence sur le champ du vecteur  $\vec{v}'$  se traduit par l'évanouissement de ses composantes horizontales sur la surface du géoïde. En tenant compte de la condition cinématique aux limites  $(v'_\zeta)_\sigma = 0$ , on a donc sur cette surface  $\sigma$ :

$$(31) \quad \vec{v}'_\sigma = 0.$$

D'autre part les mêmes conditions (cinématique et d'adhérence) donnent aussi évidemment:

$$(32) \quad (\vec{V}'_m)_\sigma = 0.$$

Grâce à ces conditions, la troisième équation de (22) devient sur la surface  $\sigma$  du géoïde :

$$\frac{\partial s'_\sigma}{\partial t} = (S_m^* \operatorname{div} \vec{v})_\sigma,$$

d'où l'on déduit, par suite de l'expression (28) de la condition cinématique sur  $\sigma$  :

$$(\operatorname{div} v')_\sigma = -\frac{(S_m^*)_\sigma}{2g} \frac{1}{(\chi_{\xi\xi})_\sigma} \nabla_h \left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} \right) \cdot \chi_\sigma.$$

La première équation de (22) devient alors sur la surface du géoïde :

$$(33) \quad \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} = -\vec{H} \cdot \nabla_h p'_\sigma + \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h \left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} \right),$$

où nous avons posé :

$$(34) \quad \vec{\Lambda} = \frac{(P_m^* S_m^*)_\sigma}{2g} \left( \frac{\chi_{x\xi}}{\chi_{\xi\xi}} \right)_\sigma \vec{k}_x + \frac{(P_m^* S_m^*)_\sigma}{2g} \left( \frac{\chi_{y\xi}}{\chi_{\xi\xi}} \right)_\sigma \vec{k}_y,$$

$\vec{k}_x, \vec{k}_y$  étant ici les vecteurs unitaires d'axes rectangulaires  $x, y$  horizontaux. On peut écrire (34) sous la forme plus simple :

$$(35) \quad \vec{\Lambda} = \frac{RT_m^*}{2g} \left( \frac{\chi_{x\xi}}{\chi_{\xi\xi}} \right)_\sigma \vec{k}_x + \frac{RT_m^*}{2g} \left( \frac{\chi_{y\xi}}{\chi_{\xi\xi}} \right)_\sigma \vec{k}_y.$$

L'équation (33) est l'équation cherchée pour le champ de  $p'$  à la surface du géoïde. Il s'agit d'une équation aux dérivées partielles spatio-temporelles, du second ordre et dont les coefficients sont des fonctions simples des champs entretenus de vitesse et de la température moyenne  $T_m^*$ . L'importance de cette équation est très grande, parce qu'elle forme la base de la seule méthode de prévision mathématique du temps *réellement applicable* dans la pratique qu'on peut déduire de la mécanique des fluides.

Avant de résoudre l'équation (33), il est intéressant de remarquer qu'elle montre que la variation de pression à la surface de la Terre se compose de deux parties :

1° — une variation due à un *transport horizontal* (avec *déformation*) dans le champ du vecteur de prévision  $\vec{H}$  (terme  $-\vec{H} \cdot \nabla_h p'_\sigma$ ).

2° — une variation [terme  $\vec{\Lambda} \cdot \nabla_h \left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} \right)$ ] indépendante du gradient de

$p'_\sigma$  est qui n'est autre que le *creusement* (ou *comblement*) du champ de pression à la surface de la Terre.

L'équation (33) présente donc la variation de pression en parfait accord avec l'idée de l'existence de deux variations de nature différente, idée qui est fortement suggérée par l'analyse des cartes du temps. Elle précise complètement les notions familières de variation par transport et de variation par creusement (ou comblement). C'est là une circonstance très intéressante et très utile.

On peut déduire facilement de l'équation (33) la vitesse de déplacement d'un «front» à la surface de la Terre en assimilant celui-ci à une discontinuité des dérivées premières de  $p'_\sigma$ . La vitesse du «front»  $(W_f)_l$ , mesurée dans une direction  $l$ , est alors donnée par la formule<sup>1</sup> :

$$(W_f)_l = - \frac{\Delta \left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} \right)}{\Delta \left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial l} \right)},$$

l'opérateur  $\Delta$  désignant ici la discontinuité frontale de la quantité à laquelle il est appliqué. De l'équation (33) on déduit alors :

$$(W_f)_l = H_l + \vec{\Lambda} \cdot \frac{\Delta \left[ \nabla_h \left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} \right) \right]}{\Delta \left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial l} \right)}$$

On voit donc que le «front» est entraîné par le vecteur de prévision  $[(W_f)_l = H_l]$  quand il n'y a pas de discontinuité du gradient isallobarique instantané.

Finalement, la formule :

$$(W_i)_l = - \frac{\frac{\partial p'_\sigma}{\partial t}}{\frac{\partial p'_\sigma}{\partial l}},$$

de la vitesse  $(W_i)_l$  de déplacement d'une isobare de  $p'_\sigma$  le long d'une direction  $l$  devient, grâce à (33) :

$$(W_i)_l = H_l + \frac{1}{\frac{\partial p'_\sigma}{\partial l}} \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h \left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} \right).$$

<sup>1</sup> Voir le mémoire de l'auteur : «*La Mécanique différentielle des Fronts et du Champ isallobarique*» — Mémorial de l'Office Nat. Météor. de France, n.° 20, Paris, 1929.

L'isobare de  $p'_\sigma$  sera donc entraînée par le vecteur  $\vec{H}$  partout où le gradient isallobarique instantané est nul.

5. Solution du problème atmosphérique sur la surface du géoïde par l'équation (33). La solution complète de cette équation, c'est-à-dire la détermination de la fonction  $p'_\sigma(\varphi, \lambda, t)$  qui satisfait à la condition initiale  $p'_\sigma(\varphi, \lambda, t=t_0) = (p'_\sigma)_0(\varphi, \lambda)$  — il n'y a pas ici de conditions aux limites puisque la surface du géoïde est une surface fermée —, doit être cherchée sous forme de développement en série correspondant, soit à des approximations successives, soit à la superposition des vibrations propres physiquement possibles de  $p'_\sigma$ .

A — *Méthode des approximations successives*. Soit  $\partial/\partial t$  l'opérateur des variations observées en un point se déplaçant constamment avec la vitesse  $\vec{H}_h$  (particules  $\vec{H}$  horizontales), c'est-à-dire :

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{H} \cdot \nabla_h$$

L'équation (33) prend alors la forme :

$$(36) \quad \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} = \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h \left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} \right).$$

Nous poserons :

$$(37) \quad p'_\sigma(\varphi, \lambda, t) = \sum_0^\infty \pi_n(\varphi, \lambda, t),$$

et définirons les approximations successives  $\pi_n$  par les équations :

$$(38) \quad \frac{\partial \pi_n}{\partial t} = \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h \left( \frac{\partial \pi_{n-1}}{\partial t} \right), \quad (\text{avec } \pi_{-1} = 0),$$

et les conditions :

$$(39) \quad \begin{cases} \pi_0(\varphi, \lambda, t=t_0) = p'_\sigma(\varphi, \lambda, t=t_0) = (p'_\sigma)_0, \\ \pi_n(\varphi, \lambda, t=t_0) = 0, \quad \text{pour } n \geq 1. \end{cases}$$

Les lignes de flux de  $\vec{H}$  et leurs trajectoires orthogonales forment, sur la surface  $\sigma$  du géoïde, un système de coordonnées de Gauss qu'on peut caractériser par des paramètres  $l$  et  $\alpha$ ,  $l$  étant par exemple une longueur mesurée sur une ligne de flux arbitraire à partir d'une trajectoire orthogonale arbitraire et  $\alpha$  un paramètre de numérotage des lignes de flux. Soient  $l_0$  et  $\alpha_0$  les valeurs des coordonnées  $l, \alpha$  des particules  $\vec{H}$  horizontales à l'instant initial  $t=t_0$ . La solution géné-



rale de la première équation (38) pour  $n=0$ , s'écrit alors en coordonnées de Lagrange  $l_0, \alpha_0, t$ :

$$(40) \quad \pi_0(l_0, \alpha_0, t) = (p'_\sigma)_0(l_0, \alpha_0).$$

L'approximation d'ordre zéro est donc simplement le champ initial transporté sans creusement ni comblement en chaque point de  $\sigma$  avec une vitesse égale à la projection horizontale du vecteur de prévision  $\vec{H}$ . Ce transport comporte cependant évidemment une *déformation transversale* (due aux variations de  $H$  suivant les normales à ses lignes de flux) et une *déformation longitudinale* (due aux variations de  $\vec{H}$  le long de ses lignes de flux).

Pour déterminer les approximations  $\pi_n$  ( $n \geq 1$ ) qui sont en quelque sorte des creusements (ou comblements) d'ordre de plus en plus élevé, il faut déterminer la variation locale  $\partial \pi_0 / \partial t$  de l'approximation d'ordre zéro. Il faut donc exprimer (40) en coordonnées «eulériennes»  $l, \alpha$ . On a:

$$(41) \quad \begin{cases} l = l_0 + \int_{t_0}^t H_l(l_0, \alpha_0, t) \delta t, \\ \alpha = \alpha_0, \end{cases}$$

l'opération  $\int_{t_0}^t \delta t$  se rapportant ici à une même particule  $\vec{H}$  horizontale.

Des relations précédentes on déduit:

$$(42) \quad \begin{cases} l_0 = l_0(l, \alpha, t), \\ \alpha_0 = \alpha_0, \end{cases}$$

et la solution (40) prend alors la forme eulérienne cherchée:

$$\pi_0(l, \alpha, t) = (p'_\sigma)_0[l_0(l, \alpha, t), \alpha],$$

d'où l'on déduit le champ de  $\partial \pi_0 / \partial t$ :

$$\frac{\partial \pi_0}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \{ (p'_\sigma)_0[l_0(l, \alpha, t), \alpha] \}.$$

L'équation de l'approximation  $\pi_1$  s'écrit:

$$\frac{\partial \pi_1}{\partial t} = \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h \left( \frac{\partial \pi_0}{\partial t} \right),$$

et sa solution, compte tenu des conditions (39), aura la forme suivante en coordonnées «lagrangiennes»  $l_0, \alpha_0, t$ :

$$\pi_1(l_0, \alpha_0, t) = \int_{t_0}^t \left[ \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h \left( \frac{\partial \pi_0}{\partial t} \right) \right] (l_0, \alpha_0, t) dt.$$

De la solution correspondante en coordonnées eulériennes

$$\pi_1(l, \alpha, t) = \int_{t_0}^t \left[ \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h \left( \frac{\partial \pi_0}{\partial t} \right) \right] [l_0(l, \alpha, t), \alpha, t] dt$$

on déduit  $\partial \pi_1 / \partial t$  qu'on introduit dans l'équation de l'approximation  $\pi_2$  et ainsi de suite.

Pour trouver pratiquement la fonction  $l_0(l, \alpha, t)$  de (42) dont la connaissance permet le calcul effectif des approximations successives on peut utiliser par exemple la relation :

$$\int_{t_0}^t \frac{\partial l}{H} = t - t_0.$$

B. *Méthode des vibrations propres.* L'équation (33) étant linéaire admet évidemment des solutions de la forme :

$$(43) \quad (p'_G)_n = a_n(l, \alpha) \sin[\omega_n(\alpha) t] + b_n(l, \alpha) \cos[\omega_n(\alpha) t],$$

d'une *vibration harmonique généralisée* de fréquence  $\omega_n(\alpha)$ .

La vibration (43), introduite dans l'équation (33), donne alors les équations qui déterminent les amplitudes  $a_n$  et  $b_n$  :

$$(44) \quad \begin{cases} \omega_n a_n + \vec{H} \cdot \nabla_h b_n - \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h (a_n \omega_n) = 0 \\ \omega_n b_n - \vec{H} \cdot \nabla_h a_n - \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h (b_n \omega_n) = 0, \end{cases}$$

qu'on peut écrire comme suit en faisant apparaître l'opérateur  $\partial / \partial t$  et en remarquant que  $\frac{\partial a}{\partial t} = \frac{\partial b}{\partial t} = 0$  :

$$\begin{cases} \omega_n a_n + \frac{\partial b_n}{\partial t} - \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h (\omega_n a_n) = 0 \\ \omega_n b_n - \frac{\partial a_n}{\partial t} - \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h (\omega_n b_n) = 0. \end{cases}$$

De ces équations on déduit :

$$(44') \quad \begin{cases} \frac{\partial^2 a_n}{\partial t^2} + \omega_n^2 a_n = \omega_n \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h (\omega_n a_n) - \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\Lambda} \cdot \nabla_h (\omega_n b_n)] = f_n^a(\alpha, l_0, t) \\ \frac{\partial^2 b_n}{\partial t^2} + \omega_n^2 b_n = \omega_n \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h (\omega_n b_n) + \frac{\partial}{\partial t} [\vec{\Lambda} \cdot \nabla_h (\omega_n a_n)] = f_n^b(\alpha, l_0, t). \end{cases}$$

Considérons les intégrales générales de ces équations (en coordonnées lagrangiennes  $l_0, \alpha_0, t$ ):

$$(44'') \quad \left\{ \begin{array}{l} a_n(\alpha, l_0, t) = a_1^n \sin[\omega_n(\alpha)t] + a_2^n \cos[\omega_n(\alpha)t] + \\ + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n^a(\alpha, l_0, t') \sin[\omega_n(\alpha)(t-t')] dt', \\ b_n(\alpha, l_0, t) = b_1^n \sin[\omega_n(\alpha)t] + b_2^n \cos[\omega_n(\alpha)t] + \\ + \frac{1}{\omega_n} \int_0^t f_n^b(\alpha, l_0, t') \sin[\omega_n(\alpha)(t-t')] dt', \end{array} \right.$$

$a_1^n, a_2^n, b_1^n$  et  $b_2^n$  étant des constantes. Il faut distinguer deux cas:

1°. *les lignes de flux du vecteur  $\vec{H}$  sont des courbes fermées sur la surface du géoïde.* Alors, les valeurs des fonctions  $a_n$  et  $b_n$  sur les particules  $\vec{H}$  sont évidemment des fonctions périodiques de  $t$ . En désignant par  $L(\alpha)$  la longueur des lignes de flux (fermées) du vecteur  $H$ , on déduit immédiatement des intégrales (44'') que le spectre des fréquences est discontinu (dénombrable) et qu'il est donné par la relation:

$$(45) \quad \omega_n(\alpha) = \frac{2\pi n}{L(\alpha)} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

$$\int_0^{L(\alpha)} \frac{dl}{H(\alpha, l)}$$

on arrive ainsi à l'important résultat suivant:

Pour qu'il existe sur la surface du géoïde des vibrations harmoniques simples de  $p'_0$  (c'est-à-dire pour que les  $\omega_n$  soient constants en chaque point de cette surface), quand les lignes de flux du vecteur  $\vec{H}$  sont des courbes fermées, il faut et il suffit que l'intégrale:

$$\int_0^{L(\alpha)} \frac{dl}{H(l, \alpha)}$$

soit constante pour chaque ligne de flux. En d'autres termes, il faut et il suffit que toutes les lignes de flux de  $\vec{H}$  soient parcourues par les «particules  $\vec{H}$ » dans le même temps.

Si, comme il est naturel de le supposer, la fonction  $p'_\sigma$  peut être développée suivant les vibrations propres généralisées (43), on aura donc la série de Fourier suivante, dans le cas où les lignes de flux de  $\vec{H}$  sont fermées :

$$(46) \quad p'_\sigma(\alpha, l, t) = \sum_1^\infty a_n(\alpha, l) \sin \left( \frac{2\pi nt}{\int_0^{L(\alpha)} \frac{dl}{H(l, \alpha)}} \right) + b_n(\alpha, l) \cos \left( \frac{2\pi nt}{\int_0^{L(\alpha)} \frac{dl}{H(l, \alpha)}} \right),$$

avec la période fondamentale :

$$(47) \quad \tau_1(\alpha) = \int_0^{L(\alpha)} \frac{dl}{H(l, \alpha)},$$

et les coefficients étant donnés par les formules classiques :

$$(48) \quad a_n(\alpha, l) = \frac{2}{\tau_1} \int_{t_0 - \tau_1}^{t_0} p'_\sigma(\alpha, l, t) \sin \left( \frac{2\pi nt}{\tau_1(\alpha)} \right) dt;$$

$$b_n(\alpha, l) = \frac{2}{\tau_1} \int_{t_0 - \tau_1}^{t_0} p'_\sigma(\alpha, l, t) \cos \left( \frac{2\pi nt}{\tau_1(\alpha)} \right) dt.$$

La série (46) montre que  $p'_\sigma$  est, en chaque point, une fonction périodique du temps dont la période est  $\tau_1$  lorsque des lignes de flux de  $\vec{H}$  sont fermées et lorsqu'on peut négliger les variations temporelles des champs entretenus pendant l'intervalle  $(t_0 - \tau, t_0 + \tau)$ .

Les vibrations propres généralisées (43) ont l'amplitude  $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$  et l'angle de phase :

$$\gamma_n = \text{arc tg} \left[ -\frac{a_n(\alpha, l)}{b_n(\alpha, l)} \right].$$

Chaque vibration propre généralisée se comporte donc comme une onde dont la vitesse de propagation  $C_n$ , donnée par :

$$(49) \quad C_n(\alpha, l) = \frac{\omega_n(\alpha)}{|\nabla \gamma_n|} = \frac{2\pi n}{|\nabla \gamma_n| \int_0^{L(\alpha)} \frac{dl}{H(l, \alpha)}}$$

est constante dans le temps mais variable dans l'espace ; et il y a des points amphydromiques définis par :

$$a_n(\alpha, l) = b_n(\alpha, l) = 0.$$

2°. *les lignes de flux du vecteur de prévision  $\vec{H}$  sont quelconques.* Alors, les équations (44) des amplitudes des vibrations propres généralisées de  $p'_\sigma$  ont des solutions pour toute valeur de  $\omega$  comprise entre 0 et  $\infty$ . Le spectre des fréquences est donc continu et il faut remplacer la série (46) par l'intégrale de Fourier :

$$(50) \quad p'_\sigma(\alpha, l, t) = \int_0^\infty [a(\omega, \alpha, l) \sin(\omega t) + b(\omega, \alpha, l) \cos(\omega t)] d\omega,$$

avec naturellement  $\nabla\omega=0$ . Les formules classiques :

$$(51) \quad a(\omega, \alpha, l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [p'_\sigma(\alpha, l, t) - p'_\sigma(\alpha, l, -t)] \sin(\omega t) dt,$$

$$b(\omega, \alpha, l) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [p'_\sigma(\alpha, l, t) + p'_\sigma(\alpha, l, -t)] \cos(\omega t) dt$$

sont impropres <sup>1</sup> à la détermination effective de  $a(\omega)$  et de  $b(\omega)$ , puisqu'elles font intervenir les valeurs (inconnues) de  $p'_\sigma(\alpha, l, t)$  pour  $t > 0$ . Il faut donc déterminer ces fonctions par le système (44), qui prend ici la forme :

$$\begin{cases} \omega(1 - \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h) a = - \vec{H} \cdot \nabla_h b \\ \omega(1 - \vec{\Lambda} \cdot \nabla_h) b = \vec{H} \cdot \nabla_h a, \end{cases}$$

par suite de  $\nabla\omega=0$ . Il va sans dire que si les lignes de flux de  $\vec{H}$  peuvent être considérées comme des courbes presque fermées sur la surface du géoïde (nous verrons que tel est le cas), les fonctions  $a(\alpha, \omega, l)$  et  $b(\alpha, \omega, l)$  de (50) présentent des maxima très accentués dans le voisinage immédiat des valeurs de  $\omega_n(\alpha)$  du spectre discontinu (45).

*L'intégrale (50) et, en première approximation, la série de Fourier (46) sont la solution du problème des variations de pression au niveau de la mer, abstraction faite des variations lentes dues au mouvement entretenu (circulation générale). Cette solution, qui peut d'ailleurs être appliquée simplement dans la pratique, permet de déterminer la fonction  $s'_\sigma$  par la relation (28), d'où l'on déduit ensuite la température par la relation (30), c'est-à-dire :*

$$(52) \quad T_\sigma^* = (T_m^*)_\sigma \left[ 1 + \frac{s'_\sigma}{(S_m^*)_\sigma} + \frac{p'_\sigma}{(P_m^*)_\sigma} \right].$$

<sup>1</sup> Sauf dans le cas où  $t=0$  est un point de symétrie de  $p(t)$ .

6. Vibrations propres quand le mouvement entretenu est permanent et giratoire. Considérons l'atmosphère d'une Terre idéale dont la surface est uniforme (sans contrastes entre mers et continents) et où peut exister, par compensation entre les échanges de chaleur par rayonnement et les échanges de chaleur par «conduction de turbulence», une circulation générale ou mouvement entretenu giratoire autour de l'axe des pôles<sup>1</sup>. Dans un mouvement giratoire permanent, chaque particule décrit, à vitesse constante dans le temps mais variable en général avec la latitude et l'altitude, une trajectoire circulaire qui coïncide avec un parallèle géographique. Dans ce cas, le déterminant (5) est évidemment nul, mais son mineur réduit  $\frac{1}{D} \chi_{12}$  a par contre la valeur :

$$(53) \quad \frac{\chi_{12}}{D} = - \frac{1}{2\Omega \sin \varphi - \frac{\partial (V_{\lambda} \cos \varphi)}{\partial \varphi}}$$

en coordonnées sphériques  $\lambda, \varphi$ . D'autre part, le vecteur  $\vec{H}$  est évidemment horizontal et zonal, et n'a donc qu'une composante non nulle :  $H_{\lambda}$ . De la définition (9) de  $\vec{H}$  nous déduisons :

$$(53') \quad H_{\lambda} = \frac{1}{r^2 \cos \varphi} \left( \frac{\chi_{12}}{D} \right) \frac{\partial E}{\partial \varphi},$$

ou bien, en tenant compte de (53) et en remarquant que  $\partial E_g / \partial \varphi = 0$  :

$$(53'') \quad H_{\lambda}(\varphi, r) = - \frac{1}{r^2 \cos \varphi \left[ 2\Omega \sin \varphi - \frac{\partial (V_{\lambda} \cos \varphi)}{\partial \varphi} \right]} \left( R \frac{\partial T}{\partial \varphi} + \frac{1}{2} \frac{\partial V^2}{\partial \varphi} \right).$$

Calculons maintenant le vecteur  $\vec{\Lambda}$  dont les composantes sont données par (35). On a ici :

$$\Lambda_{\varphi} = \frac{RT_m^*}{2r g} \cotg \varphi$$

et  $\Lambda_{\lambda} = 0$ .

L'équation (33) des variations de pression au niveau de la mer devient donc :

$$(54) \quad \frac{\partial p'_{\sigma}}{\partial t} = - H_{\lambda} \frac{\partial p'_{\sigma}}{\partial \lambda} + \Lambda_{\varphi} \frac{\partial^2 p'_{\sigma}}{\partial \varphi \partial t}.$$

<sup>1</sup> Sur la théorie des circulations générales giratoires voir les mémoires de l'auteur : — *Sur les rotations des astres fluides* (Beiträge z. Physik d. fr. Atmosph., 19, 1932, p. 237-245); — *Les circulations générales et leurs perturbations* (Gerlands Beiträge z. Geophysik, 52, 1938, p. 20-67); — *Nouvelles recherches sur les perturbations spontanées du mouvement des fluides avec des applications à l'hydrodynamique solaire* (Troisième partie: *Hydrodynamique solaire*) Bull. Soc. Géograph. Lisbonne, 62, 1944

Considérons une perturbation de la circulation générale giratoire se déplaçant le long d'un parallèle. Si cette perturbation est symétrique on peut supposer que ses isallobares sont tangentes aux méridiens sur la trajectoire du centre et que, plus généralement,  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} \right)$  est négligeable dans une zone relativement large de part et d'autre de la trajectoire du centre. Dans ces conditions, (54) montre qu'il n'y a presque pas de creusement (ou de comblement) dans cette zone, et alors cette équation s'intègre immédiatement et donne :

$$(55) \quad p'_\sigma(\varphi, \lambda, t) = [p'_\sigma]_0 \{ \varphi, \lambda - H_\lambda(\varphi) t \}.$$

L'évolution du champ de pression qui est traduite par cette solution est simplement un transport, le long des parallèles, du champ initial avec la vitesse angulaire  $H_\lambda$  par rapport à la surface de la Terre. A ce transport est cependant associée une déformation « transversale » du champ initial si  $H_\lambda$  est fonction de  $\varphi$ .

Dans l'hémisphère sud, pour  $|\varphi| > 35^\circ$ , abstraction faite du continent antarctique et des pointes méridionales des continents américain, africain et australien, la circulation générale réelle de l'atmosphère se rapproche beaucoup, comme le montrent les cartes moyennes, d'une circulation giratoire quasi permanente. De sorte que les variations de pression dans l'hémisphère sud au niveau de la mer sont presque exactement déterminées par l'équation (54). Si nous considérons donc des perturbations de pression à configuration symétrique et pour lesquelles on peut négliger  $\frac{\partial}{\partial \varphi} \left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} \right)$  dans une certaine zone située de part et d'autre de la trajectoire des centres, alors les variations de pression correspondantes dans cette zone seront intégrées par (55). Quelle que soit d'ailleurs l'importance du terme en  $\frac{\partial^2 p'_\sigma}{\partial \varphi \partial t}$  vis-à-vis du terme en  $\frac{\partial p'_\sigma}{\partial \lambda}$  dans l'équation (54), la solution générale de l'équation (54) sera donnée par la série de Fourier (46), puisque les lignes de flux de  $\vec{H}$  sont ici des courbes fermées (confondues avec les parallèles géographiques). Cette série de Fourier prend d'ailleurs dans ce cas la forme suivante :

$$(56) \quad p'_\sigma(\varphi, \lambda, t) = \sum_1^\infty a_n(\varphi, \lambda) \sin nH_\lambda t + b_n(\varphi, \lambda) \cos nH_\lambda t,$$

puisque :

$$\int_0^{l(\alpha)} \frac{dl}{H(\alpha, l)} = \int_0^{2\pi} \frac{d\lambda}{H_\lambda(\varphi)} = \frac{2\pi}{H_\lambda(\varphi)}$$

Le spectre discontinu (45) des fréquences est donc défini ici par la relation :

$$(57) \quad \omega_n(\varphi) = nH_\lambda(\varphi), \quad n = 1, 2, \dots,$$

et l'on voit que quel que soit le creusement (ou le comblement) du champ de  $p'_\sigma$ , cette fonction est en chaque point une fonction périodique dont la période est  $2\pi/H_\lambda(\varphi)$ . En prenant pour  $H_\lambda$  la valeur  $20^\circ/\text{jour}$  qui correspond à la vitesse normale de translation des perturbations de pression pendant un régime d'ouest bien établi, la période fondamentale  $2\pi/H_\lambda$  est donc de 18 jours et les premiers termes du spectre des périodes seront les suivants :

|                        |    |   |   |     |     |   |     |     |   |     |     |     |
|------------------------|----|---|---|-----|-----|---|-----|-----|---|-----|-----|-----|
| $n$                    | 1  | 2 | 3 | 4   | 5   | 6 | 7   | 8   | 9 | 10  | 11  | 12  |
| $\tau_n(\text{jours})$ | 18 | 9 | 6 | 4,5 | 3,6 | 3 | 2,6 | 2,2 | 2 | 1,8 | 1,6 | 1,5 |

*Remarque.* Dans la détermination des coefficients  $H_\lambda$  et  $\Lambda_\varphi$  de l'équation (54) des variations de pression au niveau de la mer pour une circulation générale permanente et giratoire, nous n'avons pas tenu compte de la condition d'adhérence du fluide à la surface ( $\sigma$ ) du géoïde, condition que nous avons utilisée cependant dans la déduction de l'équation fondamentale (33). La raison de ceci est simplement que les fonctions  $|H|$  et  $|\Lambda|$  calculées par leurs expressions (9) et (35) en fonction de  $\vec{V}$  et de  $E$  sont maxima sur la surface  $\sigma$  et il est donc pratiquement indifférent de déterminer leurs valeurs sur  $\sigma$  même ou à quelques mètres au dessus de cette surface. Cette remarque sera appliquée dans le § suivant.

7. Détermination des vecteurs de prévision  $\vec{H}$  et  $\vec{\Lambda}$ . Les expressions (9) et (35) définissent ces vecteurs en fonction des champs entretenus de vitesse ( $\vec{V}$ ) et d'énergie ( $E$ ). Il est donc indispensable de déterminer ces grandeurs. Comme elles sont inaccessibles à l'observation directe à cause de l'existence des perturbations, il faut éliminer celles-ci par une certaine opération analytique. Nous admettrons que l'opération de moyenne temporelle (2), appliquée à une grandeur  $U^*$  quelconque, élimine la perturbation de cette grandeur et donne donc sa valeur entretenue  $U$ , lorsque l'intervalle de temps  $\tau$  est suffisamment grand. En faisant abstraction des faibles variations du champ entretenu pendant l'intervalle  $\tau$ , nous poserons donc :

$$(58) \quad U_m^* \cong U_m \cong U(t)$$



et ceci entraîne d'ailleurs  $u' \cong u$ , ce qui est en accord avec la solution générale (46) ou (50) de l'équation (33). Nous aurons alors

$$D = D_m^* ; \quad \chi = \chi_m^* ; \quad E = E_m^* ,$$

$D_m^*$  étant le déterminant obtenu, à partir de (5), en remplaçant  $\vec{V}$  par  $\vec{V}_m^*$ ,  $\chi_m^*$  la dyade des cofacteurs (mineurs signés) de ce déterminant et  $E_m^*$  la fonction:  $(SP)_m^* + \frac{1}{2} V_m^{*2} + E_g$ . Le vecteur de prévision  $\vec{H}$  sera donc donné par :

$$\vec{H} = \frac{1}{D} \chi_m^* \cdot \nabla E_m^* .$$

Quand on étudie les phénomènes à la surface du géoïde (niveau de la mer), il est inutile de se servir du déterminant (5). Par suite de la condition cinématique  $(V_\zeta) = 0$  sur la surface  $\sigma$ , on peut en effet remplacer ce déterminant par le déterminant

$$D_h = \begin{vmatrix} \frac{\partial V_x}{\partial x} & \frac{\partial V_x}{\partial y} - 2\Omega \sin \varphi \\ \frac{\partial V_y}{\partial x} + 2\Omega \sin \varphi & \frac{\partial V_y}{\partial y} \end{vmatrix} ,$$

des équations du mouvement, écrites en tenant compte de cette condition cinématique. Nous avons donc :

$$(59) \quad D_h \cong (D_m^*)_h = \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{\partial V_y}{\partial y} - \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - 2\Omega \sin \varphi \right) \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + 2\Omega \sin \varphi \right) ,$$

$x, y$  désignant ici des coordonnées orthogonales et horizontales en un point de la surface  $\sigma$ . A ce déterminant  $D_h$  correspond un vecteur de prévision horizontal :

$$(60) \quad \begin{cases} H_x = -\frac{1}{D_h} \left( \frac{\partial V_y}{\partial x} + 2\Omega \sin \varphi \right) \frac{\partial E}{\partial y} + \frac{1}{D_h} \frac{\partial V_y}{\partial y} \frac{\partial E}{\partial x} , \\ H_y = -\frac{1}{D_h} \left( \frac{\partial V_x}{\partial y} - 2\Omega \sin \varphi \right) \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{1}{D_h} \frac{\partial V_x}{\partial x} \frac{\partial E}{\partial y} . \end{cases}$$

Désignons par  $\Lambda_e$  et  $\Lambda_N$  les composantes du vecteur horizontal  $\vec{\Lambda}$  respectivement vers l'est et vers le nord. Comme on a  $\Omega_e = 0$ , on déduit de (35) en tenant compte des valeurs des  $\chi_{ij}$  :

$$(61) \quad \begin{cases} \Lambda_e = \frac{RT_m}{g} \frac{\Omega \cos \varphi}{D_h} \frac{\partial V_N}{\partial N} , \\ \Lambda_N = -\frac{RT_m}{g} \frac{\Omega \cos \varphi}{D_h} \left( \frac{\partial V_e}{\partial N} - 2\Omega \sin \varphi \right) , \end{cases}$$

le déterminant  $D_h$  ayant ici l'expression :

$$(62) \quad D_h = \left( \frac{\partial V_e}{\partial e} + \frac{V_N}{r} \operatorname{tg} \varphi \right) \frac{\partial V_N}{\partial N} - \left( \frac{\partial V_N}{\partial e} + 2\Omega \sin \varphi \right) \left( \frac{\partial V_e}{\partial N} - 2\Omega \sin \varphi \right)$$

et  $de$  et  $dN$  étant des déplacements infinitésimaux veers l'est et vers le nord.

Considérons les régions où toutes les dérivées spatiales horizontales du premier ordre des composantes de la vitesse entretenue  $\vec{V}$  sont négligeables vis-à-vis de  $2\Omega \sin \varphi$ . (Pour  $|\varphi| > 20^\circ$  on peut considérer que cette condition est satisfaite quand l'ordre de grandeur de ces dérivées spatiales n'atteint pas  $10^{-4} \text{ sec}^{-1}$ ). Dans ces régions, on a  $D_h \cong 4\Omega^2 \sin^2 \varphi$  et les expressions des composantes de  $\vec{H}$  se simplifient beaucoup. On obtient :

$$(63) \quad \vec{H} \cong - \frac{1}{2\Omega \sin \varphi} (\nabla_h E) \times \vec{k}_z,$$

$\vec{k}_z$  étant le vecteur unitaire de la verticale ascendante d'un point. Le vecteur  $\vec{H}$  est donc, dans les régions en question, le « vent » du gradient de l'énergie hydromécanique  $E \cong E_m^*$  du mouvement entretenu.

Le théorème de Bernoulli, appliqué à un mouvement permanent horizontal, donne l'équation des lignes de flux de  $\vec{V}$ :

$$\int S dP + \frac{1}{2} V^2 = \text{Constante}$$

(cette constante variant en général d'une ligne de flux à une autre ligne de flux). Dans les mêmes conditions restrictives qui permettent de déduire (63) de (9), le mouvement entretenu permanent est un mouvement géostrophique (vent horizontal du gradient) ou, plus généralement, un mouvement cyclostrophique. L'expression du théorème de Bernoulli devient alors :

$$V = \text{Constante sur une isobare.}$$

D'autre part on aura :

$$\frac{1}{2} V^2 = \rho_i^2 \Omega^2 \sin^2 \varphi \left( 1 \pm \frac{V_G}{\rho_i \Omega \sin \varphi} - \sqrt{1 \pm \frac{2V_G}{\rho_i \Omega \sin \varphi}} \right),$$

avec :

$$\lim_{\rho_i \rightarrow \infty} V \equiv V_G = \frac{S}{2\Omega \sin \varphi} \left| \frac{\partial P}{\partial n} \right|,$$

d'après l'équation du mouvement. Dans ces relations  $n$  est la normale

horizontale aux isobares en un point et  $\rho_i$  le rayon de courbure des isobares. (Le signe + correspond aux isobares cycloniques et le signe - aux isobares anticycloniques). De (63) on déduit donc :

$$(64) \quad \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2,$$

avec :

$$(65) \quad \left\{ \begin{array}{l} \vec{H}_1 = -\frac{R}{2\Omega \sin \varphi} (\nabla_h T) \times \vec{k}_z, \\ \vec{H}_2 = -\frac{1}{4\Omega \sin \varphi} (\nabla_h V^2) \times \vec{k}_z \cong \\ -\frac{1}{2\Omega \sin \varphi} \nabla_h \left\{ \rho_i^2 \Omega^2 \sin^2 \varphi \left( 1 \pm \frac{V_G}{\rho_i \Omega \sin \varphi} - \sqrt{1 \pm \frac{2V_G}{\rho_i \Omega \sin \varphi}} \right) \right\} \times \vec{k}_z. \end{array} \right.$$

Le vecteur  $\vec{H}_1$  est le «vent» du gradient de la température, tandis que  $\vec{H}_2$  est le «vent» du gradient de l'énergie cinétique. Les lignes de flux de  $\vec{H}_2$  sont confondues avec les isobares du mouvement entretenu ; la direction de ce vecteur est celle du vent entretenu du gradient si  $(\nabla V) \cdot \nabla P > 0$  et inversement.

Il est intéressant de remarquer que si les conditions qui permettent de déduire (63) de (9) étaient satisfaites sur toute la surface de la Terre, les lignes de flux du vecteur  $\vec{H}$  seraient des courbes fermées, de sorte que la série de Fourier (46) représenterait alors la solution rigoureuse du problème des variations de pression, lorsque le champ entretenu est permanent. [La condition la plus générale pour que les lignes de flux de  $\vec{H}$  puissent être considérées comme des courbes fermées est d'ailleurs moins restrictive que les conditions qui permettent d'écrire (63). Il suffit en effet, d'après (60), que  $\partial V_x / \partial x$  et  $\partial V_y / \partial y$  soient négligeables par rapport à  $2\Omega \sin \varphi$ , tandis que  $\partial V_x / \partial y$  et  $\partial V_y / \partial x$  peuvent avoir des valeurs quelconques].

Dans les régions où l'expression (63) de  $\vec{H}$  est valable, c'est-à-dire là où ce vecteur est, en première approximation (au 1/10 près), le «vent» du gradient de l'énergie entretenu, le terme de creusement (ou de comblement)  $\vec{\Lambda} \cdot \nabla_h \left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} \right)$  de l'équation fondamentale (33) est normal. Les expressions (61) montrent en effet que le vecteur  $\vec{\Lambda}$  ne dépasse pas alors l'ordre de grandeur  $10^5$  mètres, car  $\bar{g} \cong 10^{-2} g$ ; d'autre part,  $\nabla_h \left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} \right)$  a l'ordre de grandeur normal  $10^{-10}$  cbar. mètre<sup>-1</sup>. sec<sup>-1</sup>., ce qui donne pour le creusement (ou le comblement) l'ordre de grandeur

$10^{-5}$  cbar. sec<sup>-1</sup>, tandis que le creusement (ou le comblement) des perturbations à évolution rapide a l'ordre de grandeur  $10^{-4}$  cbar sec<sup>-1</sup>, c'est-à-dire 10 millibar/3 heures. Pour que le vecteur  $\vec{\Lambda}$  ait l'ordre de grandeur  $10^6$  mètres qui donne le creusement et le comblement rapides, il faut que  $D_h$  ne dépasse pas l'ordre de grandeur  $10^{-9}$  sec<sup>-2</sup>. D'après (62), ceci ne peut avoir lieu que si les dérivées spatiales horizontales de  $\vec{V}$  sont de l'ordre de grandeur de  $2\Omega \sin \varphi$ , c'est-à-dire  $10^{-4}$  sec<sup>-1</sup>. D'après (60) les régions où ceci a lieu, et qui sont celles où il peut y avoir un creusement (ou un comblement) rapide des perturbations, sont aussi celles où le vecteur  $\vec{H}$  diffère beaucoup du «vent» du gradient de l'énergie entretenue. Les mêmes expressions (60), comparées à (61), montrent aussi que les lignes de flux de  $\vec{H}$  qui traversent les régions de creusement (ou de comblement) rapide ne peuvent pas être considérées comme des courbes fermées, même en première approximation. Pour les points situés dans ces zones de creusement (ou de comblement) la solution de l'équation (33) des variations de pression est l'intégrale de Fourier (50), ou bien la série (37) des approximations successives; tandis que pour les points où passent des lignes de flux de  $\vec{H}$  qui ne traversent pas les zones de creusement (ou de comblement) rapide on peut se borner à la série de Fourier (46).

Dans la pratique, pour déterminer les vecteurs  $\vec{H}$  et  $\vec{\Lambda}$ , on commence naturellement par le tracé des cartes des pressions moyennes au niveau de la mer  $(P_m^*)_\sigma$  et des températures moyennes au niveau de la mer  $(T_m^*)_\sigma$ , pendant un intervalle de temps  $\tau = t_0 - t_1$  dans le passé contigu à l'instant initial  $t_0$  et de l'ordre de grandeur de 10 jours, pour éliminer les perturbations. A l'aide du champ de  $(P_m^*)_\sigma$  et de la relation  $P_\sigma(t) \cong (P_m^*)_\sigma$ , cas particulier de (58), on détermine le vent entretenue par la formule classique du vent cyclostrophique (complétée au besoin par un terme de frottement), d'où l'on déduit l'énergie cinétique entretenue par unité de volume  $\frac{1}{2}V^2$ . On calcule ensuite la fonction

$E_\sigma = R(T_m^*)_\sigma + \frac{1}{2}V_\sigma^2$  ainsi que les composantes  $\frac{\partial E}{\partial e}$  et  $\frac{\partial E}{\partial N}$  de son gra-

dient horizontal. Connaissant les composantes  $V_e$  et  $V_N$  du vent entretenue, on en déduit les quatre dérivées partielles  $\frac{\partial V_e}{\partial e}$ ,  $\frac{\partial V_e}{\partial N}$ ,  $\frac{\partial V_N}{\partial e}$  et  $\frac{\partial V_N}{\partial N}$ , ce qui permet de calculer immédiatement la valeur du déter-

minant  $D_h$  par l'expression (62). On a ainsi tous les éléments pour le

calcul des composantes  $H_e$ ,  $H_N$ ,  $\Lambda_e$  et  $\Lambda_N$  des vecteurs  $\vec{H}$  et  $\vec{\Lambda}$  par les expressions (60) et (61).

Il sera utile aussi, comme nous le verrons dans le § suivant, de tracer la carte des courbes de niveau de la fonction  $\vec{\Lambda} \cdot \vec{H}$  et celle des courbes de niveau de la fonction :

$$|\vec{\Lambda}| = \frac{R(T_m^*)_{\sigma} \Omega \cos \varphi}{g D_h} \sqrt{\left(\frac{\partial V_e}{\partial N} - 2\Omega \sin \varphi\right)^2 + \left(\frac{\partial V_N}{\partial N}\right)^2},$$

puisque d'une part c'est en quelque sorte  $\vec{\Lambda}$  qui représente la contribution du champ entretenu au creusement (ou au comblement) des perturbations, et nous verrons d'autre part plus loin que  $\vec{\Lambda} \cdot \vec{H}$  est, à un facteur près, le creusement (ou le comblement) intrinsèque des perturbations circulaires.

**8. Les vecteurs de prévision  $\vec{H}$  et  $\vec{\Lambda}$  et la climatologie dynamique.** Nous entendons ici par climatologie dynamique la branche de la météorologie qui a pour but la recherche des relations qui existent entre les valeurs moyennes (normales annuelles, moyennes mensuelles normales, etc.) des éléments principaux ( $I^*$ ,  $T^*$ ,  $V^*$ ) et les propriétés moyennes des perturbations atmosphériques (trajectoires moyennes, zones de naissance et de disparition privilégiées des perturbations, etc.) dans les différentes régions du globe.

L'importance des vecteurs  $\vec{H}$  et  $\vec{\Lambda}$  est décisive dans cette climatologie dynamique, comme nous allons le voir. Donnons-nous par exemple le champ des moyennes normales de la pression et de la température (au niveau de la mer) et du vent pour un certain mois de l'année. On peut en déduire, comme il a été expliqué dans le § précédent, les vecteurs moyens  $\vec{H}_m$  et  $\vec{\Lambda}_m$  correspondants. L'évolution des perturbations ( $p'_\sigma$ ) de pression de ce champ entretenu moyen sera donnée évidemment par l'équation (33). Considérons alors une perturbation «normale» dont le creusement (ou le comblement) est constamment un extrémum au centre. La trajectoire d'une telle perturbation est évidemment indépendante de son creusement (ou de son comblement). Or, l'équation (33) montre immédiatement que la trajectoire d'une perturbation sans creusement ou comblement est une ligne de flux de  $\vec{H}$  (la vitesse du centre étant égale à  $\vec{H}$ ), puisque l'intégrale générale de (33), sans le terme en  $\vec{\Lambda}$ , s'écrit simplement :

$$p'_\sigma(l_0, \alpha_0, t) = (p'_\sigma)_0 \{l_0, \alpha_0\},$$

en coordonnées lagrangiennes  $l_0, \alpha_0$  (coordonnées initiales des «parti-

cules  $\vec{H}$ », voir § 5, A). On voit donc que les «trajectoires moyennes» des perturbations «normales» sont les lignes de flux du vecteur  $\vec{H}$  moyen (la vitesse du centre étant égale à  $\vec{H}$ ).

Envisageons ensuite des «tourbillons circulaires», c'est-à-dire des perturbations dont le champ de  $p'_\sigma$  est constitué par des isobares circulaires. Ces perturbations appartiennent évidemment à la classe des perturbations «normales» définie ci-dessus, et la vitesse  $\vec{W}$  de déplacement de leur centre est donnée par la formule :

$$(66) \quad \vec{W} = - \left( \frac{\partial^2 p'_\sigma}{\partial \varphi^2} \right)_c^{-1} \nabla_h \left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} \right)_c,$$

$\varphi$  étant une longueur mesurée sur un rayon horizontal de la perturbation et l'indice  $c$  indiquant les valeurs au centre. L'équation (33), appliquée au centre de ces perturbations, prend alors la forme :

$$\left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} \right)_c = - \left( \frac{\partial^2 p'_\sigma}{\partial \varphi^2} \right)_c \vec{\Lambda} \cdot \vec{W}.$$

Mais nous savons que la vitesse de déplacement du centre d'une perturbation normale est égale à  $\vec{H}$ , c'est-à-dire  $\vec{W} = \vec{H}$ .

Donc :

$$(67) \quad \left( \frac{\partial p'_\sigma}{\partial t} \right)_c = - \left( \frac{\partial^2 p'_\sigma}{\partial \varphi^2} \right)_c \vec{\Lambda} \cdot \vec{H},$$

pour les perturbations circulaires («tourbillons» circulaires). Cette équation montre que la contribution du champ entretenu au creusement (ou au comblement) du centre des perturbations circulaires est le produit scalaire des vecteurs  $\vec{H}$  et  $\vec{\Lambda}$ .

Le voisinage immédiat du centre d'une perturbation quelconque de  $p'_\sigma$  présente toujours, en première approximation, les caractères d'une perturbation circulaire; d'autre part, c'est évidemment une perturbation circulaire qui représente le mieux le voisinage immédiat du centre de la «perturbation moyenne» de  $p'_\sigma$  qu'on peut imaginer superposée à un mouvement entretenu moyen pour étudier la climatologie dynamique d'une région. C'est donc l'équation (67) qu'il faut utiliser en climatologie dynamique et cette équation montre que les zones privilégiées de naissance et de creusement des perturbations (foyers de cyclones) pour un champ entretenu moyen sont les zones où l'on a  $\vec{\Lambda} \cdot \vec{H} > 0$ , et les zones privilégiées ou foyers de comblement et de disparition des perturbations sont celles où, par contre,  $\vec{\Lambda} \cdot \vec{H} < 0$ .

Pour étudier la climatologie dynamique, il faut donc tracer, à côté des lignes de flux de  $\vec{H}$  moyen (qui donnent les trajectoires moyennes des perturbations), les courbes de niveau de la fonction  $\vec{\Lambda} \cdot \vec{H}$ .

Considérons finalement les rapports entre les trajectoires moyennes des perturbations en dehors des zones privilégiées de creusement et de comblement et les champs moyens de pression et de température. Le vecteur  $\vec{H}$ , en dehors de ces foyers de creusement et de comblement, est donné, en première approximation, par (63), de sorte que les trajectoires moyennes des perturbations coïncident, dans ces régions, avec les courbes de niveau de l'énergie hydromécanique  $E$  du mouvement entretenu moyen. On peut poser d'ailleurs  $\vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$ , avec les valeurs (65) pour les vecteurs  $\vec{H}_1$  et  $\vec{H}_2$ . Le vecteur  $\vec{H}_1$  («vent» du gradient de la température) est prédominant dans les zones extratropicales où les variations spatiales de la température l'emportent presque partout sur celles de l'énergie cinétique. On peut donc dire que les trajectoires moyennes des perturbations de  $p'_\sigma$  dans les régions extratropicales, et en dehors des foyers de creusement et de comblement, coïncident, en première approximation, avec les isothermes moyennes.

Dans les régions tropicales les variations spatiales de la température moyenne sont presque partout très faibles mais il peut y avoir d'importantes variations spatiales de l'énergie cinétique moyenne. Le vecteur  $\vec{H}_2$  («vent» du gradient de l'énergie cinétique entretenue) sera donc en général prépondérant et comme ce vecteur est tangent aux isobares entretenues, on voit que les trajectoires moyennes des perturbations de  $p'_\sigma$  dans les régions intertropicales (cyclones tropicaux), en dehors des foyers de naissance et de creusement, coïncident, en première approximation, avec les isobares moyennes. Ces résultats sont en parfait accord avec des faits bien connus en météorologie empirique.

9. Solution générale des équations (22) des perturbations. La solution de ce système peut être cherchée par une méthode d'approximations successives qui est la généralisation naturelle de la méthode utilisée pour résoudre l'équation (33) du champ de  $p'_\sigma$  (Voir § 5, A). Nous poserons donc :

$$(68) \quad \begin{cases} p' = \sum_0^{\infty} \pi_n \\ \vec{v}' = \sum_0^{\infty} \vec{w}_n \\ s' = \sum_0^{\infty} \zeta_n \end{cases}$$

et définissons les approximations successives par les systèmes :

$$(69) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \pi_n}{\partial t} + \vec{H} \cdot \nabla_h \pi_n = -P_m^* \operatorname{div} \vec{w}_{n-1}, \\ \vec{w}_n = -S_m^* \nabla \pi_n \cdot \frac{\chi}{D} + \frac{\zeta_n}{S_m^*} \left( \vec{V}_m^* - \vec{g} \cdot \frac{\chi}{D} \right), \\ \frac{\partial \zeta_n}{\partial t} + \vec{V}_m^* \cdot \nabla \zeta_n + \vec{w}_n \cdot \nabla S_m^* + \vec{w}_n \cdot \nabla \zeta_n + \\ + \sum_0^{n-1} \vec{w}_i \cdot \nabla \zeta_n + \vec{w}_n \cdot \nabla \sum_0^{n-1} \zeta_i = S_m^* \operatorname{div} \vec{w}_{n-1}, \end{array} \right.$$

et par les conditions suivantes :

1° — conditions initiales :

$$(70) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_0(x, y, z, t = t_0) = p_0^l(x, y, z), \\ \zeta_0(x, y, z, t = t_0) = s_0^l(x, y, z), \\ \vec{w}_0(x, y, z, t = t_0) = \vec{v}_0^l(x, y, z); \end{array} \right.$$

$$(71) \quad \left\{ \begin{array}{l} \pi_n(x, y, z, t = t_0) = 0, \\ \zeta_n(x, y, z, t = t_0) = 0, \\ \vec{w}_n(x, y, z, t = t_0) = 0, \end{array} \right. \quad \text{pour } n \geq 1.$$

2° — conditions aux limites : a) — conditions aux limites extérieures de l'atmosphère :

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lim_{r \rightarrow \infty} \pi_n = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \zeta_n = 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} \vec{w}_n = 0. \end{array} \right.$$

b) — conditions aux limites sur la surface  $\sigma$  du géoïde. La condition cinématique aux limites est traduite par la relation (28) et l'on doit avoir ici, puisque  $[(w_n)_\zeta]_\sigma = 0$  :

$$(73) \quad (S_m^*)_\sigma \nabla_h (\pi_n)_\sigma \cdot \chi_\sigma + 2\bar{g} (\chi_{\zeta\zeta})_\sigma \frac{(\zeta_n)_\sigma}{(S_m^*)_\sigma} = 0, \quad \text{pour } n = 0, 1, 2, \dots$$

La première équation de (69) s'intègre immédiatement et donne, en coordonnées lagrangiennes :

$$(74) \quad \pi_n(l_0, \alpha_0, \eta_0, t) = (\pi_n)_0(l_0, \alpha_0, \eta_0) - \int_{t_0}^t P_m^* \operatorname{div} \vec{w}_{n-1} \delta t,$$



( $\alpha$  est ici le paramètre continu d'une famille quelconque de « surfaces de flux » de  $\vec{H}$  horizontal,  $l$  le paramètre continu d'une famille de surfaces orthogonales aux premières, et  $\eta$  le géopotentiel. On a donc :

$$\begin{cases} l = l_0 + \int_{t_0}^t H_l(l_0, \alpha_0, \eta_0, t) \delta t \\ \alpha = \alpha_0, \\ \eta = \eta_0, \end{cases}$$

d'où l'on déduit

$$\begin{cases} l_0 = l_0(l, \alpha, \eta, t), \\ \alpha_0 = \alpha, \\ \eta_0 = \eta. \end{cases}$$

Ces fonctions, introduites dans (74), donnent les  $\pi_n$  en coordonnées eulériennes  $l, \alpha, \eta, t$  :

$$(74') \quad \pi_n(l, \alpha, \eta, t) = (\pi_n)_0[l_0(l, \alpha, \eta, t); \alpha; \eta] - \int_{t_0}^t P_m^* [l_0(l, \alpha, \eta, t); \alpha; \eta; t] \times \\ \times (\text{div } \vec{w}_{n-1}) [l_0(l, \alpha, \eta, t); \alpha; \eta; t] dt.$$

Ces solutions satisfont aux conditions initiales (70) et (71), puisqu'on a d'une part  $(\pi_0)_0 = p'_0$  et d'autre part  $(\pi_n)_0 = 0$  pour  $n \geq 1$ . Les conditions aux limites extérieures (72) sont satisfaites aussi par suite de  $\lim_{r \rightarrow \infty} (\pi_n)_0 = 0$  et de  $\lim_{r \rightarrow \infty} P_m^* = 0$ . Quant à la condition cinématique sur  $\sigma$ , nous verrons un peu plus loin qu'elle est également satisfaite.

Définissons les opérateurs suivants :

$$(75) \quad \frac{d_n \epsilon_n}{d_n t} = \frac{\partial}{\partial t} + (\vec{V}_m^* - S_m^* \nabla \pi_n \cdot \frac{\chi}{D} + \sum_0^{n-1} \vec{w}_i) \cdot \nabla.$$

Les troisièmes équations des systèmes (69) s'écrivent alors comme suit, en tenant compte des deuxièmes équations :

$$(76) \quad \frac{d_n \epsilon_n}{d_n t} + \frac{1}{S_m^*} \left[ \left( \vec{V}_m^* - \vec{g} \cdot \frac{\chi}{D} \right) \cdot \nabla (S_m^* + \sum_0^{n-1} \epsilon_i) \right] \epsilon_n + \\ + \frac{1}{2 S_m^*} \left( \vec{V}_m^* - \vec{g} \cdot \frac{\chi}{D} \right) \cdot \nabla \epsilon_n^2 = S_m^* \text{div } \vec{w}_{n-1} + \\ + S_m^* \left( \nabla \pi_n \cdot \frac{\chi}{D} \right) \cdot \nabla (S_m^* + \sum_0^{n-1} \epsilon_i).$$

Soient :

$$(77) \quad \epsilon_n(\varphi, \lambda, \eta, t)$$

les solutions de ces équations qui satisfont aux conditions initiales (70) ou (71), à la condition cinématique (73) et aux conditions aux limites extérieures (71). Ces fonctions et les fonctions (74)<sup>1</sup>, introduites dans les deuxièmes équations de (69), donnent alors les approximations successives  $\vec{w}_n$  de la perturbation de la vitesse qui satisfont à toutes les conditions initiales et aux limites requises, puisque les  $\pi_n$  et les  $\zeta_n$  satisfont à ces conditions. La seule difficulté de la méthode d'approximations successives provient donc du terme non linéaire  $\nabla \zeta_n^2$  des équations (76). Pour lever cette difficulté, nous poserons, dans ces termes non linéaires :

$$(78) \quad \zeta_n(\varphi, \lambda, \eta, t) = e^{-a\eta} [\zeta_n]_{\sigma}(\varphi, \lambda, t) + \mu_n(\varphi, \lambda, \eta, t),$$

$a$  étant une constante et les  $\mu_n$  des fonctions qui satisfont aux conditions aux limites  $(\mu_n)_{\sigma} = 0, \lim_{r \rightarrow \infty} \mu_n = 0$  et initiales :  $(\mu_n)_{t=t_0} = 0$  pour  $n \geq 1$  et  $(\mu_0)_{t=t_0} = s'_0(\varphi, \lambda, \eta) - e^{-a\eta}(s'_0)_{\sigma}$ . Ces fonctions (78) satisfont donc à toutes les conditions initiales et aux limites du problème, puisque les  $(\zeta_n)_{\sigma}$  sont déterminés en fonction des  $\pi_n$  [donnés par (74<sup>1</sup>)] au moyen de la condition aux limites sur  $\sigma$  (73).

Admettons que les  $\mu_n$  sont des petites quantités telles qu'on peut négliger, vis-à-vis de  $\nabla[e^{-2a\eta}(\zeta_n)_{\sigma}^2]$ , les vecteurs  $\nabla \mu_n^2$  et  $\nabla[e^{-a\eta} \mu_n (\zeta_n)_{\sigma}^2]$ . Une telle condition est vérifiée a priori dans la voisinage de  $\sigma$ , mais nous admettrons qu'il en est de même dans toute l'épaisseur de l'atmosphère. En posant :

$$(79) \quad f_n = S_m^* \operatorname{div} \vec{w}_{n-1} + S_m^* \left( \nabla \pi_n \cdot \frac{\chi}{D} \right) \cdot \nabla \left( S_m^* + \sum_0^{n-1} \zeta_i \right) - \\ - \frac{e^{-2a\eta}}{2S_m^*} \left( \vec{V}_m^* - \vec{g} \cdot \frac{\chi}{D} \right) \cdot [\nabla_h (\zeta_n)_{\sigma}^2 - 2a (\zeta_n)_{\sigma}^2 \vec{k}_r]$$

les équations (76) deviennent alors :

$$(80) \quad \frac{d_n \zeta_n}{d_n t} + \frac{1}{S_m^*} \left[ \left( \vec{V}_m^* - \vec{g} \cdot \frac{\chi}{D} \right) \cdot \nabla \left( S_m^* + \sum_0^{n-1} \zeta_i \right) \right] \zeta_n = f_n(x_n^0, y_n^0, z_n^0, t),$$

$x_n^0, y_n^0, z_n^0, t$  désignant les coordonnées lagrangiennes qui correspondent aux opérateurs  $d_n/d_n t$ , définis par (75). Ce sont donc les coordonnées cartésiennes rectangulaires initiales de particules fictives se déplaçant

<sup>1</sup> On voit maintenant que les  $\pi_n$  satisfont aux conditions (73) si l'on contraint les  $\zeta_n$  à y satisfaire.

en chaque point et à tout instant avec la vitesse

$$\vec{V}_m^* - S_m^* \nabla \pi_n \cdot \frac{\chi}{D} + \sum_0^{n-1} \vec{w}_i.$$

Remarquons que les  $f_n$  sont, d'après leur définition (79), des fonctions connues, puisque les  $(\zeta_n)_\sigma$  sont déterminés par la condition (73), en fonction des  $\pi_n$ .

L'intégrale générale de (80) s'écrit alors :

$$(81) \quad \zeta_n(x_n^0, y_n^0, z_n^0, t) = \left\{ \int_{t_0}^t e^{f \xi(x_n^0, y_n^0, z_n^0, t)} d_n t f_n(x_n^0, y_n^0, z_n^0, t) d_n t + \right. \\ \left. + (\zeta_n)_0 [x_n^0, y_n^0, z_n^0] \right\} e^{-f t_0 \xi(x_n^0, y_n^0, z_n^0, t)} d_n t,$$

avec :

$$\xi(x_n^0, y_n^0, z_n^0, t) = \frac{1}{S_m^*} \left[ \left( \vec{V}_m^* - \vec{g} \cdot \frac{\chi}{D} \right) \cdot \nabla \left( S_m^* + \sum_0^{n-1} \zeta_i \right) \right].$$

Il est essentiel de ne pas oublier que l'opération  $\int_{t_0}^t d_n t$  se rapporte évidemment aux particules fictives qui se déplacent à la vitesse

$$\vec{V}_m^* - S_m^* \nabla \pi_n \cdot \frac{\chi}{D} + \sum_0^{n-1} \vec{w}_i.$$

Les solutions (81) satisfont évidemment aux conditions initiales [(70) ou (71)], ainsi qu'à la condition aux limites extérieures, puisque  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} (\zeta_n)_0 = 0$  et d'autre part (79) montre que  $\lim_{\eta \rightarrow \infty} f_n = 0$ . De plus, ces solutions satisfont évidemment aussi à la condition cinématique (73) sur la surface  $\sigma$  du géoïde dans la mesure où l'hypothèse introduite ci-dessus sur les  $\mu_n$  est vérifiée.

Pour passer de la solution (81) de  $\zeta_n$  en coordonnées «lagrangiennes»  $x_n^0, y_n^0, z_n^0, t$  aux solutions correspondantes en coordonnées eulériennes ( $\varphi, \lambda, \eta, t$  par exemple), on a les relations :

$$x_n = x_n^0 + \int_{t_0}^t \left[ \vec{V}_m^* - S_m^* \nabla \pi_n \cdot \frac{\chi}{D} + \sum_0^{n-1} \vec{w}_i \right]_x (x_n^0, y_n^0, z_n^0, t) d_n t, \\ y_n = y_n^0 + \int_{t_0}^t \left[ \vec{V}_m^* - S_m^* \nabla \pi_n \cdot \frac{\chi}{D} + \sum_0^{n-1} \vec{w}_i \right]_y (x_n^0, y_n^0, z_n^0, t) d_n t, \\ z_n = z_n^0 + \int_{t_0}^t \left[ \vec{V}_m^* - S_m^* \nabla \pi_n \cdot \frac{\chi}{D} + \sum_0^{n-1} \vec{w}_i \right]_z (x_n^0, y_n^0, z_n^0, t) d_n t,$$

d'où l'on déduit :

$$\begin{cases} x_n^0 = x_n^0(x, y, z, t) = x_n^0[\varphi(\varphi, \lambda, \eta); y(\varphi, \lambda, \eta); z(\varphi, \lambda, \eta); t] \\ y_n^0 = y_n^0(x, y, z, t) = y_n^0[\varphi(\varphi, \lambda, \eta); y(\varphi, \lambda, \eta); z(\varphi, \lambda, \eta); t] \\ z_n^0 = z_n^0(x, y, z, t) = z_n^0[\varphi(\varphi, \lambda, \eta); y(\varphi, \lambda, \eta); z(\varphi, \lambda, \eta); t] \end{cases}$$

Ces fonctions, introduites dans les  $\zeta_n(x_n^0, y_n^0, z_n^0, t)$  donnent les solutions eulériennes correspondantes en coordonnées «géopopentielles»  $\varphi, \lambda, \eta, t$ .

## TABLE DES MATIÈRES

|  |     |
|--|-----|
| 1. Le système d'équations de la théorie des perturbations . . . . .                              | 203 |
| 2. Le problème atmosphérique . . . . .   | 207 |
| 3. Les équations des perturbations atmosphériques . . . . .                                      | 208 |
| 4. Équation spatio-temporelle du champ de pression sur la surface du géoïde . . . . .            | 211 |
| 5. Solution du problème atmosphérique sur la surface du géoïde . . . . .                         | 214 |
| 6. Vibrations propres quand le mouvement entretenu est permanent et giratoire . . . . .          | 220 |
| 7. Détermination des vecteurs de prévision $\vec{H}$ et $\vec{\Lambda}$ . . . . .                | 222 |
| 8. Les vecteurs de prévision $\vec{H}$ et $\vec{\Lambda}$ et la climatologie dynamique . . . . . | 227 |
| 9. Solution générale des équations des perturbations . . . . .                                   | 229 |

## ERRATA

| Pag.                       | ligne | au lieu de                             | lire                  |
|----------------------------|-------|--|-----------------------|
| 204                        | 18    | $\xi$                                  | $\zeta$               |
| Équations                  |       |  |                       |
| (22)                       |       | mettre + avant le terme en $s'$        |                       |
| (27)                       |       | écrire $-(g+2\bar{g})\Psi'$ au lieu de | $-g\Psi'$             |
| (28), (28 bis), (34), (35) |       | remplacer $g$ par                      | $\bar{g}$             |
| (41)                       |       | écrire $\alpha = \alpha_0$ au lieu de  | $\alpha = z$          |
| (42)                       |       | écrire $\alpha_0 = \alpha$ au lieu de  | $\alpha_0 = \alpha_0$ |

## MESURES SUR LES COURBES DE RESONANCE ULTRASONORES DANS DES LIQUIDES

par A. VAN ITTERBEEK et A. DE BOCK \*

(Communication du «Centre d'Etude Scientifique et Technique  
du Froid», Louvain, Belgique)

(Reçu le 15 Avril 1947)

1. Le mode de vibration d'un quartz piézo-électrique dans un liquide est déterminé par l'équation différentielle :

$$(1) \quad M \cdot \frac{d^2 x}{dt^2} + W \cdot \frac{dx}{dt} + G \cdot x = P \cdot \sin \omega t$$

$\omega = 2\pi/T$ ,  $x$  est le déplacement d'un élément de volume quelconque autour de sa position d'équilibre,  $M$  représente un facteur qui dépend de la moitié de la masse du cristal et de celle du liquide accouplé,  $W$  est le facteur de frottement du système cristal-liquide,  $G$  la rigidité et  $P$  l'amplitude d'une force périodique extérieure. Le coefficient d'amortissement du système donnant lieu à un rayonnement dans un sens est exprimé par la formule

$$(2) \quad \delta = \frac{W}{2M} \cdot T.$$

L'amplitude  $R$  des oscillations en fonction de la pulsation  $\omega$ , est donnée par l'équation :

$$(3) \quad R = \frac{P}{\sqrt{(G - M \cdot \omega^2)^2 + W^2 \omega^2}}.$$

En pratique on ne mesure pas l'amplitude  $R$ , mais l'énergie sonore  $E = k \cdot R^2 \cdot \omega^2$  ou  $k$  est un facteur indépendant de la fréquence. Pour

\* Aspirant du Fonds National de la Recherche Scientifique.

l'énergie sonore en fonction de  $\omega$ , on peut établir à partir de l'équation (3), l'expression suivante :

$$(4) \quad E = \frac{k \cdot P^2 \cdot \omega^2}{(G - M \cdot \omega^2)^2 + W^2 \omega^2}$$

La courbe représentant  $E$  en fonction de  $\omega$  est une courbe en cloche qui possède un maximum pour  $\omega = \omega_r$  ( $\omega_r$  étant la pulsation propre du quartz).

Le décrétement logarithmique du système peut être calculé de cette courbe au moyen de l'équation :

$$(5) \quad \delta = \frac{\pi(\omega_r^2 - \omega_1^2)}{\omega_r \cdot \omega_1}$$

$\omega_1$  est la pulsation correspondant à une énergie ultrasonore  $E_1 = E_r/2$  ( $E_r$  = énergie émise à la résonance).

D'autre part il a été établi par BERGMANN [1] que le décrétement logarithmique peut être calculé à partir des propriétés physiques du liquide dans lequel vibre le quartz. Ainsi

$$(6) \quad \delta = 2 \frac{\rho \cdot v}{\rho_0 \cdot v_0}$$

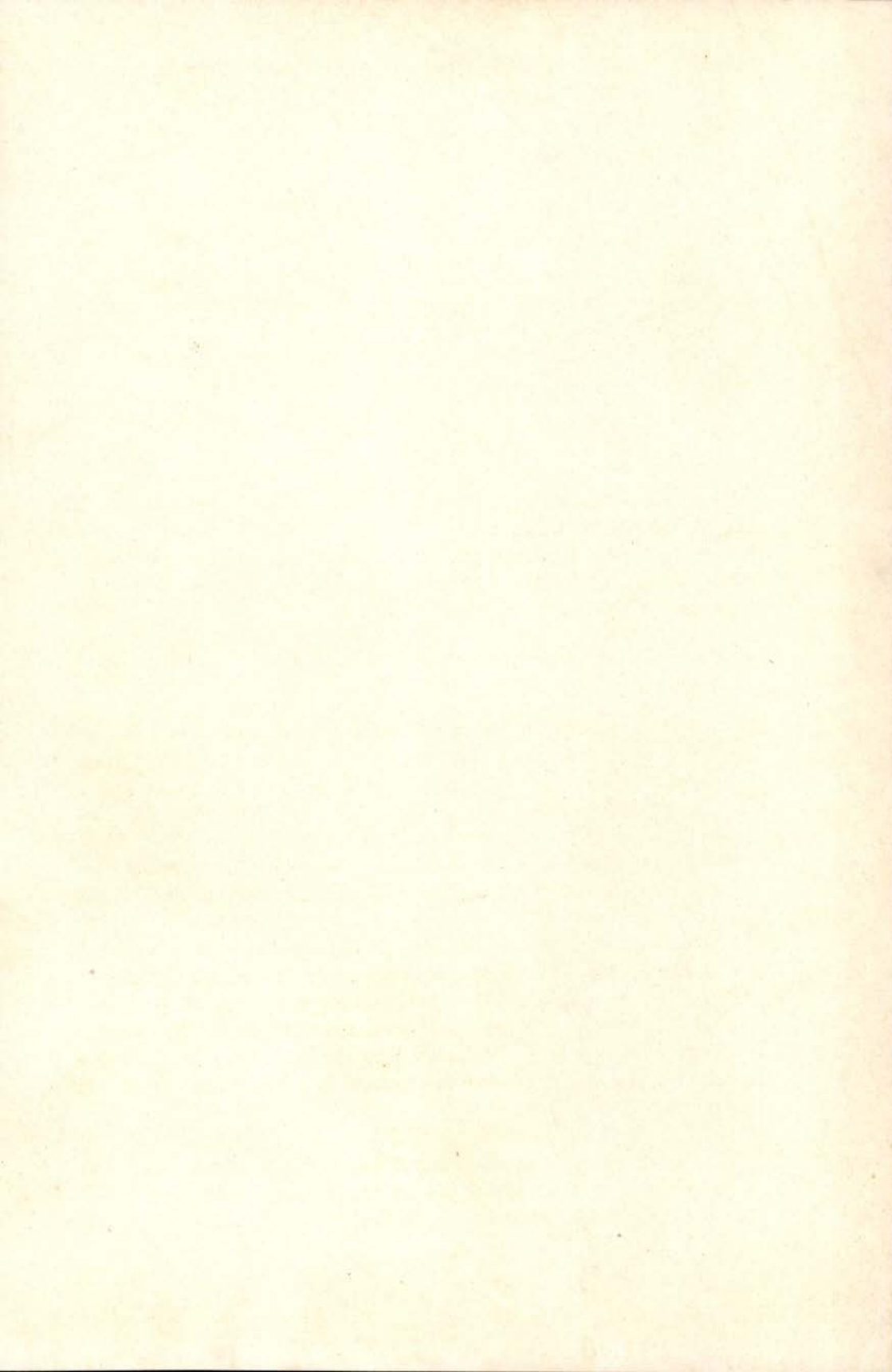
( $\rho$  est la densité du liquide,  $v$  vitesse de propagation du son dans le liquide;  $\rho_0$  et  $v_0$  sont les mêmes valeurs pour le quartz).

On peut donc prévoir qu'en étudiant le mode de vibration d'un quartz dans un liquide on peut obtenir des indications concernant les propriétés physiques du liquide.

Entre autre nous avons l'intention d'appliquer cette méthode à l'étude des gaz liquéfiés tels que l'oxygène, l'azote, l'hydrogène et l'hélium liquide.

Afin de mettre au point cette méthode nous avons étudié à température ordinaire les oscillations de cristaux de différentes fréquences (530 kc, 20 mm, 600 kc, 800 et 900 kc tous de 15 mm de diamètre), dans la paraffine, le xylol et l'huile pour transformateur. Ces mesures nous ont fourni en outre des indications sur la manière dont le mode de vibration du quartz dépend du montage de celui-ci ainsi que de ses dimensions.

**2. Appareils de mesures.** Pour l'excitation du quartz sous différentes fréquences, nous avons fait usage d'un oscillateur de 100 watt permettant une variation continue de la fréquence entre 200 et 1200 kc.



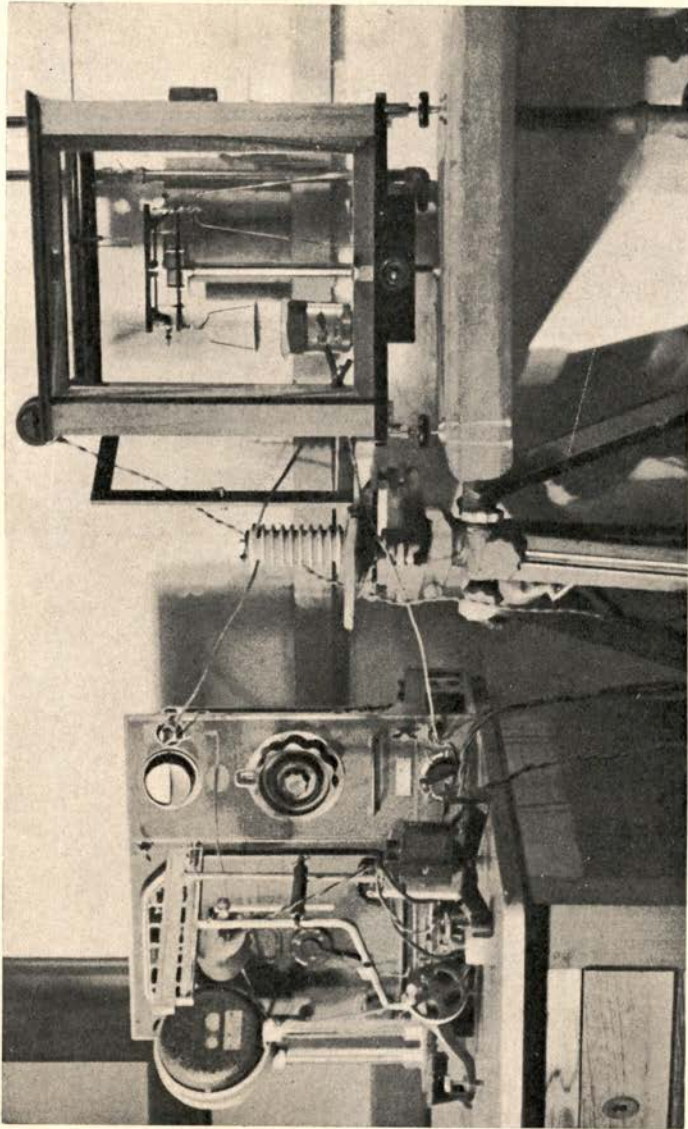


Fig. 2



La tension effective aux électrodes du quartz est mesurée au moyen d'un voltmètre électrostatique du type Stark et Schroeder.

Toutes les mesures ont été faites pour une tension effective de 2000 volt. Le montage est représenté dans les figures 1 et 2.

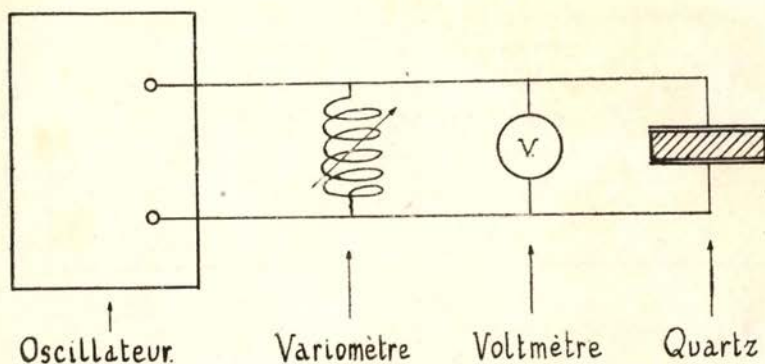


Fig. 1

Pour la mesure de l'intensité sonore, nous avons employé la méthode indiquée par SOERENSEN [2], laquelle consiste à mesurer la pression de

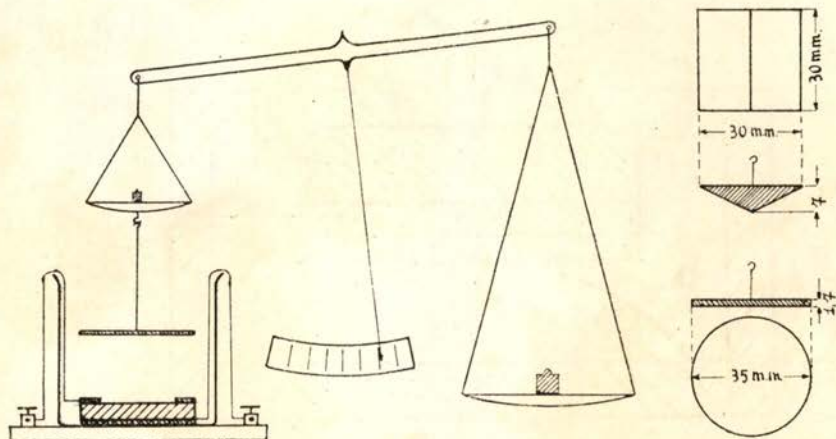


Fig. 3

radiation sonore au moyen d'une balance de précision (voir fig 2 et 3). Cette pression est exercée sur un réflecteur attaché à un des plateaux de la balance. Nous avons comparé les mesures faites au moyen d'un

disque en verre (diamètre 35 mm, épaisseur 1,7 mm) et celles faites au moyen d'un petit volume creux de forme trapézoïdale en cuivre rouge (épaisseur de la paroi 0,2 mm).

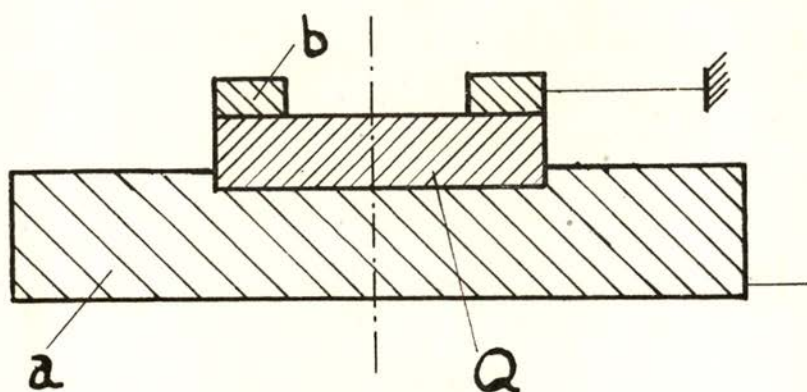


Fig. 4

Le plus grand nombre de mesures ont été effectuées au moyen du réflecteur creux, bien que ces mesures correspondaient exactement avec

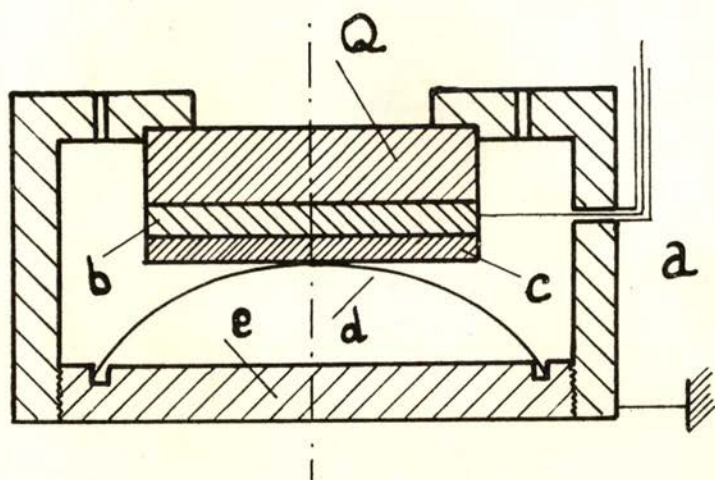


Fig. 5

celles faites au moyen du disque en verre. La pression de radiation sonore est déduite de la déviation totale du fléau de la balance. Cette

pression  $S$  est liée à l'intensité ultrasonore  $J$  par la formule bien connue de LANGEVIN [3].

$$(7) \quad S = E = \frac{J}{v}.$$

La pression de radiation maximum atteignit la valeur d'environ 3 mgr par  $\text{cm}^2$ . Ceci correspond à une intensité sonore de 0,15 watt/ $\text{cm}^2$ .

Pour le montage des quartz, nous avons employé les différents dispositifs représentés dans les figures 4 et 5.

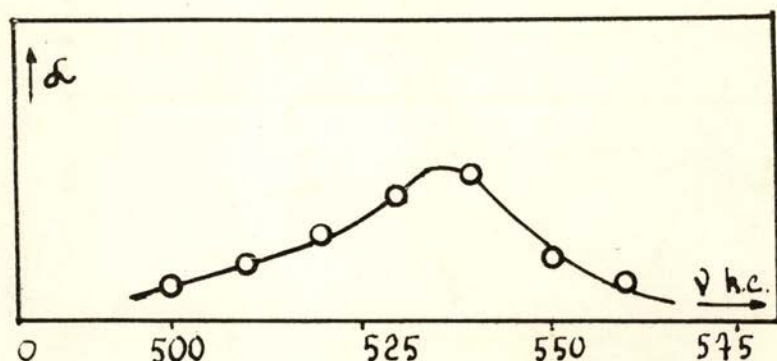


Fig. 6

Dans un montage (I) le quartz était posé sur un disque en cuivre  $a$  (épaisseur 9,5 mm, diamètre 48,5 mm). Dans ce disque, servant comme électrode de haute tension, était tournée une cuvette. L'électrode reliée à la terre était un anneau circulaire  $b$  (diamètre intérieure 14 mm, diamètre extérieure 26 mm; épaisseur 3 mm). Dans le second montage (II) le cristal  $q$  fut placé à l'intérieur d'une boîte  $a$  en cuivre (diamètre 40 mm, hauteur 22 mm). Celle-ci se trouvait au potentiel de la terre.

La surface supérieure est munie d'un trou (diamètre 14 mm) devant lequel est placé le quartz. L'électrode de haute tension  $b$  est un disque en cuivre (diamètre 22 mm, épaisseur 2 mm). Cette électrode est serrée contre le cristal au moyen d'une plaque  $c$  en ébonite ou en verre par l'intermédiaire d'une bandelette  $d$  en acier servant comme ressort. Ce ressort est légèrement serré contre le cristal au moyen d'un disque  $e$  vissé dans la partie inférieure de la boîte  $a$ . Le disque en ébonite était remplacé par celui en verre pour les mesures effectués dans le xylol pour cause de son action dissolvante.

Tous les cristaux que nous avons employés sont taillés perpendiculairement à l'axe électrique. Nous remercions bien vivement le Profes-

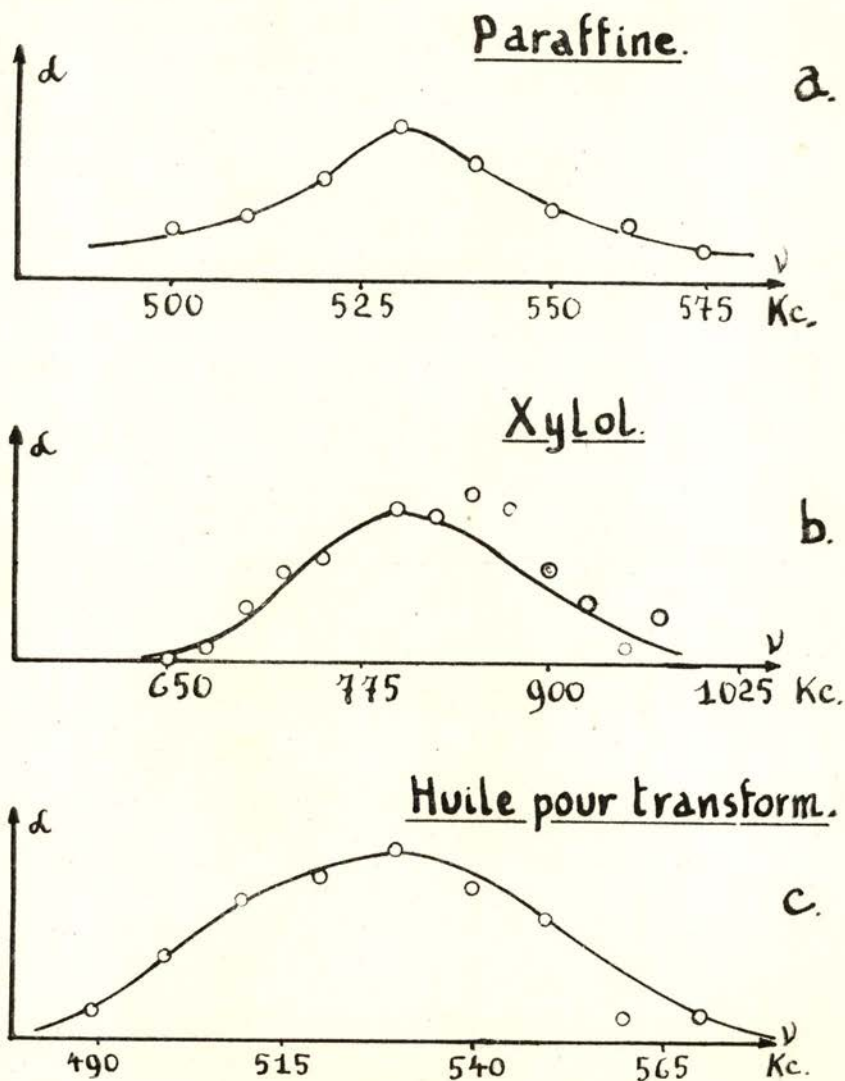


Fig. 7

seur P. Turlot de La Louvière (Belgique) qui nous a fourni le cristal de 530 kc. Les cristaux de fréquence 600, 800 et 900 kc nous ont été fournis par la Société Belge d'Optique de Gand.

3. Mesures. Les mesures faites avec le premier montage ont donné lieu à des courbes de résonances asymétriques (voir fig. 6).

Un phénomène analogue a été observé par BECKER [4]. Néanmoins nous avons calculé à partir de ces mesures le coefficient d'amortissement; la valeur de  $\delta$  obtenue à partir de ces courbes diffère très peu des valeurs correspondantes aux courbes symétriques, que nous avons obtenues en utilisant le dispositif de la figure 5.

Dans les figures 7 a, b, c nous avons représenté quelques courbes de résonance obtenues respectivement avec la paraffine, le xylol et l'huile pour transformateur. A partir de ces différents résultats nous avons calculé les coefficients d'amortissements pour les trois liquides en question. Les résultats, correspondants à différents montages, sont indiqués dans le tableau ci-dessous.

DÉCREMENTS D'AMORTISSEMENT DANS DIFFÉRENTS LIQUIDES

| Liquide                   | Fréquence kc | Montage | $\delta$ exp | $\delta = 2 \frac{\rho \cdot v}{\rho \bar{v} \cdot v_0}$ |
|---------------------------|--------------|---------|--------------|--|
| Paraffine                 | 530          | I       | 0,19         | 0,16   |
|                           | 530          | II      | 0,21         |  |
|                           | 530          | II      | 0,16         |  |
|                           | 600          | II      | 0,36         |  |
|                           | 800          | II      | 0,55         |  |
|                           | 800          | II      | 0,55         |  |
|                           | 900          | II      | 0,43         |  |
| Xylol                     | 530          | I       | 0,18         | 0,16   |
|                           | 800          | I       | 0,71         |  |
|                           | 800          | I       | 0,81         |  |
|                           | 900          | I       | 0,69         |  |
| Huile pour transformateur | 530          | II      | 0,29         | —  |
|                           | 800          | II      | 0,76         |  |
|                           | 900          | I       | 0,38         |  |

Nous voyons donc d'après le tableau ci-dessus que pour le quartz de 530 kc on trouve une bonne correspondance entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques. Pour les autres quartz le décrement expérimental est environ quatre fois plus grand que le décrement théorique. Ceci peut se comprendre, le diamètre de ces quartz ne différant que peu de l'épaisseur, de sorte qu'il faut prendre en considération la radiation latérale.

A la fin de cet article nous remercions bien vivement le Fonds National de la Recherche Scientifique belge en premier lieu pour le fait qu'il a mis à notre disposition différents appareils sous forme de prêt et en second lieu pour l'aide financière dont a pu jouir un d'entre nous sous forme de mandat d'Aspirant.

Nous remercions également le Prof. J. De Smedt pour l'intérêt avec lequel il a suivi ces expériences.

#### LITTÉRATURE

- [1] L. BERGMANN, *Der Ultraschall*, V. D. I. Verlag, Berlin, 1942.
- [2] CHR. SOERENSEN, *Ann. d. Phys.*, **26**, 121, 1936.
- [3] P. LANGEVIN, *Rev. d'Acoustique*, **1**, 93, 1932; **1**, 315, 1932; **2**, 288, 1933; **3**, 104, 1934.
- [4] H. BECKER, *Ann. d. Phys.*, **26**, 645, 1936.

## DIFFUSION DES NEUTRONS THERMIQUES PAR LE MÉTHANE ENTRE 20 ET 200 °K

par A. GIBERT\* (à Lisbonne)

(Reçu le 15 Mai 1947)

Résumé. On peut s'attendre théoriquement à la possibilité de mise en évidence de transitions du premier ou second ordre au moyen de la diffusion des neutrons thermiques. On fait ici un essai d'application de cette hypothèse à l'étude des changements de structure du méthane entre la température ordinaire et 200 °K. La transition du second ordre bien connue à 20,4 °K est marquée par un accroissement de la section efficace de 19%.

1. Introduction. Les neutrons thermiques ayant des énergies comprises entre 0,02 et 0,04 eV, leur diffusion peut être sensible au champ moléculaire, comme le démontrent de nombreux cas de non-additivité des sections efficaces [1], ainsi qu'à la température du diffuseur [2], cet effet ayant été aussi établi expérimentalement [3]. Or, ainsi que l'a montré Pauling [4] pour les molécules diatomiques, dans un cristal le mouvement des molécules, relativement aux angles polaires  $\theta$  et  $\varphi$ , approche l'un des deux cas limite: oscillation ou rotation. D'autre part, il montre que certaines transitions, dont celle du méthane, peuvent être interprétées comme des passages de l'état dans lequel la plupart des molécules sont en oscillation vers l'état dans lequel la plupart des molécules sont en rotation. Dans ce dernier cas, les niveaux d'énergie seraient proches de ceux de la molécule libre. Il en serait ainsi, en particulier, du méthane au-dessus de 20,4 °K, de l'azote au-dessus de 35,4 °K et de l'oxygène au-dessus de 43,8 °K.

De telles circonstances nous ont semblé propices à mettre en évidence la possibilité d'utiliser les neutrons thermiques dans l'étude de certains effets moléculaires.

\* Boursier de l'État portugais (Instituto para a Alta Cultura) pendant la réalisation de ce travail.

Ainsi, le méthane et l'azote se présentant sous un jour particulièrement favorable, nous avons entrepris leur étude. Les résultats des recherches sur l'azote, déjà publiés [5], confirment les suppositions théoriques dans une certaine mesure.

Par ailleurs les neutrons thermiques ayant une longueur d'onde de l'ordre de  $1,7 \text{ \AA}$  et les distances atomiques dans le méthane étant voisines de  $1 \text{ \AA}$  [6] des effets d'interférence sont possibles [7] et l'on sait que ceux-ci peuvent être suffisamment marqués pour être observés [8].

D'autre part, l'effet de la température n'étant pas négligeable, il est intéressant de pouvoir en tenir compte et le méthane s'y prête particulièrement bien. En effet les résultats de Sachs et Teller [2] sont applicables au méthane au-dessous de  $45^\circ\text{K}$ , pour des neutrons thermiques de  $290^\circ\text{K}$ , en supposant qu'il se conserve gazeux à ces températures. Puisque nous avons des raisons d'admettre que la théorie de Sachs et Teller est bonne, surtout aux basses températures [3], nous pourrions prendre l'écart entre les valeurs expérimentales et les valeurs théoriques (pour le gaz) comme la mesure de l'influence de l'état d'aggrégation.

Nous avons donc fait des mesures de la section efficace de diffusion des neutrons thermiques dans le méthane aux températures suivantes ( $^\circ\text{K}$ ): 200, 150, 110, 77 et 20.

**2. Mesures.** Le dispositif expérimental a déjà été décrit ailleurs [3 et 5] ainsi que le liquéfacteur employé pour la production de températures jusqu'à  $20^\circ\text{K}$  [9].

Pour les mesures dans le méthane gazeux nous avons utilisé une chambre de diffusion cylindrique ayant 11,6 cm de longueur tandis que pour le méthane liquide et solide nous avons employé une chambre ayant à peine 2,00 mm d'épaisseur (Fig. 1), les bases étant dans les deux cas des plaques d'aluminium de 3 mm d'épaisseur. Les diamètres des chambres étaient d'environ 40 mm. La chambre était placée à l'intérieur du Dewar métallique, qui constituait la chambre thermique. Les parois de la grande chambre étaient recouvertes intérieurement d'une feuille de cadmium de 1 mm d'épaisseur. Malgré la position des chambres, nous avons réalisé un blindage au cadmium presque continu. Ce blindage est renforcé, en particulier autour de la chambre d'ionisation, par une couche, épaisse de 1 cm, d'acide borique en poudre comprimée.

La chambre d'ionisation, en aluminium, est remplie de trifluorure de bore et reliée à un amplificateur linéaire.



Les neutrons thermiques sont produits dans un «howitzer» par deux sources, l'une de  $Ra + Be$ , l'autre de  $Rn + Be$ , d'environ 350 mC au total.

La mesure et le contrôle des températures se faisait par couples thermo-électriques de cuivre-constantan. Les températures qui ne correspondent pas à des points fixes étaient obtenues par les moyens déjà décrits [9].

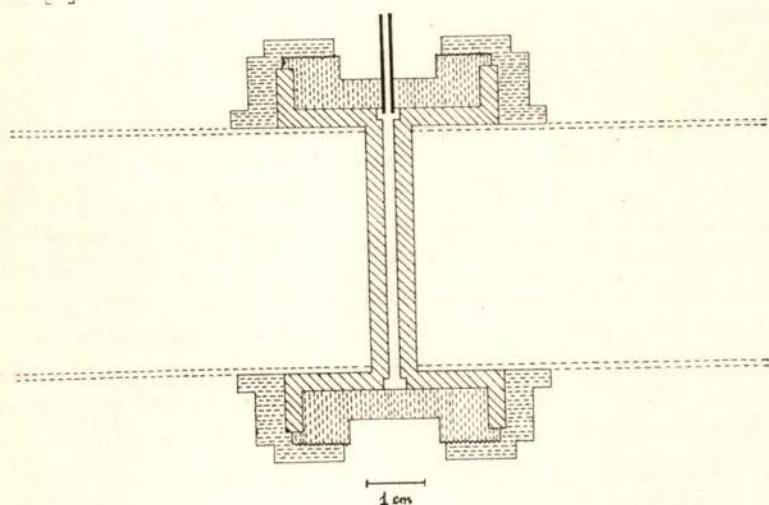


Fig. 1

Les sections efficaces ont été mesurées par transmission, soit par détermination de quatre nombres de neutrons enregistrés:  $N$  (avec méthane),  $N_{cd}$  (avec méthane et écran de  $Cd$ ),  $N^0$  (chambre de diffusion vide, ou «témoin»),  $N_{cd}^0$  (comme  $N^0$ , avec écran de  $Cd$ ), et d'après la formule

$$n\sigma d = \log \frac{N^0 - N_{cd}^0}{N - N_{cd}}$$

Les déterminations des 4 nombres  $N$  se faisaient en cycles de façon à compenser de légères variations de sensibilité de l'amplificateur.

Dans la formule précédente l'épaisseur de la chambre de diffusion,  $d$ , était connue au  $\frac{1}{100}$  mm. Dans le cas de la petite chambre, la détermination du nombre  $n$  de molécules par  $\text{cm}^3$  est particulièrement délicate, étant donné que le volume de la chambre de diffusion ( $2,6 \text{ cm}^3$ ) et le volume du tube de remplissage sont du même ordre de grandeur. Le manque de temps ne nous a pas permis de modifier en conséquence

un montage qui était adapté aux mesurs analogues dans l'hydrogène et dans l'azote. Or, tandis que dans l'hydrogène la connaissance de la pression du gaz, tandis que dans l'azote la détermination du volume du gaz employé à l'état condensé, après chaque série de mesures, nous ont donné une précision suffisante, aucune de ces méthodes n'était praticable ici et nous avons dû utiliser, pour déterminer  $n$ , les valeurs connues de la densité du méthane. Nous avons toujours rempli la chambre de diffusion à la même température, comprise entre 100 et 110°K et nous avons donc pris la valeur 0,43 g/cm<sup>3</sup> pour la densité du méthane [10].

Toute fois la variation de la densité du méthane avec la température n'est pas négligeable dans son ensemble bien qu'elle présente un plateau entre 35 et 14°K, ainsi que le montrent des travaux récents [11], la densité dans cette zone étant de 0,52 g/cm<sup>3</sup>.

Par conséquent l'erreur provenant de la façon dont nous déterminons le nombre  $nd$  ne peut que conduire à des valeurs trop petites et, par suite, à des valeurs trop grandes de  $\sigma$ . Or tous les effets que nous observons, sauf un, se présentent sous forme de diminutions de  $\sigma$  et ces effets ne proviennent donc pas de l'erreur éventuelle commise sur  $d$ . D'autre part l'effet qui se manifeste par un accroissement de  $\sigma$ , se présente à la température la plus basse (20°K), mais nous avons vérifié que le nombre de molécules présentes était bien le même qu'à la température immédiatement supérieure (77°K). Pour cela, après les mesures à 20°K, nous avons fait des mesures de contrôle à 77°K et nous avons bien trouvé la même valeur que lors des mesures faites directement à cette dernière température. L'effet relatif, du moins, est donc certain. Dans tous les cas, étant donné l'impossibilité évidente de vider et remplir la chambre de diffusion au cours d'une même mesure, les nombres  $N^0$  et  $N_{cd}^0$  étaient déterminés avec un témoin à la place de la chambre. Le rapport des nombres de neutrons thermiques enregistrés avec chambre vide et avec témoin était connu à 1% près.

Une autre cause d'erreur se trouve dans l'état d'impureté du méthane. Afin de réduire cette erreur, nous avons employé du méthane commercial aussi pur que possible et, pour les mesures à l'état gazeux nous avons encore fait une purification supplémentaire par une méthode décrite ci-après. Cependant pour les mesures dans les états condensés nous avons préféré employer le méthane moins pur, mais comprimé, ce qui nous a permis de faire les remplissages sous des pressions de quelques atmosphères. Les principales impuretés étaient l'azote (4,25%) et l'anhydride carbonique (1,9%). Celui-ci était fortement réduit en faisant passer le gaz très lentement dans une longue spirale plongée dans le mélange alcool + glace carbonique. L'eau se déposait aussi.

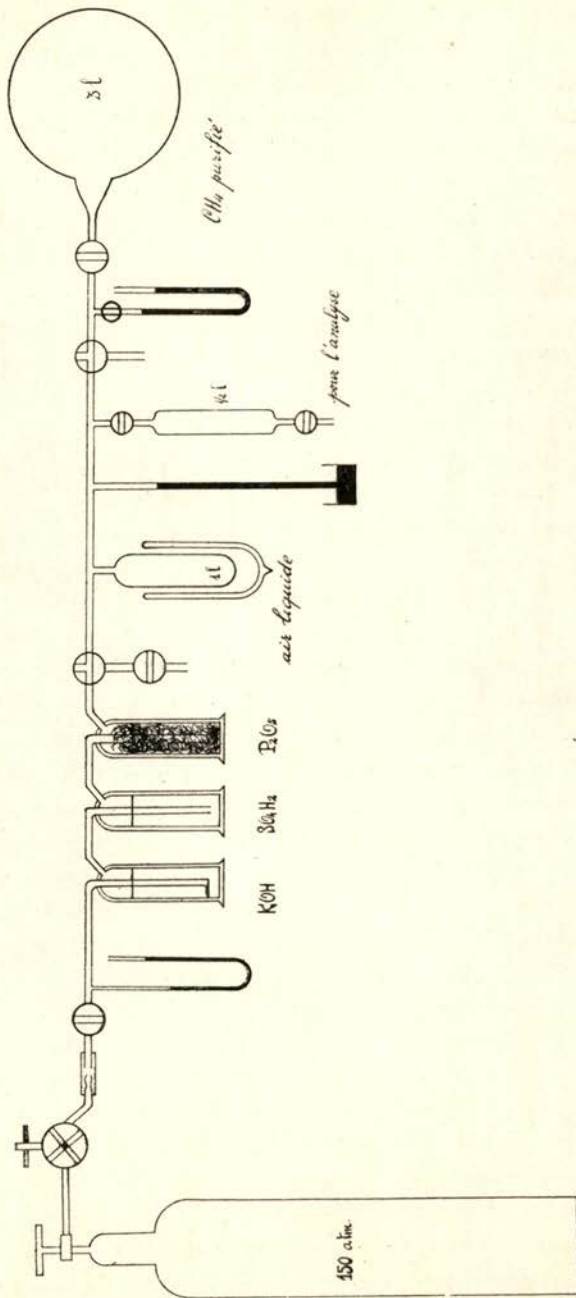
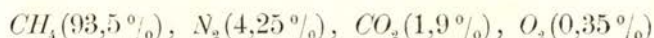


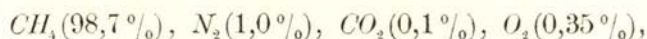
Fig. 2

Quant à l'azote il restait gazeux à la température de remplissage et ne comptait donc pas en présence du méthane liquide.

3. Purification du méthane. Le gaz commercial comprimé, tel qu'il nous était fourni avait la composition suivante :



et, après purification,



les analyses ayant été réalisées au Laboratoire fédéral d'essai de matériaux et Institut de recherches (EMPA, à Zürich).

Pour la purification du méthane nous avons utilisé en principe la méthode décrite par Schallamach [11].

Dans la figure 2 nous représentons schématiquement l'appareil utilisé. Le méthane commercial comprimé à 150 atm. traversait un réducteur de pression et au moyen d'un robinet on réglait son débit dans l'appareil. Le gaz barbottait d'abord dans une solution de potasse, puis dans de l'acide sulfurique concentré et était ensuite séché à travers de l'anhydride phosphorique en poudre. Comme l'on ne pouvait pas faire le vide dans cette partie de l'appareil on en expurgeait l'air en laissant le méthane s'écouler d'abord à l'extérieur. Après 15 minutes environ, on mettait alors la première partie de l'appareil en communication avec la seconde où l'on avait fait un bon vide. Lorsque la pression était suffisante on entourait le ballon de 1 litre d'un bain d'air liquide de façon à y condenser le méthane qui était toujours débité par la 1<sup>ère</sup> partie de l'appareil. Le méthane se condensait et lorsqu'on jugeait en avoir la quantité suffisante, on fermait le robinet séparant les deux parties de l'appareil.

Alors on faisait le vide, le méthane se solidifiant et perdant lors de la solidification une partie des gaz occlus dans sa masse. On réchauffait et l'on recommençait, reprenant ces opérations une dizaine de fois, jusqu'à consommation d'environ les 2/3 du méthane liquéfié d'abord.

Le partie restante était alors recueillie dans le grand ballon de 3 litres ainsi que dans le ballon d'analyse de 1/2 litre.

4. Résultats et conclusions. Nos mesures ont porté sur les trois états d'aggrégation et les résultats sont rapportés dans le tableau suivant, avec leurs erreurs quadratiques moyennes.

Les valeurs données de  $\sigma$  sont celles de la section efficace totale

moins la section efficace de l'atome de carbone ( $\sigma_c = 4,9 \times 10^{-24} \text{ cm}^2$ ) divisée par 4, soit par atome d'hydrogène.

Dans le 3<sup>e</sup> colonne nous donnons en outre la variation de  $\sigma$  en % rapportée à la valeur la plus basse (état liquide,  $\sigma = 33,9 \pm 2,7$ ) et dans la 4<sup>e</sup> colonne nous indiquons l'erreur sur ce rapport.

La valeur à 300 °K est due à Carrol [7].

| $T$ (°K) | $\sigma \times 10^{24}$ (cm <sup>2</sup> ) | $R = (\sigma - \sigma_{110}) / \sigma_{110}$ (°/o) | $\Delta R$ (°/o) |
|----------|--|--|------------------|
| 300      | 45,4 $\pm$ 0,3                             | 34   | 10,9             |
| 200      | 42,0 $\pm$ 5,5                             | 24   | 13,8             |
| 150      | 36,9 $\pm$ 1,1                             | 8,8  | 9,1              |
| 110      | 33,9 $\pm$ 2,7                             | —  | —                |
| 77       | 35,1 $\pm$ 2,3                             | 3,5  | 10,4             |
| 20       | 40,3 $\pm$ 2,6                             | 19   | 12,5             |

De l'ensemble de ces valeurs on voit qu'il n'est pas possible de séparer celles qui vont de 150 à 77 °K, mais que, par contre, les valeurs à 200 et 300 °K, d'une part, et la valeur à 20 °K, d'autre part, s'éloignent nettement des précédentes.

Les mêmes raisons théoriques déjà expliquées à propos de l'azote et la valeur déjà signalée du point de transition du méthane, nous ont porté à tracer la courbe pointillée de la figure 3 comme susceptible de représenter, dans son allure du moins, la variation de  $\sigma$  avec la température et l'état d'aggrégation du méthane.

À remarquer que, pour l'établissement de la température de liquéfaction nous avons pris la valeur correspondante à la pression à laquelle se trouvait le gaz dans les mesures faites à l'état gazeux à la plus basse température, soit 145 °K sous 8 atm. [10].

Les résultats obtenus avec l'azote sont donc retrouvés ici dans leurs grandes lignes et, étant donné qu'il s'agit de molécules de types assez différents, on est tenté de conclure à la généralité des faits observés dans les deux cas, à savoir :

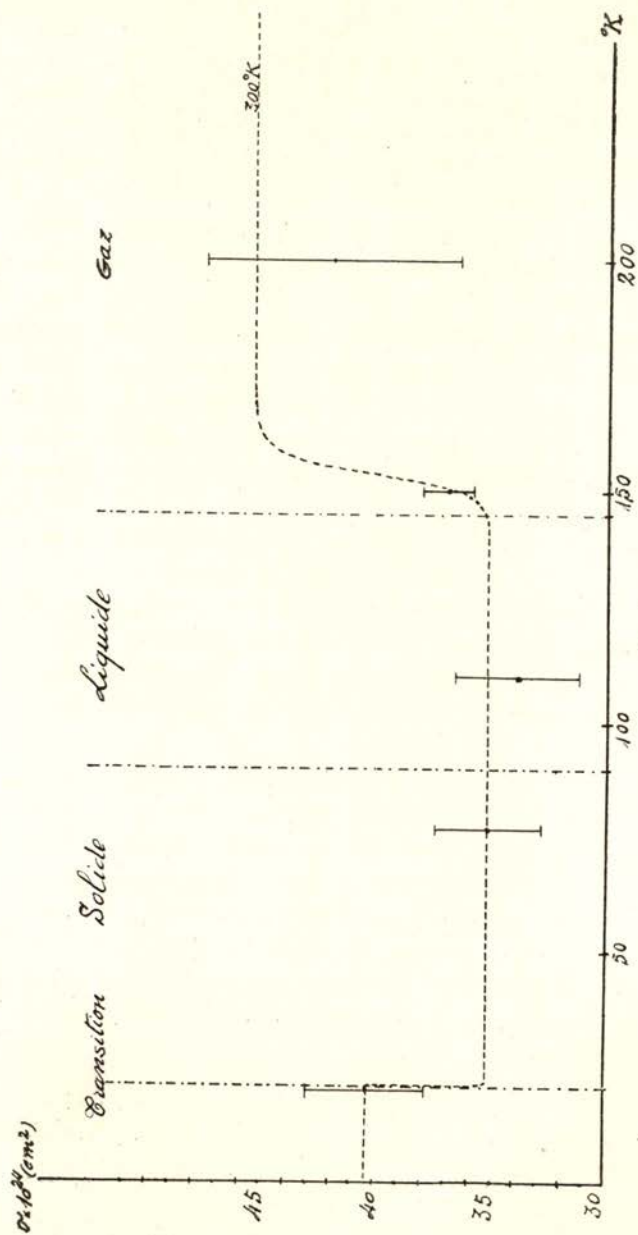


Fig. 3

- 1°) constance de la section efficace à l'état gazeux, sauf variation minime avec la température;
- 2) chute lors de la transition gaz-liquide;
- 3) insensibilité à la transition liquide-solide;
- 4) variation brusque lors d'une transition du second ordre.

Cependant, tandis que dans le cas de l'azote il a été possible de discerner dans l'état liquide une diminution continue avec la température, un tel effet n'est pas décelable ici.

D'autre part, il semblerait que la chute lors de la liquéfaction ne présenterait pas un caractère de discontinuité aussi brusque qu'on aurait pu le penser.

Remarquons encore que nos mesures à 20°K ont été faites, effectivement, au-dessous de la température de transition. En effet celle-ci a été établie avec grand soin par Clusius et Perlick [12] qui donnent la valeur 20,4°K, tandis que nos mesures ont été faites à la température d'ébullition de l'hydrogène liquide sous une pression toujours inférieure à 750 mm-Hg, soit à une température inférieure à 20,3°K [13].

Enfin, comme nous l'avons déjà remarqué, on peut appliquer au méthane gazeux au dessous de 45°K la théorie de Sachs et Teller. Ce faisant on trouve pour section efficace moyenne entre 20 et 45°K, à l'état gazeux, la valeur  $\sigma = 47$ , si l'on prend  $\sigma_H = 20$ , tandis que notre valeur expérimentale extrapolée dans la même région, à moins d'une variation que rien ne fait supposer, est de  $35,1 \pm 2,3$  à l'état solide.

C'est un effet très grand, une diminution d'environ 20%, dont le sens est d'accord avec ce que l'on pourrait attendre d'une effet d'interférences, mais il serait bien osé de vouloir conclure sans posséder d'autres résultats expérimentaux et une analyse théorique profonde.

La partie expérimentale de ce travail a été faite à l'Institut de Physique de l'École Polytechnique Fédérale de Zürich et nous tenons à remercier ici son Directeur, Monsieur le professeur P. Scherrer pour son intérêt, ses conseils et son appui matériel désintéressé qui ne nous ont jamais fait défaut.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] N. KIMURA, *Imp. Acad. Tokio Proc.*, **15**, 214, 1939.
- [2] R. G. SACHS, E. TELLER, *Phys. Rev.* **60**, 18, 1941.
- [3] A. GIBERT, J. ROSSEL, *Helv. Phys. Acta*, **19**, 285, 1946.
- [4] L. PAULING, *Phys. Rev.*, **36**, 430, 1930.
- [5] A. GIBERT, R. KELLER, J. ROSSEL, *Helv. Phys. Acta*, **19**, 1946.
- [6] R. MECKE, *Leipziger Vorträge, Molekülstruktur*, p. 23 Verlag von S. Hirzel. Leipzig, 1931.
- [7] G. C. WICK, *Physik. Zeits.*, **38**, 403, 689, 1937.  
I. POMERANCHUK, *Physik. Zeits. Sowietunion*, **13**, 65, 1938.  
R. WEINSTOCK, *Phys. Rev.*, **65**, 1, 1944.
- [8] D. P. MITCHELL, P. N. POWERS, *Phys. Rev.*, **50**, 486, 1936.  
P. PREISWERK, *Helv. Phys. Acta*, **10**, 400, 1937.  
H. G. BEYER, M. D. WHITAKER, *Phys. Rev.* **57**, 976, 1940.  
O. HALPERN, M. HAMERMESH, M. H. JOHNSON, *Phys. Rev.* **59**, 981, 1941.
- [9] A. GIBERT, J. ROSSEL, *Helv. Phys. Acta*, **18**, 343, 1945.
- [10] *Internat. Critical Tables*, Vol. III p. 230.
- [11] A. SCHALLAMACH, *Proc. Roy. Soc.*, **171**, 569, 1939.
- [12] K. CLUSIUS, A. PERLICK, *ZS. phys. Chem.*, **24** (B), 321, 1934.
- [13] W. H. KEESOM, A. BIJL, H. v. d. HORST, *Proc. Kon. Akad.*, Amsterdam, **34**, 1223, 1931.



## POST-FÁCIO

Ultima-se agora a publicação do Vol. II da *Portugaliae Physica*, revista criada com o intuito de estabelecer relações com os meios científicos do estrangeiro e integrar o trabalho dos físicos portugueses na obra da investigação científica que no mundo civilizado afanosamente se desenvolve.

O modo como *Portugaliae Physica* foi recebida no estrangeiro por instituições e individualidades de reconhecida autoridade científica compensou os esforços dos seus fundadores e mantém o intento de se permitir no empreendimento há cinco anos iniciado.

Mas a vida de *Portugaliae Physica* não tem decorrido liberta de dificuldades. As escassas receitas próprias apresentam grande desnível em relação aos encargos fundamentais da revista e os subsídios que de começo lhe foram concedidos, não bastaram para evitar que, terminada a publicação do Vol. I, a situação económica da *Portugaliae Physica* fôsse já a esse tempo a de uma administração deficitária.

Por essa época havia cessado a recepção dos subsídios aludidos, sem aviso prévio nem indicação do motivo determinante de tal cessação.

Assim a possibilidade de publicação deste Vol. II da *Portugaliae Physica* deve-se a auxílios pecuniários que alguns particulares, devotados amigos da revista, lhe têm concedido em apoio do esforço que, visando interesses superiores inatacáveis, esta publicação representa.

Outros bons amigos da *Portugaliae Physica* têm com o seu trabalho obviado aos inconvenientes da dispersão sofrida pela «Comissão de Redacção» por virtude de mudanças de situação de vários dos seus membros.

Esperamos que ajudas das espécies apontadas permitam a manutenção da *Portugaliae Physica* e esta possa continuar a prestar os serviços para que foi criada.

O Editor

REVISTAS QUE PERMUTAM COM A «PORTUGALIAE PHYSICA»,  
POR ORDEM ALFABÉTICA DOS PAÍSES

- ARGENTINA — Anales de la Sociedad Científica Argentina.  
— Mathematicae Notae.  
— Revista de la Facultad de Ciencias Fisicomatematicas de la Plata.  
— Revista de la Universidad Nacional de Cordoba.
- AUSTRALIA — Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales.  
— Proceedings of the Royal Society of Victoria.
- BELGICA — Annuaire de l'Académie Royale de Belgique.  
— Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique.  
— Mededeelingen mit Het Natuurkundig Laboratorium der Universiteit te Genb.
- CANADÁ — Canadian Journal of Research.  
— Proceedings of the Royal Canadian Institute.  
— Transactions of the Royal Canadian Institute.  
— University of Toronto Studies.
- EQUADOR — Anales (Universidad Central del Ecuador).
- ESPAÑA — Anales de Física y Química.  
— Investigacion y Progreso.  
— Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.  
— Revista de Geofísica.
- ESTADOS UNIDOS — American Journal of Science.  
— Chemical Abstracts.  
— Journal of the Franklin Institute.  
— Journal of Mathematics and Physics.  
— Journal of Research of the National Bureau of Standards.  
— Quartely Review.  
— Studies of the Institutum Divi Thomae.
- FRANÇA — Annales de l'Institut de Physique du Globe de l'Université de Paris.  
— Annales de Physique.  
— Annales de l'Université de Grenoble.  
— Annales de l'Université de Lyon.  
— Bulletin Astronomique.  
— Bulletin de l'Institut et Observatoire de Physique du Globe du Puy-de-Dôme.  
— Bulletin de la Société Scientifique de Bretagne.  
— Intermédiaire des Recherches-Mathématiques.  
— Procès-Verbaux des Séances de la Société des Sciences Physiques et Naturelles de Bordeaux.
- HOLANDA — Communications from the Kamerling Onnes Laboratorium.  
— Physica.  
— Revue Technique Philips.
- INDIA — Proceedings of the Indian Academy of Sciences.  
— Proceedings of the National Institute of Sciences of India.  
— Quaterly Journal of the Indian Institute of Science.

## INGLATERRA — The Advancement of Science.

- Annals of the Solar Physics observatory, Cambridge.
- The British Journal of Radiology.
- Bulletin and Foundry Abstracts of the British Cast Iron Research Association.
- Electrical Review.
- Electrical Times.
- The English Electric Journal.
- Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.
- Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Geophysical Supplement.
- Royal Astronomical Society — Occasional Notes.
- Physics Abstracts.
- Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.
- The Proceedings of the Physical Society.
- Proceedings of the Royal Society.
- Proceedings of the University of Durham Philosophical Society.
- Radiography.
- The School Science Review.

## IRLANDA — Proceedings of the Royal Irish Academy.

- The Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society.

## ITÁLIA — Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa.

- Il Nuovo Cimento.
- Rendiconti del Seminario della Facolta di Scienze di Cagliari.
- Ricerca Scientifica e Ricostruzione.
- La Rivista del Nuovo Cimento.

## MÉXICO — Quimica.

## PERÚ — Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de Lima.

## PORTUGAL — Actividades Biológicas.

- Agronomia Lusitana.
- Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática.
- Gazeta de Física.
- Gazeta de Matemática.
- O Instituto.
- Portugaliae Mathematica.
- Publicações de Física.
- Revista da Faculdade de Ciências de Coimbra.
- Revista Portuguesa de Filosofia.

## SUECIA — Arkiv för Kemi, Mineralogi och Geology.

- Arkiv för Matematik, Astronomi och Fysik.
- Kungl Fysiografiska Sällskapet i Lund Förhandlingar.

## SUISSA — Archives des Sciences Physiques et Naturelles de Genève.

- Comptes Rendus des Séances de la Société de Physique et de Sciences Naturelles de Genève.
- Helvetica Physica Acta.

## TCHECOSLOVÁQUIA — Casopis Pro Pestovani Matematiky à Fysiky.

## TURQUIA — Istanbul Universitesi Fen Fakultesi Mecmuasi.

NOTA. Estas revistas estão à disposição de quem pretender consultá-las bastando dirigir-se à Comissão de Redacção. Os assinantes da Portugaliae Physica podem consultá-las a domicílio.

## OBRAS RECEBIDAS

Por intermédio do Instituto Britânico em Portugal recebemos, por oferta do «British Council», as seguintes obras, que agradecemos:

- C. E. BEYNON — *The Physical Structure of Alloys* — Edward Arnold & Co. — London, 1945.
- C. H. DOUGLAS CLARCK — *The Story of Atomic Bomb* — The Machinery Publishing Co. Ltd. — London.
- HERBERT J. COOPER — *Scientific Instruments* — Hutchinson's Scientific and Technical Publications — London.
- C. A. COULSON — *Waves — A mathematical account of the common types of Wave motion.*
- HERBERT DINGLE — *The Special Theory of Relativity* — Methuen & Co. Ltd. — London, 1946.
- SIR A. S. EDDINGTON — *Fundamental Theory.*
- A. H. GIBSON — *Osborne Reynolds* — Longmans, Green & Co. — London, 1946.
- EDWIN GUNN — *Modern Building Technique* — Architect & Building News — London.
- W. HEITLER — *Elementary Wave Mechanics.*
- SIR JAMES JEANS — *The Growth of Physical Science* — Cambridge University Press — 1947.
- R. C. JOHNSON — *Atomic spectre* — Methuen & Co. Ltd. — London.
- H. J. JOSEPHS — *Heavenside's Electric Circuit Theory* — Methuen & Co. Ltd. — London, 1946.
- A. W. JUDGE — *Aircraft Engines*, vol. I — Chappman & Hall Ltd. — London, 1945.
- R. G. MANLEY — *Waveform Analysis* — Chappman & Hall Ltd. — London, 1945.
- E. MOLLOY — *Electrical Instalations* — George Newnes Ltd. — London, 1945.
- R. S. MORRELL — *Synthetic Resins and Allied Plastics* — Oxford University Press — 1943.
- R. R. NIMMO — *Atomic Energy.*
- F. E. OCKENDEN — *Introduction to the Electron Microscope* — Williams & Norgate Ltd. — London.
- DAVID OWEN — *Alternating Current Measurements.*
- M. H. PIRENNE — *The Diffraction of X-rays and Electrons by free molecules* — Cambridge University Press — 1946.
- E. G. RICHARDSON — *Physical Science in Art & Industry* — English University Press Ltd. — London — 1946.
- E. G. RICHARDSON — *Sound* — Edward Arnold & Co. — London, 1947.
- E. SCHRÖDINGER — *Statistical Thermodynamics.*
- F. SHERWOOD TAYLOR — *Science, Past and Present* — William Heinemann Ltd. — London, 1945.
- A. R. UBBELOHDE — *Time and Thermodynamics* — Oxford University Press — 1947.
- ALEXANDER WOOD — *The Cavendish Laboratory* — Cambridge University Press — 1946.
- ROBERTS WILLIAMS WOOD — *Supersonics* — Brown University, Providence — 1939.
- C. W. WILSON — *Radium Therapy* — Chappman e Hall Ltd. — London, 1945.
- B. L. WORSNOP & F. C. CHALKLIN — *X-Rays* — Methuen & Co. — London, 1946.
- J. H. WREDDEN — *The Microscope* — J. A. Churchill Ltd. — London, 1947.

Recebemos dos editores as seguintes obras que agradecemos

- RENÉ CORDEBAS — *Les Lois de l'Esprit* — Editions André Lesot — Paris, 1946.
- OTTO GERTZ — *Kungl. Fysiografiska Sällskapet i Lund, 1772-1940* — C. W. K. Gleernp Lund — 1940.
- A. LICHTNEROWICZ — *Algèbre et Analyse Linéaires* — Masson & Cie., Ed. — Paris, 1947.



PORTUGALIAE PHYSICA se propose de servir simultanément deux buts — le développement des études physiques au Portugal et la collaboration internationale dans ce domaine.

PORTUGALIAE PHYSICA est la seule revue portugaise consacrée exclusivement aux sciences physiques.

Les travaux à publier devront être écrits à la machine (les symboles à la main). Tout auteur d'un mémoire ne dépassant pas 50 pages aura droit à 100 tirages-à-part gratuits.

Toute la correspondance concernant la Rédaction de PORTUGALIAE PHYSICA doit être adressée à

## PORTUGALIAE PHYSICA

Laboratório de Física — Faculdade de Ciências

Rua da Escola Politécnica — Lisboa — Portugal

Les Universités, les Laboratoires de Physique, les Académies, les Sociétés Savantes et les Revues de Physique sont invités à recevoir cette revue en échange de leurs publications.

Preço da assinatura de um volume 80\$00