

# PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME 3

1 9 4 9 - 5 4

FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA  
PORTUGAL

**COMISSÃO DE REDAÇÃO :**

M. T. ANTUNES, A. MARQUES DA SILVA E M. VALADARES

**EDITOR :**

AMARO MONTEIRO (Director do Laboratório de Física da Fac. de Ciências de Lisboa)

## Í N D I C E

(Table des matières)

LOUIS DE BROGLIE — Énergie libre et fonction de Lagrange. Application à l'électrodynamique et à l'interaction entre courants et aimants permanents . . . . .	1-19
LÍDIA SALGUEIRO ET MANUEL VALADARES — Les spectres $L$ et gamma émis dans la transmutation $Ra D \rightarrow Ra E$ . . . . .	20-28
C. BECHERT — Sur la théorie de la propagation des combustions avec une application à la combustion de l'ozone . . . . .	29-90
LAURA LEVI — A propos d'une critique a la loi de l'induction . . . . .	91-94
LÍDIA SALGUEIRO ET MARIA HELENA BLANC DE SOUSA — Influence de la tension d'excitation sur les satellites des raies de l'or, du plomb et du bismuth . . . . .	95-100
GLAPHYRA VIEIRA — Figures de distribution du dépôt actif sur des plaques métalliques . . . . .	101-116
LÍDIA SALGUEIRO ET J. GOMES FERREIRA — Étude de la forme et de l'intensité de la bande satellite qui accompagne la raie $L\beta_2$ de l'or. . . . .	117-126
H. D. PARBROOQ ET E. H. RICHARDSON — La propagation des ultrasons dans les gaz sous pression. . . . .	127-138
LÍDIA SALGUEIRO ET J. GOMES FERREIRA — Étude comparative des spectres à rayons X obtenus par bombardement électronique et par fluorescence . . . . .	139-147
A. ROUMEGOUS — Les amplificateurs à large bande, en physique nucleaire . . . . .	149-170



# PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME 3

FASCÍCULO 1 (Págs. 1-90)

1 9 4 9

FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA  
PORTUGAL

*Comissão de redacção:* A. Cyrillo Soares, M. Telles Antunes, A. Marques da Silva e M. Valadares  
*Editor:* A. Cyrillo Soares (Director do Laboratório de Física da Faculdade de Ciências de Lisboa)

I N D I C E

(Table des matières)

LOUIS DE BROGLIE — Énergie libre et fonction de Lagrange. Application à l'électrodynamique et à l'interaction entre courants et aimants permanents . . . . .	1-19
LÍDIA SALGUEIRO ET MANUEL VALADARES — Les spectres $L$ et gamma émis dans la transmutation $Ra D \rightarrow Ra E$ . . . . .	20-28
C. BECHERT — Sur la théorie de la propagation des combustions avec une application à la combustion de l'ozone . . . . .	29-90

Nomes e direcções dos autores deste fascículo

(Noms et adresses des auteurs de ce fascicule)

LOUIS DE BROGLIE — Institut Henry Poincaré — 11, Rue Pierre Curie, Paris, V — France  
LÍDIA SALGUEIRO — Faculdade de Ciências de Lisboa — Portugal  
MANUEL VALADARES — Laboratoire Curie — 11, Rue Pierre Curie, Paris, V — France  
C. BECHERT — Mayence — Allemagne

## ENERGIE LIBRE ET FONCTION DE LAGRANGE. APPLICATION À L'ELECTRODYNAMIQUE ET À L'INTERACTION ENTRE COURANTS ET AIMANTS PERMANENTS

par LOUIS DE BROGLIE

(Reçu le 17 Novembre 1948)

1. Énergie libre et fonction de Lagrange. Une curieuse analogie entre la notion mécanique de « fonction de Lagrange » et la notion thermodynamique « d'énergie libre » a été signalée, il y a fort longtemps déjà par Helmholtz. Nous allons d'abord la rappeler.

Partons de la relation thermodynamique classique

$$(1) \quad dW = dQ - pdV = TdS - pdV$$

et introduisons avec Helmholtz une variable  $\varepsilon$  telle que, par définition, la température soit la vitesse  $\dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$  correspondant à cette variable.

Nous posons donc :

$$(2) \quad T = \dot{\varepsilon} = \frac{d\varepsilon}{dt}$$

Nous plaçant au point de vue du schéma général des équations de Lagrange, nous désignerons par  $\varepsilon$  la force généralisée correspondant à la variable  $\varepsilon$  et nous aurons

$$(3) \quad dW = \varepsilon d\varepsilon - pdV = \varepsilon \dot{\varepsilon} dt - pdV$$

d'ou par identification avec (1)

$$(4) \quad \varepsilon \dot{\varepsilon} dt = TdS$$

ou

$$(5) \quad \varepsilon = \dot{S}$$

Nous supposerons que la variable  $\varepsilon$  est du type qu'on nomme « cyclique » en Mécanique analytique, c'est à dire que la fonction de Lagrange ne contient pas  $\varepsilon$ .

Envisageons alors un processus réversible extrêmement lent pour lequel on aura  $\dot{V} \approx 0$  et  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}} = 0$ . Les équations de Lagrange pour les variables  $\varepsilon$  et  $V$  seront alors

$$(6) \quad -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} = -p \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varepsilon}} \right) = \varepsilon$$

ou

$$(6') \quad p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} \quad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varepsilon}} = \int \varepsilon dt = \int \dot{S} dt = S$$

L'énergie sera donnée d'après sa définition générale en Mécanique analytique par

$$(7) \quad W = \dot{\varepsilon} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varepsilon}} + \dot{V} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{V}} - \mathcal{L} = TS - \mathcal{L}$$

d'où

$$(8) \quad \mathcal{L} = TS - W = -F$$

$F$  étant l'énergie libre. Pour  $T$  constant, nous aurons

$$(9) \quad d\tau = p dV = -dW + TdS = -d(W - TS) = -dF$$

$d\tau$  étant le travail effectué à l'extérieur, et nous retrouvons ainsi une propriété bien connue de l'énergie libre.

Le schéma canonique de Helmholtz comportant l'introduction d'une variable cyclique  $\varepsilon$  dont la température est la vitesse est fort curieux. Il conduit, comme le montre l'équation (8) à identifier l'énergie libre avec la fonction de Lagrange changée de signe. C'est là une analogie très remarquable qui a été utilisée par divers auteurs, notamment par Max Planck<sup>1</sup> dans ses études de thermodynamique relativiste. Nous allons la voir réapparaître sous une autre forme.

**2. Transformations à  $p_i$  constants et à  $\dot{q}_i$  constants.** Considérons un système mécanique dont la fonction de Lagrange est

$$\mathcal{L}(q_1 \cdots q_i \cdots \dot{q}_1 \cdots \dot{q}_i \cdots),$$

les  $q_i$  étant les variables de Lagrange et les  $\dot{q}_i$  les vitesses correspondantes. Nous poserons suivant l'usage en Mécanique analytique

<sup>1</sup> *Annalen der Physik*, t. 26 (1907) p. 1.



$$(10) \quad p_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} \quad W = \sum_i p_i \dot{q}_i - \mathcal{L}$$

pour définir les moments de Lagrange  $p_i$  et l'énergie du système. Les équations de Lagrange auront la forme générale

$$(11) \quad \frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + Q_i$$

les  $Q_i$  représentant des forces généralisées agissant de l'extérieur sur le système de sorte que le travail élémentaire reçu par le système soit  $\sum_i Q_i dq_i$ , tandis que les  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$  représentent l'ensemble des forces intérieures (dérivant des interactions internes et des forces d'inertie introduites par le choix des variables  $q_i$ ).

Nous définirons l'énergie libre du système en accord avec les idées d'Helmholtz par la relation

$$(12) \quad F = - \mathcal{L}$$

soit  $d\tau_e$  le travail infinitésimal fourni au système par les forces extérieures et  $d\tau_i$  le travail infinitésimal effectué par les forces internes et les forces d'inertie. On a

$$(13) \quad d\tau_e = \sum_i Q_i dq_i \quad d\tau_i = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i.$$

En différenciant l'expression de  $W$ , nous trouvons

$$(14) \quad dW = \sum_i p_i d\dot{q}_i + \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_i} d\dot{q}_i = \\ = \sum_i \dot{q}_i dp_i - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i.$$

En écrivant ceci, nous supposons que le système est purement mécanique, c'est à dire qu'il n'y a pas d'échanges de chaleur. Nous trouverons ensuite

$$(15) \quad d\tau_e = \sum_i Q_i dq_i = \sum_i [p_i d\dot{q}_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i] = \sum_i [\dot{q}_i dp_i - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i] = dW$$

Ce résultat exprime la conservation de l'énergie.

Nous allons maintenant envisager deux cas particuliers.

a) *Les  $p_i$  sont maintenus constants.*

On a  $dp_i=0$  et  $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + Q_i=0$ . Il y a donc équilibre entre les forces extérieures et les forces intérieures et d'inertie. On a donc  $d\tau_i = -d\tau_e = -dW$ , ce que nous écrirons

$$(16) \quad [d\tau_i]_p = -[dW]_p$$

l'indice  $p$  rappelant que les  $p_i$  sont maintenus constants. Le travail  $-d\tau_e = d\tau_i$  fourni à l'extérieur est égal à la diminution de l'énergie interne: aucun apport extérieur d'énergie n'est donc nécessaire.

b) *Les  $\dot{q}_i$  sont maintenus constants.*

Alors  $d\dot{q}_i=0$  et  $[d\mathcal{L}]_q = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i$ , d'où

$$(17) \quad [d\tau_i]_q = \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} dq_i = [d\mathcal{L}]_q = -[dF]_q$$

Le travail des forces intérieures et d'inertie est égal à la diminution de l'énergie libre. Ici l'on n'a plus  $dW + d\tau_i = 0$ , mais d'après (14)

$$(18) \quad dW + d\tau_i = \sum_i \dot{q}_i dp_i.$$

La quantité d'énergie  $\sum_i \dot{q}_i dp_i$  doit donc être fournie au système.

Supposons les vitesses assez faibles par rapport à celle de la lumière pour pouvoir négliger les corrections de relativité et employer les formules de la Mécanique classique. L'énergie cinétique  $E_{\text{cin}}$  sera alors une fonction quadratique homogène des  $\dot{q}_i$  et l'on aura

$$(19) \quad 2E_{\text{cin}} = \frac{\partial E_{\text{cin}}}{\partial \dot{q}_i} \dot{q}_i$$

d'où, puisque les  $\dot{q}_i$  sont par hypothèse maintenus constants

$$(20) \quad 2dE_{\text{cin}} = \sum_i \dot{q}_i dp_i.$$

La quantité d'énergie à fournir au système est donc alors égale à deux fois l'augmentation de l'énergie cinétique: la moitié de l'énergie fournie se retrouve dans l'augmentation de l'énergie cinétique, l'autre moitié sert à couvrir le travail des forces d'inertie.

On peut présenter la question autrement. La force  $Q_i$  peut être considérée comme la somme d'une force  $Q'_i = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}$  qui équilibre les forces internes et d'inertie et d'une force  $Q''_i = Q_i - Q'_i$  qui fournit l'énergie nécessaire au maintien de la valeur constante des  $\dot{q}_i$ . Des équations de Lagrange, on tire

$$(21) \quad \begin{aligned} \sum_i \dot{q}_i dp_i &= \sum_i \dot{p}_i dq_i = \sum_i \left[ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i} + Q'_i \right] dq_i + \sum_i Q''_i dq_i \\ &= \sum_i Q''_i dq_i \end{aligned}$$

et l'on voit que le travail  $\sum_i Q''_i dq_i$  des forces  $Q''_i$  a bien la valeur  $\sum_i \dot{q}_i dp_i$ .

3. Application à la Thermodynamique suivant le schéma d'Helmholtz. Dans les calculs faits au paragraphe I pour exposer le schéma canonique d'Helmholtz, nous avons supposée  $\dot{V}=0$ . Si, de plus, nous supposons  $\dot{\varepsilon}=T=C^{te}$  nous serons dans le cas des  $\dot{q}_i$  constants et, d'après (17), nous obtiendrons la relation classique en Thermodynamique :

$$(22) \quad d\tau_T = -[dF]_T = TdS - dW.$$

Désignons par l'indice 1 ce qui concerne le volume et par l'indice 2 ce qui concerne la variable  $\varepsilon$ . Nous avons

$$(23) \quad \begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} + Q'_1 &= 0 \quad \text{avec} \quad Q_1 = p, \quad Q'_1 = 0 \\ \frac{dp_\varepsilon}{dt} &= Q'_2 \quad \text{avec} \quad Q_2 = 0, \quad Q'_2 = s. \end{aligned}$$

L'énergie fournie au système par les forces  $Q_i$  est

$$(24) \quad d\tau_i = -Q_1 dq_1 - Q_2 dq_2 = p dV$$

Celle fournie par les forces  $Q'_i$  est

$$(25) \quad Q'_1 dq_1 + Q'_2 dq_2 = s d\varepsilon = \dot{S} \varepsilon dt = TdS = dW + d\tau_T$$

Ces résultats sont bien ceux que nous avons trouvés plus haut pour le cas des  $\dot{q}_i$  constants.

Pour être dans le cas opposé des  $p_i$  constantes, il faut que  $p_\varepsilon = S$  soit constant : la transformation est alors isentropique,  $s = \dot{S}$  est nul et l'on a

$$(26) \quad [d\bar{c}_i]_S = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} dV + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varepsilon} d\varepsilon = p dV = - [dW]_S$$

Aucun apport d'énergie n'est nécessaire.

Nous avons ainsi une vérification complète de la théorie générale du paragraphe précédent. On en trouverait d'autres en étudiant des systèmes mécaniques<sup>1</sup> et en appliquant au cas de l'électrostatique. Nous laisserons ici de côté ces illustrations de la théorie générale et nous nous bornerons à faire son application au cas de l'Electrodynamique.

#### 4. Application à l'Electrodynamique.

##### a) Absence d'aimants permanents.

Considérons d'abord des circuits parcourus par des courants qui interagissent sans intervention d'aimants permanents.

Nous distinguerons les coordonnées  $q_j$  qui fixent la position et la forme des circuits et les coordonnées «électriques»  $q_k$  (qui sont ici des charges électriques) telles que l'intensité du courant dans le  $k^e$  circuit soit :

$$(27) \quad I_k = \dot{q}_k.$$

Si les conducteurs sont immobiles ou presque, les vitesses  $\dot{q}_j$ , les moments  $p_j$  et l'énergie cinétique mécanique sont nuls ou négligeables. L'énergie cinétique due au mouvement de l'électricité est

$$(28) \quad W = \frac{1}{2} \sum_{kk'} M_{kk'} I_k I_{k'} = \mathcal{L} = - F \quad (M_{kk'} = M_{k'k})$$

les  $M_{kk'}$  étant les coefficients d'induction qui sont fonctions des coordonnées mécaniques  $q_j$ . Les équations de Lagrange relatives aux  $q_k$  sont

$$(29) \quad \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} \right) = Q_k \quad \text{ou} \quad \frac{d}{dt} \left( \sum_{k'} M_{kk'} I_{k'} \right) = Q_k$$

les  $Q_k$  étant les forces électromotrices. Comme  $Q'_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_k} = 0$ , on a ici  $Q_k = Q'_k$ .

Les  $p_k = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} = \sum_{k'} M_{kk'} I_{k'}$ , sont les flux qui traversent les divers

<sup>1</sup> Voir par exemple J. B. Pomey — *Cours d'Electricité théorique* — Gauthier Villars — t. I, pages 77-79.

circuits : ils jouent ici le rôle de moments de Lagrange. Si l'on maintient constants les  $p_k$ , c'est à dire les flux, les  $Q_k''$  sont nuls et, si les circuits se déforment pour que les flux restent constants, les intensités des courants doivent varier. Le travail alors effectué par les forces  $Q_j$  est

$$(30) \quad [d\bar{c}]_p = - [dW]_p = \frac{1}{2} \sum_{jkk'} \frac{\partial M_{kk'}}{\partial q_j} I_k I_{k'} dq_j$$

car

$$(31) \quad \begin{aligned} dW &= d\left(\frac{1}{2} \sum_k p_k I_k\right) = \frac{1}{2} \sum_k p_k dI_k = \\ &= \frac{1}{2} \sum_{kk'} M_{kk'} I_{k'} dI_k = - \frac{1}{2} \sum_{kk'} I_k I_{k'} dM_{kk'}. \end{aligned}$$

Si, au contraire, on maintient constantes les *intensités* de courant, les flux varient par suite du déplacement et de la déformation des circuits et, pour maintenir les intensités constantes, il faut faire intervenir des forces électromotrices extérieures qui comprennent les forces électromotrices d'induction dues aux variations du flux. On a alors  $Q_k'' \neq 0$  et le travail  $d\bar{c}_i$  est donné par

$$(32) \quad [d\bar{c}_i]_q = - [dF]_q = [dW]_q = \frac{1}{2} \sum_{jkk'} \frac{\partial M_{kk'}}{\partial q_j} I_k I_{k'} dq_j$$

comme en (30).

Les forces électromotrices  $Q_k''$  fournissent alors l'énergie nécessaire pour compenser d'une part le travail  $d\bar{c}_i$  et pour augmenter d'autre part, l'énergie  $W$  d'une quantité égale.

Nous retrouvons ainsi tous les résultats de la théorie générale du paragraphe 2.

#### b) *Intervention d'aimants permanents.*

Supposons qu'en plus des circuits considérés ci-dessus, nous ayons des aimants permanents. L'Electrodynamique nous apprend que la déformation des circuits à *intensités constantes* s'accompagne de la fourniture du travail.

$$(33) \quad [d\bar{c}_i]_q = \sum_j \left[ \sum_k \frac{\partial \Phi_k}{\partial q_j} I_k + \frac{1}{2} \sum_{kk'} \frac{\partial M_{kk'}}{\partial q_j} I_k I_{k'} \right] dq_j$$

où  $\Phi_k$  est le flux magnétique envoyé par les aimants permanents à travers le  $k^e$  circuit. Comme ce travail doit être égal à  $-[dF]_q$ , on en déduit que :

$$(34) \quad F = W_0 - \sum_k \Phi_k I_k - \frac{1}{2} \sum_{kk'} M_{kk'} I_k I_{k'}$$

$W_0$  étant une constante. On doit aussi avoir

$$(35) \quad W = \sum_k \dot{q}_k \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_k} - \mathcal{L} = F - \sum_k I_k \frac{\partial F}{\partial I_k}$$

On peut écrire  $F = F_0 + F_1 + F_2$ ,  $F_0, F_1, F_2$  étant des fonctions homogènes des  $I_k$  de degré égal à leur indice. On a donc

$$(36) \quad W = (F_0 + F_1 + F_2) - (F_1 + 2F_2) = F_2 - F_0$$

d'après le théorème d'Euler sur les fonctions homogènes, d'où

$$(37) \quad W = W_0 + \frac{1}{2} \sum_{kk'} M_{kk'} I_k I_{k'}$$

Le terme  $W_0$  est visiblement égal à l'énergie propre des aimants permanents qui est invariable par hypothèse. Le deuxième terme dans l'expression de  $W$  est l'énergie mutuelle des courants entre eux. Le résultat remarquable contenu dans (37), c'est qu'il n'y a pas d'énergie mutuelle des courants et des aimants permanents, tout au moins si ces derniers sont des aimants permanents *idéaux*, c'est à dire tout à fait insensibles à la valeur des champs électromagnétiques auxquels ils sont soumis. Ce résultat a donné lieu à pas mal de controverses dues à une confusion entre les fonctions  $F$  et  $W$ . La question présentant de l'intérêt, nous allons l'étudier plus à fond.

5. Energie propre d'un aimant permanent idéal. Nous appellerons "aimant permanent idéal" un corps polarisé magnétiquement dont l'intensité d'aimantation reste invariable quelles que soient la valeur et les variations des champs électromagnétiques auxquels il est soumis. Les aimants naturels ne satisfont à cette définition que dans une certaine mesure puisqu'on peut les désaimanter en leur appliquant un champ magnétique suffisamment intense (champ coercitif). Nous supposons donc que les amplitudes des champs appliqués à l'aimant sont assez faibles pour ne pas faire varier son aimantation. Les propriétés de l'aimant réel seront alors assimilables à celles de l'aimant permanent idéal.

On serait tenté de dire que l'énergie propre d'un aimant permanent est nulle. En effet, d'après la théorie électromagnétique la densité d'énergie dans un champ est  $\frac{1}{8\pi} (\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{D} \cdot \vec{E})$ ,  $\vec{H}$  et  $\vec{E}$  étant les

champs,  $\vec{B}$  et  $\vec{D}$  les inductions correspondantes. L'énergie propre d'un aimant permanent devrait donc être donnée par la formule

$$(38) \quad W_a = \frac{1}{8\pi} \iiint \vec{B} \cdot \vec{H} d\tau$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace aussi bien à l'extérieur de l'aimant ou  $\vec{B} = \vec{H}$  qu'à son intérieur ou  $\vec{B} \neq \vec{H}$ . Dans un aimant rectiligne, nous pouvons supposer qu'à l'intérieur de l'aimant,  $\vec{B}$  et  $\vec{H}$  sont parallèles. Traçons un tube d'induction infiniment délié : la relation  $\text{div } \vec{B} = 0$  nous montre qu'un tel tube est fermé sur lui-même. Soit un élément du tube de section  $ds$  et de longueur  $dl$  : l'élément correspondant dans l'intégrale de (38) pourra s'écrire  $B ds \cdot H dl$  : Or  $B ds$  est le flux  $\Phi$  de l'induction qui est constant tout le long du tube et par suite l'intégrale pour le tube est  $\Phi \int H dl$ . Comme le champ magnétique d'un aimant dérive d'un potentiel, l'intégrale  $\int H dl$  pour le tube fermé sur lui-même est nulle. La contribution de chaque tube d'induction étant nulle, l'énergie totale  $W_a$  de l'aimant serait nulle.

Mais le résultat précédent est inexact parce que la formule  $w = \frac{1}{8\pi} (\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{D} \cdot \vec{E})$  donnant la densité de l'énergie électromagnétique n'est pas ici applicable. Sa démonstration à partir des équations de Maxwell se fait en effet de la façon suivante. On part des équations classiques

$$(39) \quad \begin{aligned} -\frac{1}{c} \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} &= \text{rot } \vec{E} & \text{div } \vec{B} &= 0 \\ \frac{1}{c} \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} &= \text{rot } \vec{H} - \frac{4\pi}{c} \vec{i} & \text{div } \vec{D} &= 4\pi \rho \end{aligned}$$

ou  $\rho$  et  $\vec{i}$  sont les densités de charge et de courant. On multiplie scalairement la troisième équation par  $\vec{E}$  en remarquant que le travail élémentaire du champ sur les charges par unités de temps et de volume est  $\vec{E} \cdot \vec{i}$  et l'on obtient pour ce travail l'expression

$$(40) \quad \partial \varepsilon = \vec{E} \cdot \vec{i} = \frac{c}{4\pi} \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} - \frac{1}{4\pi} \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}.$$

Le travail total par unité de temps s'obtient en intégrant cette expression dans l'espace. Si l'on suppose les champs nuls à l'infini, on

obtient, par une intégration par parties avec emploi de la première relation de Maxwell, comme expression du travail effectué par unité de temps par le champ électromagnétique sur les charges

$$(41) \quad \tau = -\frac{1}{4\pi} \iiint \left[ \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right] d\tau.$$

Si l'on admet que les champs et les inductions sont liés par les relations

$$(42) \quad \vec{B} = \mu \vec{H} \quad \vec{D} = \chi \vec{E}$$

où  $\mu$  et  $\chi$  sont des constantes dans le temps, on a

$$(43) \quad \tau = -\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{8\pi} \iiint (\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{D} \cdot \vec{E}) d\tau \right]$$

ce qui conduit à attribuer à l'énergie électromagnétique la valeur

$$(44) \quad W = \frac{1}{8\pi} \iiint [\vec{B} \cdot \vec{H} + \vec{D} \cdot \vec{E}] d\tau$$

Mais cette relation n'est démontrée qu'en admettant une relation linéaire entre les inductions et les champs et une telle relation n'est pas satisfaite à l'intérieur des aimants permanents.

En effet, dans un aimant permanent idéal, l'intensité d'aimantation a en chaque point une valeur  $\vec{I}_0$  qui, par définition est indépendante du champ magnétique  $\vec{H}$ . On a donc dans l'aimant :

$$(45) \quad \vec{B} = \vec{H} + 4\pi \vec{I}_0$$

et  $\vec{B}$  n'est pas proportionnel à  $\vec{H}$ . De la formule (41) qui est toujours valable, on tire ici, puisque  $\vec{D} = \vec{E} = 0$  et que  $\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}$  aussi bien dans l'aimant qu'hors de l'aimant,

$$(46) \quad \tau = -\frac{1}{4\pi} \iiint \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} d\tau = -\frac{d}{dt} \left[ \frac{1}{8\pi} \iiint H^2 d\tau \right].$$

L'énergie propre de l'aimant est donc égale à

$$(47) \quad W_a = \frac{1}{8\pi} \iiint H^2 d\tau$$

et non à (38).



Nous allons vérifier ce résultat en considérant le cas schématique d'un barreau magnétique rectiligne de section droite  $S$  et de longueur  $l$  dont les extrémités sont supposées porter une densité uniforme de magnétisme égale à  $\pm\sigma$  de sorte que les charges magnétiques des extrémités sont  $\pm Q = \pm\sigma S$ .

$$-Q \begin{array}{c} \overline{\hspace{1.5cm}} \\ \boxed{S \quad S} \\ \overline{\hspace{1.5cm}} \end{array} \begin{array}{c} + \\ + \\ + \end{array} + Q$$

Le moment magnétique de l'aimant étant  $Ql = \sigma Sl$ , l'intensité d'aimantation  $I_0$  est égale à  $\sigma$  et l'énergie propre du barreau est d'après (47)

$$(48) \quad W_a = \frac{1}{8\pi} \iiint H^2 d\tau = \frac{1}{8\pi} \iiint BH d\tau - \frac{1}{2} \iiint I_0 H d\tau \\ = \frac{1}{8\pi} \iiint BH d\tau - \frac{\sigma}{2} \iiint H dl$$

la première intégrale étant étendue à tout l'espace et la seconde à l'intérieur de l'aimant. Mais le raisonnement fait précédemment montre que la première intégrale est nulle et comme  $H$  est constant dans l'aimant

$$(49) \quad W_a = W_0 = -\frac{\sigma_0 S}{2} \int H dl = -\frac{Q}{2} \int H dl = \frac{QV}{2}$$

$V$  étant la différence de potentiel magnétique entre les deux extrémités de l'aimant.

La formule (49) est satisfaisante car elle est entièrement analogue à celle qui donne l'énergie d'un condensateur plan dont les armatures porteraient une charge  $Q$  et présenteraient entre elles une différence de potentiel  $V$  avec cette seule différence qu'ici  $Q$  et  $V$  sont des charges et des potentiels magnétiques.

L'expression que nous avons trouvée pour l'énergie propre d'un aimant permanent va nous permettre de donner une démonstration du théorème dû à Vaschy suivant lequel il n'y a pas d'énergie mutuelle entre aimants permanents et courants.

**6. Théorème de Vaschy.** Le théorème de Vaschy peut s'énoncer ainsi: «L'énergie mutuelle des aimants permanents (ideaux) et des courants est nulle».

Soit un ensemble de courants et d'aimants permanents ideaux placés dans un milieu non polarisable ( $\mu = \chi = 1$ ). Le champ magnétique  $\vec{H}$  en

un point du milieu est la somme géométrique du champ  $\vec{H}_c$  créé par les courants et du champ  $\vec{H}_a$  créé par les aimants

$$(50) \quad \vec{H} = \vec{H}_c + \vec{H}_a.$$

Puisque, d'après ce que nous avons vu, la densité de l'énergie est partout égale, même à l'intérieur des aimants, à  $\frac{H^2}{8\pi}$ , l'énergie totale du système est

$$(51) \quad W = \frac{1}{8\pi} \iiint (\vec{H}_a + \vec{H}_c)^2 d\tau = \frac{1}{8\pi} \iiint H_a^2 d\tau + \\ + \frac{1}{8\pi} \iiint H_c^2 d\tau + \frac{1}{4\pi} \iiint \vec{H}_c \cdot \vec{H}_a d\tau.$$

La première intégrale est égale à l'énergie propre des aimants; la seconde est égale à l'énergie des courants et des transformations de calcul classiques montreraient qu'elle vaut  $\frac{1}{2} \sum_{kk'} M_{kk'} I_k I_{k'}$ . Enfin, la dernière intégrale de (51) doit évidemment donner l'énergie mutuelle des aimants et des courants. Mais le champ magnétique créé par les courants dérive d'un potentiel-vecteur  $\vec{A}$ , tandis que le champ magnétique créé par les aimants dérive d'un potentiel magnétique de sorte que l'on a

$$(52) \quad \vec{H}_c = \text{rot } \vec{A} \quad \vec{H}_a = -\text{grad } V.$$

Une intégration par parties donne alors pour l'énergie mutuelle des aimants et des courants la valeur

$$(53) \quad -\frac{1}{4\pi} \iiint \vec{H}_c \cdot \text{grad } V d\tau = \frac{1}{4\pi} \iiint V \text{div } \vec{H}_c d\tau = 0$$

car  $\text{div rot } \vec{A} = 0$ .

L'énergie mutuelle en question est donc bien nulle en accord avec le résultat précédemment obtenu, mais nous allons encore regarder la question de plus près.

**7. Examen détaillé du cas de deux circuits indéformables.** Soient deux circuits supposés pour simplifier indéformables. Désignons les par 1 et 2 et soient  $I_1$  et  $I_2$  les intensités de courant qui les parcourent.

D'après les formules générales du paragraphe 4,  $\alpha$ , l'énergie  $W$  et l'énergie libre  $F$  du système sont données par

$$(54) \quad W = -F = \frac{1}{2} L_1 I_1^2 + \frac{1}{2} L_2 I_2^2 + M_{12} I_1 I_2$$

$L_1$  et  $L_2$  étant les coefficients de selfinduction des deux circuits,  $M_{12}$  leur coefficient d'induction mutuelle. Si nous déplaçons le circuit 2 par rapport au circuit 1, les coefficients  $L_1$  et  $L_2$  ne varient pas puisque les circuits sont supposés indéformables, mais  $M_{12}$  varie.

Supposons d'abord qu'on maintienne les intensités  $I_1$  et  $I_2$  constantes pendant le déplacement du circuit 2. Comme le flux magnétique envoyé par chaque circuit à travers l'autre varie, il naît dans chacun d'eux une force électromotrice d'induction et pour empêcher les courants de varier, il faut contrebalancer ces forces électromotrices en introduisant dans les circuits des électromoteurs de force électromotrice  $e_1$  et  $e_2$  de valeur appropriées. Les lois de l'induction et la définition des coefficients d'induction mutuelle montrent qu'on doit avoir

$$(55) \quad e_1 = \frac{\partial}{\partial t}(M_{12} I_2) = I_2 \frac{\partial M_{12}}{\partial t}; \quad e_2 = \frac{\partial}{\partial t}(M_{21} I_1) = I_1 \frac{\partial M_{12}}{\partial t}$$

L'énergie fournie par les électromoteurs pendant un déplacement élémentaire est donc égal à

$$(56) \quad e_1 I_1 dt + e_2 I_2 dt = 2 I_1 I_2 dM_{12}$$

D'autre part, le travail effectué par les forces électrodynamiques sur le circuit 2 pendant le déplacement élémentaire est  $I_1 I_2 dM_{12}$ . Enfin l'énergie  $W$  subit la variation

$$(57) \quad dW = I_1 I_2 dM_{12}$$

Finalement l'énergie fournie par les électromoteurs  $e_1$  et  $e_2$  sert par moitié à compenser le travail accompli par les forces électrodynamiques et par moitié à augmenter la réserve d'énergie magnétique  $W$ . Ceci est conforme à la théorie générale puisqu'ici la variation s'opère à  $I_k$  constants, donc à  $q_k$  constants.

Considérons maintenant une variation à  $p_k$  constants. Les  $p_k$  donnés par

$$(58) \quad p_1 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_1} = L_1 I_1 + M_{12} I_2; \quad p_2 = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I_2} = L_2 I_2 + M_{21} I_1$$

sont les flux magnétiques à travers les deux circuits. Pour qu'ils restent constants, il faut que les variations de  $I_1$ ,  $I_2$  et  $M_{12}$  soient telles que

$$(59) \quad -dM_{12} = \frac{1}{I_2} [L_1 dI_1 + M_{12} dI_2] = \frac{1}{I_1} [L_2 dI_2 + M_{12} dI_1].$$

Le travail des forces électrodynamiques est ici d'après la théorie générale

$$(60) \quad I_1 I_2 dM_{12} = -\frac{1}{2} [L_1 I_1 dI_1 + M_{12} I_2 dI_1 + L_2 I_2 dI_2 + M_{12} I_1 dI_2].$$

Or cette expression est égale à  $-dW$  car

$$(61) \quad W = \frac{1}{2} (p_1 I_1 + p_2 I_2); \quad dW = \frac{1}{2} [p_1 dI_1 + p_2 dI_2]$$

puisque les  $p$  restent constants et (61) montre bien que  $-dW$  est égal au second membre de (60). Donc ici, toujours en accord avec la théorie générale, le travail des forces électrodynamiques est égal à la diminution de la réserve d'énergie magnétique localisée autour des circuits, de sorte que toute fourniture d'énergie extérieure est inutile.

8. Examen détaillé du cas d'un circuit indéformable en présence d'un aimant permanent idéal. Nous allons maintenant remplacer l'un des circuits par un aimant permanent idéal. D'après les formules du paragraphe 4, *b*, nous avons alors pour  $W$  et  $F$  les expressions

$$(62) \quad W = W_0 + \frac{1}{2} LI^2; \quad F = W_0 - \Phi I - \frac{1}{2} LI^2 = -\mathcal{E}$$

$L$  étant le coefficient de selfinduction du circuit parcouru par le courant  $I$ ,  $\Phi$  le flux que l'aimant envoie dans ce circuit et  $W_0$  l'énergie propre de l'aimant.

Déplaçons le circuit par rapport à l'aimant en maintenant  $I$  constant. Le flux  $\Phi$  variant, il nous faut pour cela introduire dans le circuit une force électromotrice de valeur  $e = \frac{\partial \Phi}{\partial t}$  pour compenser la force électromotrice d'induction.

L'énergie fournie par l'électromoteur est pendant le temps  $dt$

$$(63) \quad eI dt = I \frac{\partial \Phi}{\partial t} dt = Id\Phi.$$

Or, le travail des forces électrodynamiques est aussi égal à  $Id\Phi$ . Donc ici l'énergie fournie par l'électromoteur compense le travail des forces électrodynamiques et il n'y a pas à faire intervenir une énergie mutuelle de l'aimant permanent et du courant, ce qui confirme les résultats précédents. Comme nous opérons à  $\dot{q} = I$  constant, nous avons bien pour le travail des forces électrodynamiques

$$(64) \quad [d\mathcal{E}_i]_q = - [dF]_q = Id\Phi$$

comme le veut la théorie générale.

Ici  $p = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial I} = LI + \Phi$  est encore le flux magnétique total à travers le circuit. Si, au lieu d'opérer à  $I$  constant, on opérerait à  $p$  constant, on aurait

$$(65) \quad dW = LI dI = - Id\Phi$$

et comme le travail des forces électrodynamiques est toujours  $Id\Phi$ , on a conformément à la théorie générale

$$(66) \quad [d\bar{c}_i]_p = - [dW]_p.$$

On voit bien par les raisonnements qui précèdent pourquoi dans le cas de deux circuits, il faut admettre l'existence d'une énergie mutuelle localisée dans le milieu ambiant, tandis qu'une telle supposition est inutile dans le cas d'un circuit en présence d'un aimant permanent idéal.

9. Un travail d'André Blondel. Dans certains traités de Physique, on trouve des énoncés de la loi de l'induction tels que celui-ci : « Quand, pour une cause quelconque, le flux d'induction magnétique qui traverse un circuit vient à varier, une force électromotrice d'induction apparaît dans ce circuit ». Un tel énoncé est trop général. Le flux peut, en effet varier de deux manières : d'abord l'induction magnétique à l'endroit où se trouve le circuit peut varier au cours du temps  $\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t} \neq 0\right)$ ; ensuite le circuit peut se déformer ou se déplacer. Mais pour que, dans ce dernier cas, il y ait apparition d'une force électromotrice d'induction, il faut que le circuit dans son déplacement coupe les lignes d'induction magnétique. Du point de vue électronique, ceci est évident car la force subie par les électrons du circuit est  $\frac{e}{c}[\vec{v} \times \vec{B}]$  et la force électromotrice qui en résulte dans un élément  $dl$  du circuit est proportionnelle à la composante suivant  $dl$  de l'ensemble des forces agissant sur les électrons, soit à  $\vec{dl} \cdot [\vec{v} \times \vec{B}] = \vec{B} \cdot [\vec{dl} \times \vec{v}]$ . Comme  $[\vec{dl} \times \vec{v}]$  est un vecteur normal à la surface balayée en l'unité de temps par l'élément de circuit et égal à son aire,  $\vec{B} \cdot [\vec{dl} \times \vec{v}]$  est le flux coupé par unité de temps par l'élément  $dl$ . Si donc il est possible de faire varier le flux d'induction à travers le circuit sans qu'il y ait de flux coupé, il n'y aura pas de force électromotrice induite contrairement à l'énoncé trop général des lois de l'induction rappelé ci-dessus.

André Blondel dans un travail très original<sup>1</sup> a étudié de près cette

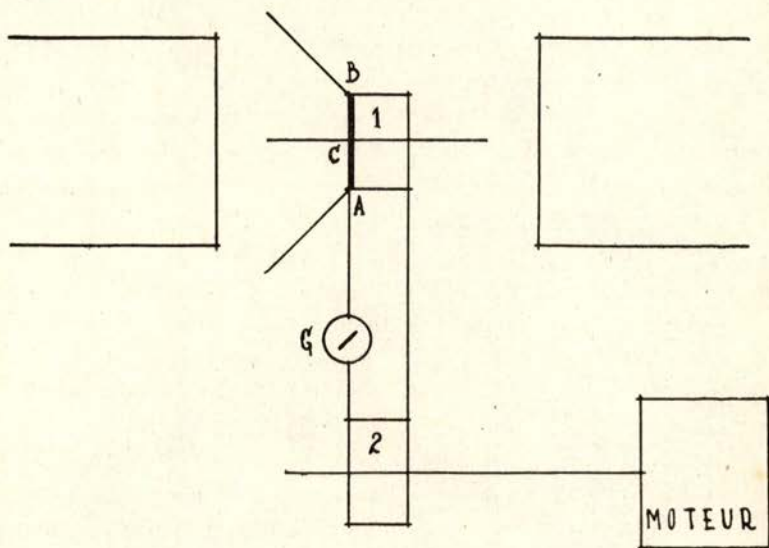
<sup>1</sup> Comptes rendus Académie des Sciences — t. 159 (1914) p. 676 et 788.

question. Nous considérerons avec lui une bobine de  $N$  spires égales placée dans un champ magnétique uniforme et soit  $\varphi$  le flux d'induction à travers une spire. Le flux total est  $\Phi = N\varphi$  et, si nous faisons varier  $N$  en enroulant ou en déroulant la bobine, le flux variera suivant la loi

$$(67) \quad \frac{d\Phi}{dt} = \varphi \frac{dN}{dt}.$$

Blondel a montré expérimentalement que, si le déroulement de la bobine s'opère sans qu'aucune ligne de force magnétique ne soit coupée par une portion du circuit, ce qui, nous allons le voir, est possible, aucune force électromotrice d'induction ne prend naissance.

Blondel a monté une bobine 1 pouvant tourner autour d'un axe et l'a placée dans un électroaimant de façon que les lignes de force traversent normalement la bobine.



Une autre bobine semblable 2 est placée parallèlement à la première en dehors du champ de l'électroaimant et peut tourner autour de son axe sous l'action d'un moteur électrique. Quand le moteur fait tourner la bobine 2, le fil se déroule de 1 pour venir s'enrouler sur 2. La bobine 1 est flanquée latéralement d'un disque en cuivre  $AB$  percé en son centre par un trou qui laisse passer l'axe. Ce disque reste immobile et un point fixe du bord de son trou central est relié par un galvanomètre  $G$  à la bobine 2. L'extrémité gauche fixe de la bobine 1 est reliée à un balai qui frotte sur le bord du disque  $AB$ . De cette

façon, pendant le déroulement, il n'y a aucun flux coupé par le fil en mouvement normalement aux lignes de force. Il faut naturellement que le disque  $AB$  soit fixe, car, s'il tournait on aurait une roue de Barlow et il y aurait une force électromotrice induite. Grâce à cet ingénieux dispositif, André Blondel a pu vérifier expérimentalement qu'il n'y avait pas de force électromotrice induite par le déroulement de la bobine.

Après avoir effectué cette expérience, André Blondel a eu l'idée intéressante de l'utiliser pour démontrer l'absence d'énergie mutuelle entre courant et aimant permanent. Pour cela, il a simplement imaginé que l'on renverse le sens de l'expérience qu'il avait effectuée, c'est à dire que l'on enroule la bobine 1 au lieu de la dérouler. Pendant le processus d'enroulement, il n'y aura évidemment, d'après le résultat de l'expérience directe, aucune force électromotrice induite dans le circuit et aucun travail ne sera effectué par le champ magnétique puisque le fil, pendant l'enroulement, se meut normalement à la force électrodynamique de Laplace. C'est cette absence de force électromotrice d'induction et de travail fourni que sert de base au raisonnement de Blondel.

Pour bien rendre clair ce raisonnement, supposons d'abord que l'on fasse l'enroulement de la bobine en dehors de tout champ magnétique, le circuit étant parcouru par un courant  $I$  maintenu constant. L'énergie magnétique de la bobine, qui était nulle au début quand la bobine n'existait pas encore, est à la fin égale à  $\frac{1}{2} LI^2$ ,  $L$  étant la self de la bobine une fois qu'elle est enroulée. Cette réserve d'énergie magnétique est égale au travail nécessaire pour enrouler la bobine et l'ensemble de ces deux énergies est fourni par la force électromotrice qui, dans le circuit, maintient à sa valeur constante l'intensité  $I$ . Ceci résulte de la théorie générale<sup>1</sup>.

Supposons maintenant que l'enroulement de la bobine ait lieu en présence d'un champ magnétique avec le dispositif de Blondel. Le champ peut être dû à une autre bobine (solénoïde) ou à un aimant permanent. Dans un cas comme dans l'autre, il n'y a aucune réaction du champ sur la bobine et la création de la réserve  $\frac{1}{2} LI^2$  d'énergie magnétique aura lieu exactement comme en l'absence de champ. Examinons la réaction de la formation de la bobine sur la source du champ magnétique.

Si le champ magnétique est créé par un aimant permanent idéal, la formation de la bobine fait apparaître un champ magnétique à l'endroit où se trouve l'aimant, mais d'après la définition que nous avons donnée

<sup>1</sup> Ce point n'est pas clairement indiqué dans le travail de Blondel.

d'un aimant permanent idéal, celui-ci n'en est aucunement affecté. Il n'y a donc aucune réaction de l'aimant sur la bobine, ni de la bobine sur l'aimant pendant l'enroulement. Il ne peut donc y avoir aucune réserve d'énergie mutuelle entre le circuit et l'aimant. Blondel tire ainsi du fait expérimental qu'il a observé une ingénieuse démonstration directe de l'absence de toute énergie mutuelle entre aimant permanent et courant.

Pour être complet, examinons ce qui se passe quand le champ magnétique est créé par un solénoïde parcouru par un courant  $i$ . Pendant que s'opère l'enroulement de la bobine, elle envoie un flux croissant dans le solénoïde qui est par suite le siège d'une force électromotrice d'induction égale à  $-I \frac{dM}{dt}$ . Pour maintenir constante la valeur  $i$  du courant dans le solénoïde, il faut introduire dans son circuit d'alimentation une force électromotrice constante égale à  $I \frac{dM}{dt}$ .

Cette force électromotrice fournit pendant un temps  $dt$  une énergie égale à  $iI dM$  et si  $M$  désigne la valeur finale du coefficient d'induction mutuelle entre la bobine et le solénoïde quand la bobine est enroulée, l'énergie totale ainsi fournie est égale à  $Mi$ : elle se retrouve emmagasinée dans le milieu extérieur sous forme d'énergie mutuelle.

En comparant ce dernier raisonnement à ceux que nous avons fait précédemment, aux paragraphes 7 et 8, pour le cas où l'on rapproche un circuit d'un autre circuit ou d'un aimant permanent, on arrive à la curieuse conclusion suivante: avec le dispositif d'enroulement et de déroulement imaginé par Blondel et bien qu'il y ait ici deux circuits en présence, tout se passe, en raison de l'absence de toute action du champ magnétique sur la bobine s'enroulant, comme si l'on approchait du solénoïde producteur du champ un aimant permanent: les phénomènes énergétiques sont les mêmes que dans ce dernier cas et ne sont pas les mêmes que ceux qui auraient lieu si l'on rapprochait deux circuits. Dans le rapprochement de deux circuits, on aurait pour maintenir les intensités constantes à fournir la même quantité d'énergie dans chacun d'eux et l'énergie totale ainsi fournie au système servirait par moitié à vaincre la résistance des forces électrodynamiques et par moitié à emmagasiner dans l'espace extérieur une réserve d'énergie magnétique mutuelle. Dans le cas de Blondel, on ne fournit de l'énergie électrique qu'au solénoïde et l'énergie ainsi fournie au système est moitié moindre; mais, comme il n'y a pas de travail à fournir contre les forces électrodynamiques, toute cette énergie est emmagasinée dans le milieu extérieur et la réserve d'énergie mutuelle est la même.



On voit par ces considérations que dans tous les cas (aimant permanent ou solénoïde), l'expression imaginée par Blondel se prête à des interprétations théoriques très intéressantes.

10. L'inexistence d'énergie mutuelle entre courants et aimants et le spin de l'électron. L'inexistence d'énergie mutuelle entre courants et aimants permanents a été contestée. Le principal argument des adversaires de ce résultat est le suivant: "Nous savons depuis Ampère que le magnétisme a pour origine les courants particuliers qui ont lieu dans la substance de l'aimant et les découvertes modernes, précisant les vues d'Ampère, ont montré que ces courants sont dus à la circulation des électrons dans les édifices atomiques ou moléculaires. Quand on met un aimant en présence d'un circuit parcouru par un courant, tout doit donc se passer comme si l'on mettait ce courant en présence d'autres petits courants. Puisqu'il existe une énergie mutuelle entre courants, il doit donc y avoir aussi une énergie mutuelle entre courants et aimants".

Mais, s'il est vrai que le diamagnétisme s'explique par la présence dans les atomes d'électrons en mouvement (théorie de Langevin), par contre le ferromagnétisme se rattache intimement au *spin* des électrons et non à leur mouvement orbital. Or le spin de l'électron *ne peut pas se ramener à une circulation d'électricité qui serait soumise à des effets d'induction en présence d'un champ magnétique variable*. Au point de vue énergétique, l'électron doué de spin se comporte dans un champ extérieur comme un petit aimant et non comme un petit courant, et ceci explique pourquoi un aimant permanent macroscopique dont l'existence est rendue possible par le spin de l'électron n'a pas d'énergie mutuelle avec un courant.

On doit donc, nous semble-il, en conclure: 1.<sup>o</sup> que la théorie des courants particuliers d'Ampère ne donne pas une image exacte de l'origine du ferromagnétisme; 2.<sup>o</sup> que le théorème de Vaschy sur l'inexistence d'une énergie mutuelle entre aimants permanents et courants, bien que pouvant être démontré par la théorie électromagnétique la plus classique, ne s'explique réellement que par l'existence du spin. Celle-ci s'introduit implicitement dans le raisonnement électromagnétique quand on postule qu'il peut exister des aimants permanents sensiblement idéaux.

Mais il est finalement curieux de constater que par des raisonnements entièrement classiques, on est ainsi arrivé à établir que le ferromagnétisme ne peut se ramener au mouvement orbital des électrons et par suite à pressentir l'existence du spin.



## LES SPECTRES $L$ ET GAMMA ÉMIS DANS LA TRANSMUTATION $RaD \rightarrow RaE$

par LIDIA SALGUEIRO et MANUEL VALADARES

(Reçu le 31 Mai 1949)

Introduction. Pendant longtemps on a cru, d'après l'analyse du spectre de raies  $\beta$ , que le spectre  $\gamma$  émis dans la transmutation  $RaD \rightarrow RaE$  était monochromatique; ce sont Amaldi et Rasetti [1] qui, les premiers, ont montré que ce spectre était complexe par la méthode d'absorption sélective. Après ce travail, l'étude du spectre  $\gamma + X$  émis par le  $RaD$  a constitué l'objet de nombreuses recherches; il a été étudié, encore par la méthode d'absorption sélective, par Tsien [26,27], par diffraction cristalline par Frilley [8], par Frilley et Tsien [9] et par Salgueiro [19,20], par analyse du spectre de raies  $\beta$  par Ouang, Surugue et Tsien [13] et par Braga [2,3], à l'aide d'une chambre de Wilson par Tsien et Marty [28,29] et, tout récemment, en employant un compteur proportionnel, par Curran, Angus et Cockroft [7].

Dans ce travail nous nous sommes proposé deux buts essentiels:

- 1°. Étudier de nouveau la région du spectre  $L$  de façon à voir dans quelle mesure l'hypothèse des transitions internes  $L_I \rightarrow L_{II}$ ,  $L_{III}$  peut rendre compte de certaines anomalies d'intensité signalées auparavant;
- 2°. Étudier, pour la première fois, par spectrographie cristalline, la région spectrale de longueurs d'onde supérieures au spectre  $L$ .

Installation spectrographique. Nous avons employé un spectrographe de Bragg, monté avec un cristal de sel gemme et qui a été déjà décrit [19,20]. La source radioactive était formée par deux vieilles aiguilles de radon, placées sur un support de verre. L'intensité de chaque aiguille, au moment de son remplissage (1940), était de 700 millicuries. Le rayonnement  $\gamma$  était canalisé par les pièces polaires d'un électro-aimant, qui déviait le rayonnement  $\beta$ . Les pièces polaires de l'électro-aimant se terminaient par des surfaces rectangulaires de  $5,0 \times 2,3$  cm<sup>2</sup> et l'entrefer était de 1,2 mm. La distance entre l'axe de rotation du cristal et le film photographique était de 76 mm. Le châssis était en aluminium avec une fenêtre de  $7,5 \times 3,5$  cm<sup>2</sup>; on a employé des films Ilford pour rayons X avec un écran renforteur placé derrière le film; une feuille de papier noir couvrait le film pour empêcher que

celui-ci soit voilé par la lumière de fluorescence émise par la source.

Nous avons placé le spectrographe dans un vaste récipient cylindrique (volume: 400 litres) en fer dans lequel on maintenait le vide pendant toute la pose. Ceci nous a réduit notablement le rayonnement diffusé.

Resultats. a) *Région du spectre L*. Le spectre *L* de rayons X d'un élément de numero atomique 83 (transmutation *Ra D* → *Ra E*) s'étend de 755 *U. X.* à 1314 *U. X.* Comme la discontinuité *K* d'absorption du brome se place à 918 *U. X.* il est très difficile, par la méthode photographique, de comparer les intensités des raies de part et d'autre de cette discontinuité. Pour cette raison, nous nous sommes bornés, dans ce travail, à étudier la région spectrale de longueur d'onde supérieure à 918 *U. X.* Dans cette région nous avons observé quatre raies qui correspondent à  $\beta_3$ ,  $\beta_{1,2}$ ,  $\beta_4$  et  $\alpha_1$ . Dans le tableau suivant nous donnons les longueurs d'onde et les intensités (mesure visuelle) des quatre raies d'après Frilley et Tsien et suivant nos résultats.

Raie	Frilley et Tsien		Salgueiro et Valadares	
	$\lambda$ ( <i>U. X.</i> )	<i>I</i>	$\lambda$ ( <i>U. X.</i> )	<i>I</i>
$\beta_3$ .....	937	15	935	40
$\beta_{1,2}$ .....	950	100	956	95
$\beta_4$ .....	975	30	983	45
$\alpha_1$ .....	1140	60	1146	100

En ce qui concerne les longueurs d'onde l'accord est tout à fait satisfaisant étant donné le faible pouvoir dispersif de notre spectrographe.

Pour les intensités, il y a un certain nombre de différences qui, pourtant, semblent pouvoir s'expliquer. Tout d'abord, dans le spectre de rayons X produit par bombardement cathodique la raie  $\beta_3$  est plus intense que  $\beta_4$  ( $\beta_3 : \beta_4 = 8 : 5$ ) tandis que dans les mesures de Frilley et Tsien  $\beta_3$  est plus faible que  $\beta_4$  ( $\beta_3 : \beta_4 = 15 : 30$ ). Frilley et Tsien ont expliqué cette divergence par le fait que la source employée contenait du plomb et comme la discontinuité d'absorption  $L_{III}$  de cet élément (949 *U. X.*) tombe entre  $\beta_3$  et  $\beta_4$ , la première de ces deux raies est beaucoup plus absorbée que la seconde. Dans nos expériences le rapport est déjà  $\beta_3 : \beta_4 = 40 : 45$  ce qui s'explique par le fait que dans notre source, seule, la faible quantité de plomb existant dans le verre des aiguilles peut intervenir comme absorbant.

D'autre part, dans nos expériences, la raie  $\alpha_1$  est plus intense que  $\beta_{1,2}$ , contrairement à ce que signalent Frilley et Tsien. Cette différence peut être encore, nous le croyons, expliquée par la différence

de constitution des sources et par le fait que nous travaillons dans le vide. D'ailleurs, nous n'avons pas fait la correction correspondante à l'absorption du rayonnement dans le verre de l'aiguille, correction qui conduirait à augmenter encore l'intensité de  $\alpha_1$  par rapport à celle des raies  $\beta_{1,2}$ . Remarquons, en tous cas, que le rapport  $\beta_4 : \alpha_1$  (celui qui va nous servir par la suite) est pratiquement le même dans les mesures de Frilley et Tsien et dans nos mesures.

Lorsqu'on compare les intensités des raies du spectre  $L$  dû à la conversion interne avec les intensités des mêmes raies dans le spectre de rayons X excité par bombardement cathodique, on remarque que, par rapport à  $\alpha_1$  les intensités des raies  $\beta_3$  et  $\beta_4$  sont beaucoup plus élevées. Nous ne considérons pas la raie  $\beta_{1,2}$  parce qu'il s'agit d'une raie double appartenant à deux spectres  $L$  différents :  $\beta_1(L_{II}M_{IV})$ ,  $\beta_2(L_{III}N_V)$ . Comme la raie  $\beta_3$  présente une intensité affaiblie du fait de l'absorption dans le plomb, nous allons considérer seulement le rapport d'intensité  $\alpha_1 : \beta_4$ ; ainsi, par bombardement cathodique, on a  $\alpha_1 : \beta_4 = 100 : 5$  tandis que nous avons déterminé  $\alpha_1 : \beta_4 = 100 : 45$ .

Or, de prime abord, l'accroissement d'intensité de  $\beta_4$  semble être encore très inférieur à ce qu'on devrait attendre. En effet, le rapport des atomes ionisés dans les niveaux  $L_I$  et  $L_{III}$  est, d'après les mesures du spectre de raies  $\beta$ ,  $92 : 3$ , tandis que ce même rapport, dans le cas du bombardement cathodique doit être, d'après le calcul,  $22 : 55$ . C'est-à-dire, pour une même intensité des raies  $\alpha$  (niveau  $L_{III}$ ) sur les spectres dûs à la conversion interne et au bombardement cathodique, on devrait avoir sur le premier de ces spectres la raie  $\beta_4$  (niveau  $L_I$ ) soixante-dix fois plus intense que dans le spectre d'un tube à rayons X. Or, l'expérience montre, comme nous venons de le voir, que l'intensité de  $\beta_4$  est seulement multipliée par 9. Comment expliquer cette divergence?

Nous croyons que l'hypothèse avancée par Coster et Kronig [5] des passages électroniques de  $L_{III}$  et  $L_{II}$  vers  $L_I$  (avec émission d'électrons Auger), hypothèse qui a permis d'interpréter d'une façon parfaitement satisfaisante les faits les plus saillants des spectres de raies satellites de la couche  $L$  [10, 18], permettra encore dans le domaine de la radioactivité d'expliquer les faits observés.<sup>1</sup>

Tâchons, alors, d'appliquer cette hypothèse au cas des spectres  $L$  résultant du phénomène de conversion interne. Comme nous l'avons vu, la proportion entre le nombre d'électrons expulsés de  $L_I$  et  $L_{III}$  est de  $92 : 3$ . Pour calculer le nombre de photons produits par des atomes ionisés en  $L_I$  il faut connaître le coefficient de fluorescence correspondant.

<sup>1</sup>Récemment Tomboulian [25] a pu mettre en évidence l'existence d'un rayonnement dans le spectre de rayons X du soufre correspondant aux passages  $L_I \rightarrow L_{II}, L_{III}$ .

Bien que les calculs ne conduisent pas à des valeurs très concordantes il semble qu'on peut prendre la valeur 0,14 [6,14 a 17] ce qui conduit à admettre que du remplissage des 92 places vides de  $L_I$  résulte l'émission de 13 photons du spectre  $L_I$ . Or, les 79 places restantes ( $92 - 13$ ) ont été occupées, pour la plupart, par des électrons de  $L_{III}$  avec émission d'un autre électron, c'est-à-dire, laissant l'atome doublement ionisé; on peut calculer que 66 des 79 places vides restantes ont été occupées par des électrons de  $L_{III}$ . Dans ces conditions on aura, au total,  $69 = 66 + 3$  places libres en  $L_{III}$ , dont 3 correspondant à des atomes monoionisés et 66 à des atomes doublement ionisés.

Nous prendrons pour le coefficient de fluorescence des atomes monoionisés de  $L_{III}$  la valeur 0,37 (moyenne des valeurs théoriques et expérimentales) [6, 11, 12, 14 a 17, 23, 24] et pour le coefficient des atomes doublement ionisés la moitié. Par conséquent, le remplissage des 69 places vides de  $L_{III}$  donnera lieu à l'émission de 14 photons du spectre  $L_{III}$ . Le résultat final est que les sommes des intensités des raies du spectre  $L_I$  et du spectre  $L_{III}$  sont dans le rapport de  $13 : 14 = 93 : 100$ . Si on reproduit, maintenant, le même raisonnement pour le cas des atomes ionisés par choc électronique (tube à rayons X) on trouve le rapport  $3 : 23 = 13 : 100$ .

On conclut, par conséquent, que, pour une même intensité du spectre  $L_{III}$ , le spectre  $L_I$  émis au cours de la transmutation  $Ra D \rightarrow Ra E$  doit être sept fois plus intense que celui d'un tube à rayons X.

On voit ainsi que l'hypothèse des passages internes  $L_I \rightarrow L_{III}$  a permis de descendre du facteur d'agrandissement 70 — que l'expérience rejetait indiscutablement — au facteur 7.

Comme nous ne pouvons pas, d'après les résultats de nos expériences, déterminer la somme des intensités de toutes les raies appartenant soit au spectre  $L_I$ , soit au spectre  $L_{III}$ , nous nous bornerons à faire la comparaison entre les intensités de deux raies:  $\alpha_1(L_{III}M)$  et  $\beta_4(L_I N)$ . Nous admettrons que lorsque l'intensité totale des raies d'un spectre est multipliée par un certain facteur, l'intensité de chaque raie est multipliée par le même facteur; cette hypothèse est pourtant, comme nous le verrons par la suite, susceptible d'être critiquée. Ainsi, tandis que dans le spectre de rayons X le rapport d'intensité  $\alpha_1 : \beta_4$  est  $100 : 5$ , dans le spectre de fluorescence il doit être, d'après le calcul précédent,  $100 : 35$ ; l'expérience nous a conduit à la valeur  $\alpha_1 : \beta_4 = 100 : 45$ .

Les tableaux suivants résument les calculs précédents et mettent en évidence les résultats de l'expérience et ceux de la théorie suivant qu'on admet ou non l'existence des passages électroniques de  $L_{II}$  et  $L_{III}$  vers  $L_I$ .

Etant donnée l'imprecision des coefficients théoriques que nous avons

TABEAU I

Niveaux	Spectre <i>L</i> (conversion interne)					Spectre <i>L</i> (bombardement cathodique)							
	I	II	III	IV	III+IV	V	I'	II'	III'	IV'	III'+IV'	V'	V/IV'
<i>L<sub>I</sub></i>	92	—	0,14×92	13	—	13	22	—	0,14×22=3	—	3	0,13	7,0
<i>L<sub>III</sub></i>	3	0,72×92=66	0,37×3=1	0,19×66=13	14	0,93	55	0,72×22=16	0,37×55=20	0,19×16=3	23		

I — Nombre d'atomes monoionisés correspondant à la conversion interne du rayonnement  $\gamma$ .

II — Nombre d'atomes monoionisés résultant du bombardement cathodique.

III et IV — Nombre d'atomes doublement ionisés résultant des passages électroniques de *L<sub>III</sub>* vers *L<sub>I</sub>*; 0,72 est le pourcentage d'atomes monoionisés en *L<sub>I</sub>* qui deviennent doublement ionisés en *L<sub>III</sub>* et dans un niveau extérieur.

III et III' — Nombre de photons émis par les atomes de la colonne I ou I'; 0,14 e 0,37 sont les coefficients de fluorescence de *L<sub>I</sub>* et *L<sub>III</sub>*.  
 IV et IV' — Nombre de photons émis par les atomes de la colonne II ou II'; 0,19 est le coefficient de fluorescence de *L<sub>III</sub>* pour les atomes doublement ionisés.

V et V' — Rapport du nombre de photons du spectre *L<sub>I</sub>* au nombre de photons du spectre *L<sub>III</sub>*.

TABEAU II

Raies	I	II	III	IV
$\beta_1 (L_I M_{II}) \dots$	5	383	35	45
$\alpha_1 (L_{III} M_V) \dots$	100	100	100	100

I — Intensités observées dans le spectre *L* de rayons X (bombardement cathodique).

II — Intensités calculées sans tenir compte des passages *L<sub>I</sub>* → *L<sub>II</sub>* et *L<sub>I</sub>* → *L<sub>III</sub>*.

III — Intensités calculées en admettant les passages *L<sub>I</sub>* → *L<sub>II</sub>* et *L<sub>I</sub>* → *L<sub>III</sub>*; on a employé le facteur 7,0 (tableau antérieur).

IV — Intensités observées dans le spectre *L* résultant de la conversion interne.

employés, aussi bien que l'incertitude dans les résultats expérimentaux, on peut conclure que l'application de l'hypothèse de Coster et Kronig conduit à des valeurs qui sont en bon accord avec l'expérience.

Jusqu'ici nous avons employé la désignation  $Lx_1$  pour la raie dont la longueur d'onde est  $1146 U. X.$ ; il faut pourtant remarquer que cette désignation n'est pas tout à fait juste. En effet, des 69 atomes ionisés seulement 3 sont monoionisés, tandis que 66 sont doublement ionisés; or, les atomes doublement ionisés donnent lieu à des raies satellites de  $Lx$  et par conséquent dans ce spectre de fluorescence doit être la bande satellite, résultant des différentes raies satellites, qui prédomine par rapport à la raie  $\alpha_1$ . Or, comme le maximum de la bande satellite se place à  $1138 U. X.$  si on disposait d'un spectrographe suffisamment précis, on devrait pouvoir constater que le maximum de la bande est déplacé de  $3,5 U. X.$  par rapport à la raie  $\alpha_1$  ( $1141,5 U. X.$ ) émise par un tube à rayons  $X$  dont l'anticathode aurait le numéro atomique 83. Si cette hypothèse se confirme, le fait que ce spectre présente les raies satellites en absence, ou presque, de la raie mère, aurait un gros intérêt pour l'étude expérimentale et théorique des raies satellites; en effet, par l'étude des rayons  $X$  excités par bombardement électronique, on peut connaître soit la raie  $\alpha$  avec satellites, soit sans satellites suivant la tension appliquée au tube [32]; le spectre  $L$  résultant de la conversion interne présenterait seulement la bande satellite avec l'avantage qu'on connaît expérimentalement le nombre d'électrons expulsés de chaque sous niveau  $L$ , ce qui n'arrive pas lorsqu'on excite le spectre de rayons  $X$  par bombardement cathodique.

Pourtant, cette interprétation soulève une difficulté. En effet, la théorie prévoit qu'il doit y avoir deux bandes satellites des raies  $\alpha$ : une placée vers les courtes longueurs d'onde, par rapport à  $\alpha_1$ , et une autre située entre  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ , celle-ci présentant une intensité moitié de la première. Or, soit Frilley et Tsien, soit nous-mêmes, n'avons observé qu'une raie (ou bande) dans cette région. Il est vraie que l'expérience a montré [21, 22, 31] que la bande comprise entre les raies  $\alpha$  est plus faible et plus étalée que la théorie ne le prévoit: pourtant il est assez inexplicable qu'on observe une seule raie. Seulement des nouvelles expériences, disposant d'un pouvoir séparateur plus grand, permettront d'éclaircir cet aspect du problème.

Remarquons, finalement, que le fait qu'il ne s'agit pas de raies, mais plutôt de bandes satellites rend assez criticable l'hypothèse que nous avons faite: les intensités relatives des raies d'un spectre restent les mêmes lorsque l'intensité totale du spectre varie; en effet, si cela est vrai pour le spectre  $L_I$ , vu que soit dans le cas des rayons  $X$ , soit



dans celui résultant de la conversion interne, les raies sont les mêmes, on ne peut pas en dire autant du spectre  $L_{III}$  où les raies du spectre de rayons X sont remplacées, dans le spectre d'émission propre, par des bandes satellites. Il serait aisé de montrer qu'un tel fait porterait à rapprocher les résultats expérimentaux de ceux qu'on déduirait de la théorie des raies satellites, mais cela ne semble pas raisonnable de vouloir donner une forme quantitative à ce raisonnement dans l'état actuel de nos connaissances sur les intensités relatives des bandes satellites.

b) *Région de longueur d'onde supérieure à 1200 U. X.* Dans la région comprise entre 1200 U. X. et 1800 U. X. nous avons observé cinq raies 1315, 1400, 1550, 1690 et 1755 U. X. Bien que ces raies soient toutes assez faibles (les deux moins faibles étant celles de 1400 et 1690 U. X.) leur existence nous semble assurée, parce qu'on les a observées, au moins, sur trois spectrogrammes ; la mesure de leurs longueurs d'onde est pourtant assez imprécise.

La raie de 1315 U. X. pourrait être la raie «*l*» du spectre *L*, mais étant donné l'imprécision de la détermination de sa longueur d'onde, nous ne pouvons pas préciser s'il s'agit d'un rayonnement X ou  $\gamma$  ; d'ailleurs si cette raie a son origine dans le cortège électronique, elle doit correspondre aux raies satellites des raies «*l*» qui ont été observées pour la première fois par Melle. Cauchois dans les spectres de rayons X des éléments à numéro atomique élevé [4].

Toutes les autres raies sont observées pour la première fois à l'exception du rayonnement de 1690 U. X. qui correspond au rayonnement de 7,3 keV découvert par Tsién et Marty (chambre Wilson et absorption) et dont l'existence a été confirmée récemment par Curran, Angus et Cockroft (compteur proportionnel).

On doit finalement remarquer que pour l'étude de cette région spectrale nos conditions de travail étaient défavorables parce qu'on employait une source fermée (absorption dans la paroi de verre).

## BIBLIOGRAPHIE

- [ 1]. E. AMALDI ET F. RASETTI, *Ricerca Scient.*, 10, p. 111, 1939.
- [ 2]. C. BRAGA, *Port. Phys.*, 1, p. 159, 1944.
- [ 3]. C. BRAGA, Thèse, Porto, 1944.
- [ 4]. Y. CAUCHOIS, *C. R. Acad. Sc. Paris.*, 222, p. 1484, 1946.
- [ 5]. D. COSTER ET R. de L. KRONIG, *Physica*, 2, p. 13, 1935.
- [ 6]. J. N. COOPER, *Phys. Rev.*, 61, p. 234, 1942.
- [ 7]. S. C. CURRAN, T. ANGUS ET A. L. COCKROFT, *Phyl. Mag.*, 40, p. 36, 1949.
- [ 8]. M. FRILLEY, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 218, p. 505, 1944.
- [ 9]. M. FRILLEY ET TSIEN SAN-TSIANG, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 220, p. 144, 1945.
- [10]. F. R. HIRSCH, JR., *Rev. Mod. Phys.*, 14, p. 45, 1942.
- [11]. H. KÜSTNER ET A. ARENDS, *Ann. der Phys.*, 25, p. 385, 1936.
- [12]. H. LAY, *Zeits für Phys.*, 91, p. 533, 1934.
- [13]. OUANG TE-TCHAO, J. SURUGUE ET TSIEN SAN-TSIANG., *C. R. Acad. Sc. Paris*, 217, p. 535, 1943.
- [14]. L. PINCHERLE, *N. Cimento*, 14, p. 185, 1937.
- [15]. L. PINCHERLE, *Phys. Rev.*, 61, p. 225, 1942.
- [16]. E. G. RAMBERG ET F. K. RICHTMYER, *Phys. Rev.*, 51, p. 913, 1937.
- [17]. F. K. RICHTMYER ET E. G. RAMBERG, *Phys. Rev.* 51, p. 925, 1937.
- [18]. F. K. RICHTMYER, *Rev. Mod. Phys.*, 9, p. 391, 1937.
- [19]. L. SALGUEIRO, *Port. Phys.*, 1, p. 67, 1944.
- [20]. L. SALGUEIRO, Thèse, Lisboa, 1945.
- [21]. J. SARMENTO, *Port. Phys.*, 2, p. 139, 1946.
- [22]. J. SARMENTO, Thèse, Porto, 1945.
- [23]. R. J. STEPHENSON, *Phys. Rev.*, 51, p. 637, 1937.
- [24]. H. TELLEZ PLASENCIA, *Journal de Physique*, 10, p. 14, 1949.
- [25]. D. H. TOMBOULIAN, *Phys. Rev.*, 74, p. 1887, 1948.
- [26]. TSIEN SAN-TSIANG, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 216, p. 765, 1943.
- [27]. TSIEN SAN-TSIANG, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 218, p. 503, 1944.
- [28]. TSIEN SAN-TSIANG ET C. MARTY, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 220, p. 688, 1945.
- [29]. TSIEN SAN-TSIANG ET C. MARTY, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 221, p. 177, 1945.
- [30]. TSIEN SAN-TSIANG, *Phys. Rev.*, 69, p. 38, 1946.
- [31]. M. VALADARES, *Ricerca Scient.*, 11, p. 270, 1940.
- [32]. M. VALADARES ET F. MENDES, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 226, p. 1185, 1948.

## SUR LA THÉORIE DE LA PROPAGATION DES COMBUSTIONS, AVEC UNE APPLICATION À LA COMBUSTION DE L'OZONE

par C. BECHERT (MAYENCE, ALLEMAGNE)

(Reçu le 24 Novembre 1948)

### CONTENU

On donne une théorie simple de la propagation des combustions. L'énergie d'activation  $E$  qui apparaît dans l'expression du nombre  $Z$  de ceux collisions moléculaires qui ont pour effet une réaction chimique, est considérée comme paramètre disponible, paramètre qui est calculable à partir d'une seule valeur mesurée de la vitesse de propagation de la combustion. Ainsi on peut tenir compte de la diffusion sans l'introduire explicitement dans le calcul. L'ensemble des réactions est remplacé par une seule, la « réaction globale », les produits intermédiaires (les particules « actives ») ne paraissent pas explicitement dans le calcul, l'effet des produits intermédiaires étant représenté par l'énergie  $E$  d'activation proprement choisie. Des lois de conservation de la masse et du moment on déduit une relation donnant la vitesse du gaz en fonction des quantités suivantes : vitesse  $u_l$  de combustion, vitesse  $c_l$  du son dans la partie pas encore enflammée du gaz (indice  $l$ ), quotients  $T/T_l$ ,  $M/M_l$  des températures et des poids moléculaires au point considéré et dans la partie pas encore enflammée. Les formules sont différentes pour les deux cas de combustion et de détonation (éq. (8) et (13), § 2). La vitesse  $u_l$  a une limite supérieure pour les combustions (éq. (11), § 2), elle a une limite inférieure pour les détonations (éq. (15), § 2). Le quotient des deux vitesses limites n'est fonction que des températures et des poids moléculaires dans la partie « consommée » (indice  $r$ ) et pas encore enflammée ( $l$ ), respectivement, (voir éq. (18 *b*), (20), (21), § 2). Utilisant la loi de conservation de l'énergie, et l'équation de la diminution du nombre des molécules du combustible, on trouve une relation (éq. (38), § 5) entre  $T_r$ ,  $T_l$ ,  $M_r$ ,  $M_l$ , la chaleur de réaction par mol du combustible, et la composition de la

partie pas encore enflammée du gaz. Alors, on se spécialise à la considération de la réaction entre deux molécules similaires. La combinaison des 3 lois de conservation à l'équation pour la diminution du nombre des molécules du combustible, nous donne l'équation différentielle fondamentale, (47), § 5. Elle est du 1<sup>er</sup> ordre, grâce à la simplification quant à l'influence de la diffusion, mais elle est non-linéaire. Dans la partie pas encore enflammée, il n'y a pas d'équilibre thermique, ils subsistent des réactions chimiques dans dite partie, mais leur nombre est très, très petit, de sorte que toutes les quantités physiques y sont pratiquement constantes (§ 5). On transforme l'équation (47), utilisant les variables  $E/(kT) \equiv \tau$ , plus précisément:  $\tau - \tau_r \equiv y$ ,  $\left( \tau_r \equiv \frac{E}{kT_r} \right)$ , et  $\frac{n_1 M_l}{M} \cdot \text{const} \equiv \nu$ ,  $n_1$  étant le nombre des molécules du combustible par  $\text{cm}^3$  du gaz et  $M$  le poids moléculaire du gaz. De la forme (47) on trouve ainsi l'équation différentielle (80), § 7, dans laquelle la vitesse cherchée  $u_l$  a le rôle d'un paramètre arbitraire, à déterminer par des considérations physiques. L'équation (80) représente une relation entre le nombre des molécules du combustible et la température. Dans le § 8 on parle de la forme des courbes intégrales. On cherche la courbe satisfaisant aux conditions limites données pour les parties  $l$  et  $r$  du gaz. Par conséquent, la courbe cherchée  $C$  doit passer par deux points donnés. Mais comme  $C$  est solution d'une équation différentielle du 1<sup>er</sup> ordre, elle n'a qu'une seule constante d'intégration; c'est à dire:  $C$  ne peut satisfaire aux conditions données qu'au cas qu'on choisisse proprement non seulement la constante d'intégration, mais aussi le paramètre  $u_l$ , ce que signifie la détermination de la vitesse de la propagation de la combustion (§ 8). Il est possible donner même une représentation approximative *analytique*,  $V_C(y)$ , de la courbe cherchée ((95), § 9), et une formule d'approximation très simple pour la vitesse  $u_l$  de la combustion qui ne contient que d'opérations élémentaires ((102), § 9). La méthode peut être appliquée aussi à d'autres équations différentielles, pour la détermination d'un paramètre cherché. Supposons que le problème admette l'existence de la courbe intégrale, suffisante aux conditions à limite données, seulement pour des valeurs définies du paramètre. Alors on se construit comme solution approximative une fonction qui suffit aux conditions à limite données et qui possède au degré le plus haut, les propriétés de la courbe intégrale cherchée. La substitution de cette solution approximative dans l'équation différentielle, donne la valeur (approximative) du paramètre. On trouvera des valeurs différentes du paramètre, dépendantes du choix

du point, où la solution approximative doit satisfaire exactement à l'équation différentielle. Mais si la solution approximative est une approximation bonne, ces valeurs différentes doivent être pratiquement égales. Pour notre solution approximative, cette preuve donne un résultat très satisfaisant: de 3 conditions différentes d'approximation on trouve pratiquement le même résultat pour  $u_i$  ((102), § 9). Cette vitesse  $u_i$  de combustion résulte dépendante de l'énergie d'activation, de la chaleur de réaction, de la conductibilité thermique, de la composition du gaz avant la réaction, du rayon et de la masse des molécules en réaction, de la chaleur spécifique du gaz, et de la température du gaz avant la réaction. Par des considérations dimensionnelles on peut démontrer (§ 9), que la dépendance dimensionnelle de  $u_i$  des quantités physiques est une conséquence inévitable des 3 lois de conservation et de l'équation donnant la décroissance du nombre de particules du combustible ((103 d), (103 n) § 9); ainsi, le nombre  $Z$  des réactions détermine, d'une manière prédominante, la vitesse  $u_i$ . L'équation (28), prouvée en § 3 pour des réactions entre deux particules similaires, conduit de la forme (103 d) à la forme dimensionnelle de l'équation (102). Mais la détermination des quantités qui restent indéterminées dans cette considération dimensionnelle, (par exemple, il reste incertain s'il se traite de  $\tau_r$  ou de  $\tau_i$ ), exige un calcul détaillé lequel est donné dans le travail présent, le résultat final étant la formule (102). En outre, on peut démontrer que la structure dimensionnelle de la formule donnée pour  $u_i$  ne change pas même si on tient compte rigoureusement de la diffusion (§ 9). Ça veut dire que (103 d) est la formule générale pour des combustions stationnaires causées par la réaction entre des particules similaires. On compare la formule (103 n) à la formule de Nusselt, laquelle a été déduite de suppositions fortement simplificatives et de l'ainsi dite température d'inflammation, c'est à dire d'une conception objectionnable (§ 10). Malgré son origine différente, la formule de Nusselt possède la structure de l'équation (103 n). Les conclusions concernant la dépendance de  $u_i$  de la capacité thermique, de la conductibilité thermique  $\lambda$  et du nombre  $Z$  des réactions, sont strictes, parceque ces conclusions ne sont pas des résultats caractéristiques de la formule de Nusselt; il se traite simplement de conséquences des lois générales de conservation. Par une considération de la conductibilité thermique des mélanges de gaz, on essaie une réfutation des objections qui ont été faites à la formule de Nusselt quant à la dépendance de  $u_i$  de la valeur de  $\lambda$  (§ 10). Notre formule (103 n) n'a pas besoin de la conception objectionnable de la température d'inflammation ce que signifie une supériorité remarquable à la formule de Nusselt; dite

conception se prouve inutile au moment qu'on ne suppose pas la constance du nombre  $Z$  des réactions. Pour des réactions entre des particules similaires, la vélocité de propagation de la combustion est une fonction monotone de la concentration du combustible (§ 10). Un travail suivant prouvera que, pour des réactions entre des particules inégales, la vélocité de propagation de combustion est une fonction croissante de la concentration du combustible jusqu'au delà du point stoechiométrique, qu'elle atteint un maximum dans le domaine du «surplus de combustible», et qu'elle décroît d'une manière monotone après avoir passé le maximum; ainsi, la théorie donne compte du fait de l'existence des «limites d'inflammation». Selon (102), la dépendance de  $u_l$ , de la température  $T_l$ , est peu prononcée, ce qu'est en accord à l'expérience, mais en contraire à la formule de Nusselt (§ 10). La comparaison de l'éq. (102) aux mesures de la combustion de l'ozone résulte en une concordance satisfaisante avec les faits (table 1, § 10); on trouve des valeurs raisonnables pour  $E/k$  et pour le diamètre moléculaire de l'ozone (§ 10).  $u_l$  ne résulte pas dépendante de la pression, si on adhère à la supposition (28) quant au nombre des réactions, conséquence qui paraît être vérifiée par les mesures (§ 10). Il est possible intégrer l'éq. (80) aussi d'une manière graphique (§ 10). La courbe décrivant la température se déduit de l'équation différentielle (106), soit d'une manière graphique soit d'une méthode analytique approximative ((112), § 11). Les formules (115), (115 a) du § 11 donnent une estimation du diamètre de la flamme; son ordre de grandeur est de  $5 \cdot 10^{-3}$  cm à  $10^{-2}$  cm. Le diamètre est dépendant de  $T_r, T_l$ , de la chaleur de réaction, de l'énergie d'activation; de la composition de la mixture gazeuse, de la pression  $p_l$ , et de  $u_l$ . Si nous acceptons la formule (28), le diamètre de la flamme résulte inversement proportionnel à la pression  $p_l$ ; une supposition différente pour  $Z$  résulterait en une dépendance différente entre  $p_l$  et le diamètre de la flamme. Comme au cas de  $u_l$ , on peut démontrer que la dépendance du diamètre de la flamme des quantités physiques est une conséquence inévitable des équations fondamentales; l'éq. (115 a) du § 11 dans sa structure dimensionnelle, n'est pas dépendante des hypothèses spéciales regardant le nombre des réactions ou le traitement de la diffusion.

## RÉSULTATS PRINCIPAUX DU TRAVAIL

1°) La propagation stationnaire d'une perturbation dans un gaz ou dans une mixture gazeuse, n'est pas possible avec des vitesses quelconques. Les lois de conservation de la masse et du moment exigent que la vitesse d'une telle perturbation appartienne à un de deux domaines «possibles»; la vitesse doit être ou plus petite que la valeur limite donnée par l'éq. (11) du § 2, ou plus grande que la valeur limite donnée par l'éq. (15) du § 2. C'est valable pour des perturbations quelconques où les variables physiques ont des valeurs différentes aux deux côtés de la perturbation, indépendamment de l'existence ou non-existence d'une réaction chimique dans la zone de la perturbation.

2°) La dépendance dimensionnelle de la vitesse  $u_i$  de propagation de la combustion des dates physiques, peut être déduite par des considérations purement dimensionnelles (§ 9, éq. (103 d) et suivantes). L'idée fondamentale est: On considère toutes les équations desquelles on aurait à déduire par calcul la quantité cherchée. Par division et multiplication, on déduit des équations la forme dimensionnelle de la quantité cherchée. Ce procédé est général, applicable en tout cas. Après avoir terminé ce travail, je notais que E. Fues, dans un travail apparu dans la *Zeitschrift für Physik*, 101, 665 (1937), avait publié déjà cette idée. Malgré sa simplicité, cette méthode de la déduction du résultat dimensionnel utilisant les équations mêmes, n'est pas appliquée dans la littérature; Fues lui-même l'applique seulement à deux problèmes déjà résolus de l'Hydrodynamique, sans en faire usage pour la solution des problèmes pas encore traités.

3°) L'appréciation de la diffusion ne change pas la forme dimensionnelle de  $u_i$  (§ 9, éq. (103 n)); on retrouve ainsi seulement la relation entre la conductibilité thermique, la constante de diffusion, la densité et la chaleur spécifique (§ 9, éq. (103 m)), relation qui est connue de la théorie cinétique des gaz. Cette relation est clairement une conséquence des lois de conservation, c'est à dire qu'elle est un résultat de la physique du continuum sans qu'on ait besoin recourir aux conceptions cinétiques.

4°) Ce travail présente une méthode simple pour le calcul analytique approximatif des vitesses de propagation de combustions. On applique la méthode à la combustion de l'ozone, laquelle est l'unique qui a été

mesurée exactement. La méthode se distingue des formules données dans la littérature par sa simplicité et par sa supériorité quant à la représentation des résultats expérimentales, la méthode n'a pas besoin de la conception objectionnable de la «température d'inflammation», ce qu'est un avantage considérable en comparaison à la formule de Nusselt (§ 10).

5°) Pour la déduction de la formule de la vitesse de combustion, on applique une méthode qui est applicable à d'autres équations différentielles aussi s'il s'agit de la détermination d'un paramètre sous des conditions à limite données. Le degré d'approximation peut être jugé d'une manière simple (§ 9).

## 1. INTRODUCTION

On essaie donner une théorie simple de la vitesse des flammes<sup>1</sup>. Il y a plusieurs théories de la vitesse de combustion, mais il n'y a pas beaucoup de mesures exactes. La série la plus exacte de mesures nous semble être celle de Lewis et v. Elbe<sup>2</sup>. Jost a donné dans son livre<sup>3</sup>, une revue critique des théories. Du point de vue physique, la théorie de Lewis et v. Elbe est la plus raisonnable; ces deux auteurs supposent que la somme des énergies chimique et calorique soit constante<sup>4</sup> à travers la flamme. En vue de la multiplicité des phénomènes chimiques et physiques dans la flamme, on est forcé à simplifier. Le problème est introduire des simplifications admissibles du point de vue physique; les résultats doivent être compatibles aux expériences. Nos suppositions fondamentales sont formulées en §§ 2 et 3. Il est essentiel pour notre calcul que nous n'avons affaire qu'avec une seule réaction, la réaction «globale», et que nous tenons compte de l'effet de la diffusion par un choix approprié de l'énergie d'activation laquelle est un paramètre dans notre calcul. En outre, nous supposons que la combustion soit stationnaire, comme on le fait d'usage. L'énergie d'activation est la quantité unique dans notre théorie qui doit être

<sup>1</sup> Ce travail a été terminé Août 1944; un extrait bref a été présenté à l'occasion de la fondation de la Société de Physique de l'Etat Rhéno-Palatin, à Mayence, le 29 avril 1948.

<sup>2</sup> B. Lewis et G. v. Elbe, *Journ. Chem. Physics* 2, 283, (1934).

<sup>3</sup> W. Jost, *Explosions- u. Verbrennungsvorgänge in Gasen*, Springer, Berlin, 1939, page 104-119.

<sup>4</sup> B. Lewis et G. v. Elbe, *Journ. Chem. Physics* 2, 537 (1934).



accommodée à l'expérience. Les résultats du § 10 montrent que l'accord entre l'expérience et notre théorie est bon.

Les considérations jusqu'à l'éq. (21) sont valables pour les deux cas de combustion et de détonation; à partir de (22) nous nous bornons à la considération de combustions. Jusqu'à la fin du § 3 nous parlons de combustion à d'équations quelconques de réaction; mais aussi les équations (32)-(38), sous les suppositions spécifiées, sont valables pour des combustions générales. En outre, dès le § 4 nous nous bornons aux réactions entre deux espèces de molécules, et à partir du § 5 nous nous spécialisons aux réactions entre deux espèces similaires de molécules. Sous les conditions mentionnées dans le texte, qui seront admissibles pour presque tous les cas de cette classe de combustions, tout ce qui suit a une validité générale; la spécialisation à la combustion de l'ozone étant essentielle seulement pour les calculs numériques de la vitesse  $u_i$  et du diamètre de la flamme (§§ 10 et 11) de la combustion de l'ozone.

## 2. CONSÉQUENCES DE LA CONSERVATION DE LA MASSE ET DU MOMENT

Supposons qu'une flamme causée par la combustion d'une mixture gazeuse, se propage de droite à gauche; à gauche ( $l$ ) on a la partie pas encore inflammée, à droite ( $r$ ) on a le gaz qui a passé par la zone de réaction, (le gaz «consumé»). Nous considérons le phénomène comme unidimensionnel, caractérisé par la coordonnée cartésienne  $x$ ; et nous supposons que le phénomène soit stationnaire ce qu'entraîne que toutes les quantités physiques ne dépendent que de la coordonnée  $x$ . Nous négligerons la friction; de la diffusion, nous tiendrons compte par un choix approprié de l'énergie d'activation. La partie  $r$  est caractérisée par le fait qu'ici la réaction qui cause la combustion, a terminé. Ici on a une température  $T_r$  constante, la fin de la flamme étant donnée par le point où  $T = T_r$ . Nommons  $T_l$  la température en un point quelconque de la partie  $l$ . Dans cette partie, la température n'est pas parfaitement constante théoriquement parce que la réaction considérée sera possible aussi à des températures basses bien que la vitesse de réaction soit très petite. Mais du point de vue pratique, la température à gauche de la flamme sera constante. Le calcul numérique des §§ 9 et 10 se réfère à la combustion de l'ozone; pour ce cas, on démontre dans le § 6 que  $T_l$  est constante à un degré très haut. Pour les considérations du présent §, la constance de  $T_l$  n'est pas condition nécessaire.

À cause de la supposition de stationnarité, la vitesse de propagation de la combustion est une constante. Pour le calcul, nous pouvons considérer la flamme comme en repos; alors la partie  $l$  du gaz qui n'est pas encore inflammée, se transpose à la vitesse constante  $u_l$ , vers la flamme, en direction des valeurs de  $x$  positives. La partie  $r$  (à droite de la flamme) a traversé la flamme, et se transpose à la vitesse  $u_r$ . La vitesse de propagation de la flamme, en rapport à la partie  $l$  considérée comme en repos, assume alors la valeur  $u_l$ .

La conservation de la masse nous donne, si nous désignons avec  $u$  la vitesse du gaz, avec  $\rho$  la densité :

$$(1) \quad \rho u = \text{constante} = \rho_l u_l.$$

Soit  $p$  la pression, alors on a en vertu de la conservation du moment :

$$(2) \quad p + \rho u^2 = \text{constante} = p_l + \rho_l u_l^2.$$

Si  $M$  est le poids moléculaire, l'équation d'état du gaz s'écrit

$$(3) \quad p = \rho \frac{RT}{m}.$$

$M$  dépend de la coordonnée  $x$ , de même comme les autres quantités :  $p, \rho, T, u$ . Des 3 équations données au-dessus, on déduit une relation entre  $u, u_l, T, T_l, M, M_l$ . La substitution de (3) en (2) entraîne :

$$\rho \left( \frac{RT}{M} + u^2 \right) = \rho_l \left( \frac{RT_l}{M_l} + u_l^2 \right);$$

par division par  $\rho u_l^2$ , et utilisant les abbreviations :

$$(4) \quad \gamma = \frac{RT_l}{M_l u_l^2}; \quad T' = \frac{T}{T_l}; \quad M' = \frac{M}{M_l},$$

on trouve de l'éq. (1) :

$$\gamma \frac{T'}{M'} + \left( \frac{u}{u_l} \right)^2 = \frac{u}{u_l} (\gamma + 1).$$

Ça signifie :

$$(5) \quad \frac{u}{u_l} = \frac{1}{2} \left( 1 + \gamma \pm \sqrt{(1 + \gamma)^2 - 4\gamma \frac{T'}{M'}} \right).$$

Une considération simple nous donne le signe approprié de la racine :

au cas limite  $T \rightarrow T_l$  on doit avoir :  $M \rightarrow M_l, u \rightarrow u_l$ ; mais de la formule (5) il suit pour ce cas :

$$u \rightarrow \frac{u_l}{2}(1 + \gamma \pm |1 - \gamma|).$$

C'est à dire pour  $\gamma > 1$ , il vaut le signe négatif en (5); pour  $\gamma < 1$ , le signe positif.

De (5) on conclut, que pour l'existence d'une flamme stationnaire, il faut que la racine soit réelle; c'est la condition :

$$(1 + \gamma)^2 > 4\gamma \frac{T'}{M'}.$$

Pour notre problème nous avons toujours  $\frac{T'}{M'} > 1$  (voir ce qu'il suit à l'éq. (7)), et par conséquent :

$$(6) \quad \left| 1 + \gamma - \frac{2T'}{M'} \right| > \sqrt{\frac{4T'}{M'} \left( \frac{T'}{M'} - 1 \right)}.$$

Maintenant nous avons à distinguer les deux cas :

$$1. \quad 1 + \gamma > \frac{2T'}{M'},$$

c'est à dire, en vertu de (6) :

$$(7) \quad \gamma > \frac{2T'}{M'} - 1 + 2\sqrt{\frac{T'}{M'} \left( \frac{T'}{M'} - 1 \right)}.$$

On a toujours<sup>1</sup>  $T' > 1, M' < 1$ , et par conséquent  $\frac{T'}{M'} > 1$ ; ça entraîne  $\gamma > 1$  pour le cas mentionné 1. Mais  $\gamma > 1$  signifie que  $u_l < \frac{c_l}{\sqrt{x_l}}$ , si nous introduisons la vitesse  $c$  du son par :  $c^2 = \frac{xRT}{M}$ .

Ainsi on voit que le cas 1. est celui de la combustion, la vitesse de propagation n'ayant que des valeurs relativement petites. Au cas 1. nous avons :

$$(8) \quad u = \frac{u_l}{2} \left( 1 + \gamma - \sqrt{(1 + \gamma)^2 - 4\gamma \frac{T'}{M'}} \right); \quad u_l < \frac{c_l}{\sqrt{x_l}}; \quad \gamma = \frac{c_l^2}{x_l u_l^2}.$$

<sup>1</sup> Les valeurs de  $T, M$  se réfèrent naturellement à un point à droite du point  $T_l, M_l$ .

L'éq. (8) donne la vitesse  $u$  en fonction de  $T/M$ , et de  $u_i, T_i/M_i$ .

L'inégalité (7) doit être valable pour toutes les valeurs  $T', M'$  de la combustion, c'est à dire pour  $T_r, M_r$  aussi. Nous écrivons :

$$(9) \quad T'' = \frac{T_r}{T_i}; \quad M'' = \frac{M_r}{M_i};$$

$T''/M''$  est la valeur maximum de  $T'/M'$ . Comme le coté droit de (7) est une fonction croissante de  $T'/M'$ , la limite inférieure de  $\gamma$  est donnée par :

$$(10) \quad \gamma > \frac{2T''}{M''} - 1 + 2\sqrt{\frac{T''}{M''} \left( \frac{T''}{M''} - 1 \right)}.$$

De (10) nous obtenons :

$$(11) \quad u_i^2 < \frac{c_i^2}{\alpha_i \left( \frac{2T''}{M''} - 1 + 2\sqrt{\frac{T''}{M''} \left( \frac{T''}{M''} - 1 \right)} \right)}, \quad (\text{combustions}).$$

Si l'on se traite de combustions stationnaires,  $u_i$  ne peut dépasser la limite (11).

L'autre cas qui, selon (6), est réalisable, c'est :

$$2. \quad 1 + \gamma < \frac{2T''}{M''},$$

ce qu'entraîne en conséquence de (6) :

$$(12) \quad \gamma < \frac{2T''}{M''} - 1 - 2\sqrt{\frac{T''}{M''} \left( \frac{T''}{M''} - 1 \right)}.$$

Comme  $\frac{T''}{M''} > 1$ , le coté droit de cette inégalité est toujours positif et  $< 1$ , d'où il suit que  $\gamma < 1$ . C'est le cas de la détonation, la vitesse de propagation ayant de grandes valeurs; on a :  $u_i > \frac{c_i}{\sqrt{\alpha_i}}$ . Dans (5), il règne le signe positif

$$(13) \quad u = \frac{u_i}{2} \left( 1 + \gamma + \sqrt{(1 + \gamma)^2 - 4\gamma \frac{T''}{M''}} \right);$$

$$u_i > \frac{c_i}{\sqrt{\alpha_i}}; \quad \gamma = \frac{c_i^2}{\alpha_i u_i^2}.$$

Le coté droit de (12) est une fonction décroissante de  $T''/M''$ . Par

conséquent, la limite supérieure de  $\gamma$  est donnée par  $T_r, M_r$ , et on a :

$$(14) \quad \gamma < \frac{2T''}{M''} - 1 - 2\sqrt{\frac{T''}{M''} \left( \frac{T''}{M''} - 1 \right)}.$$

Ça signifie que :

$$(15) \quad u_i^2 > \frac{c_i^2}{z_i \left( \frac{2T''}{M''} - 1 - 2\sqrt{\frac{T''}{M''} \left( \frac{T''}{M''} - 1 \right)} \right)}, \quad (\text{détonations}).$$

Au cas de détonation stationnaire, la vitesse  $u_i$  est toujours supérieure à la valeur limite, donnée par (15). Nommons  $\underline{U}_D$  cette valeur limite, et  $\bar{U}_V$  la valeur limite donnée par (11); nous voyons que  $\underline{U}_D$  est croissante avec  $\frac{T''}{M''}$ , que  $\bar{U}_V$  au contraire est décroissante. Le domaine «inaccessible» des vitesses, limité par les valeurs limites (11) et (15), s'étend à l'augmentation de  $T''/M''$ . Dans le domaine inaccessible il n'y a pas de propagation stationnaire d'une réaction chimique ou plus généralement, d'une perturbation quelconque.

La vitesse du gaz «consumé», (à droite), en rapport à la partie pas encore inflammée considérée comme en repos, est :

$$(16) \quad u_s = u_r - u_i.$$

Au cas de combustion on a :

$$(17) \quad u_s = \frac{u_i}{2} \left( \gamma - 1 - \sqrt{(1 + \gamma)^2 - 4\gamma \frac{T''}{M''}} \right) > 0.$$

À la valeur limite  $\bar{U}_V$ , il correspond

$$(17b) \quad \bar{u}_s = \bar{U}_V \frac{T''}{M''} \left( \sqrt{1 - \frac{M''}{T''}} + 1 - \frac{M''}{T''} \right);$$

$$\bar{U}_V = \frac{c_i}{\sqrt{z_i} \sqrt{\frac{2T''}{M''} - 1 + 2\sqrt{\frac{T''}{M''} \left( \frac{T''}{M''} - 1 \right)}}.$$

Au cas de détonation on a :  $u_s < 0$ , et :

$$(17c) \quad |u_s| = \frac{u_i}{2} \left( 1 - \gamma - \sqrt{(1 + \gamma)^2 - 4\gamma \frac{T''}{M''}} \right).$$

À la valeur limite  $\underline{U}_D$ , il correspond :

$$(17d) \quad |u_s| = \underline{U}_D \frac{T''}{M''} \left( \sqrt{1 - \frac{M''}{T''}} - \left(1 - \frac{M''}{T''}\right) \right);$$

$$\underline{U}_D = \frac{c_l}{\sqrt{x_l} \sqrt{\sqrt{2T''/M''} - 1 - 2\sqrt{\frac{T''}{M''} \left(\frac{T''}{M''} - 1\right)}}.$$

Les équations données jusqu'ici tracent les limites du domaine de la propagation stationnaire des flammes, mais elles ne donnent pas la valeur de  $u_l$  même.

Si nous considérons  $T''/M''$  comme donné, les éq. (17b, d) nous donnent les valeurs limites  $\bar{U}_V, \underline{U}_D$ , compatibles avec la conservation de la masse et du moment. En utilisant l'abréviation :

$$(18a) \quad \xi = \frac{T''}{M''} \left( \frac{T''}{M''} - 1 \right) > 0,$$

nous trouvons de (17b, d) :

$$(18b) \quad \frac{U_D^2}{\bar{U}_V^2} = 1 + 8\xi \left( 1 + \sqrt{1 + \frac{1}{4\xi}} \right).$$

En vertu de  $\xi > 0$ , la fonction (18b) est une fonction monotone croissante de  $\xi$ . Le quotient des deux vitesses limites  $\underline{U}_D$  et  $\bar{U}_V$ , selon (18a, b), ne dépend que du quotient  $\frac{T_r}{T_l} : \frac{M_r}{M_l}$  des températures et des poids moléculaires à gauche et à droite de la perturbation.

En général,  $T''/M''$  est sensiblement plus grand que l'unité, au moins on a  $T''/M'' \approx 3$ ; ainsi on peut simplifier l'éq. (11) à la forme

$$(19a) \quad u_l \leq \bar{U}_V; \quad \bar{U}_V \approx \frac{c_l}{2\sqrt{x_l}} \sqrt{\frac{M''}{T''}} \left( 1 + \frac{M''}{4T''} \right); \quad (\text{cas de combustion}).$$

La vitesse du gaz « consommé », correspondente à la valeur de  $\bar{U}_V$ , est :

$$(19b) \quad \bar{u}_s \approx 2\bar{U}_V \frac{T''}{M''} \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{M''}{T''} \right) \approx \frac{c_r}{\sqrt{x_r}} \left( 1 - \frac{M''}{2T''} \right).$$

Alors, l'éq. (15) devient :

$$(19c) \quad u_l \geq \underline{U}_D; \quad \underline{U}_D \approx \frac{2c_l}{\sqrt{x_l}} \sqrt{\frac{T''}{M''}} \left( 1 - \frac{M''}{4T''} \right) = \frac{2c_r}{\sqrt{x_r}} \left( 1 - \frac{M''}{4T''} \right);$$

(cas de détonation).

À la valeur de  $\underline{U}_D$  il correspond :

$$(19d) \quad |\underline{u}_s| \approx \frac{1}{2} \underline{U}_D \left( 1 - \frac{M''}{4T''} \right) \approx \frac{c_r}{\sqrt{\kappa_r}} \left( 1 - \frac{M''}{2T''} \right).$$

En général,  $\xi$  est sensiblement plus grand que l'unité, au moins on a :  $\xi \approx 6$ , ce qu'entraîne

$$(20) \quad \left( \frac{\underline{U}_D}{\underline{U}_v} \right)^2 \approx 16 \frac{T''}{M''} \left( \frac{T''}{M''} - 1 \right);$$

la valeur de la limite inférieure  $\underline{U}_D$  des vitesses de détonations, surpasse par un facteur de  $4 \frac{T''}{M''} \sqrt{1 - \frac{M''}{T''}}$  la valeur de la limite supérieure  $\bar{U}_v$  des vitesses des combustions — supposant toujours le cas de propagation stationnaire. La valeur de  $T'' = T_r/T_l$  se trouve, à une exactitude de quelques % de la loi de conservation d'énergie, voir §§ 5 et 7 ; la valeur de  $M'' = M_r/M_l$ , en général, ne diffère pas beaucoup de l'unité. En cas que  $T''/M''$  soit  $\geq 3$ , on a :

$$(21) \quad \frac{\underline{U}_D}{\underline{U}_v} \approx 4 \frac{T''}{M''} - 2 = 4 \frac{T_r}{T_l} \cdot \frac{M_l}{M_r} - 2.$$

Dans ce qui suit, on ne parlera que du cas des combustions. Nous transformons la formule (8). Comme  $\gamma$ , en général, est beaucoup plus grand que l'unité (au cas de la combustion de l'ozone on a :  $\gamma \geq 10^3$ ), ou peut développer en (8) :

$$(22) \quad u \approx u_l \cdot \frac{T''}{M''} \left( 1 + \frac{\frac{T''}{M''} - 1}{\gamma} \right).$$

Dans la plupart des cas, il suffit :

$$(22a) \quad u \approx u_l \cdot \frac{T''}{M''};$$

pour la combustion de l'ozone, on a toujours  $\frac{T''}{M''} < 20$ .

### 3. LA CONSERVATION D'ENERGIE

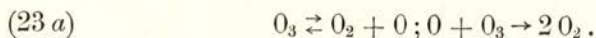
Nous désignons : par  $c_v$  la chaleur spécifique à volume constant, par  $c_p$  la chaleur spécifique à pression constante, par  $\lambda$  la conductibilité thermique, par  $q'$  la chaleur de réaction détachée dans une seule réaction «globale», et calculée par molécule du combustible, par  $Z$  le

nombre des réactions «globales», calculé par  $\text{cm}^3$  et par sec. Le mot réaction globale indique la réaction écrite avec les produits de la réaction à droite et les produits initiaux à gauche, sans tenir compte des produits intermédiaires. Par exemple, au cas de la combustion de l'ozone, nous considérons comme réaction globale la réaction :



sans tenir compte des particules  $\text{O}$  qui apparaissent et disparaissent durant la réaction, étant des produits intermédiaires. Dans ce cas,  $q'$  est la chaleur détachée dans la réaction (23), et calculée par molécule de  $\text{O}_3$ .

En réalité, à des températures basses on aura décomposition de l'ozone en  $\text{O}_2$  et  $\text{O}$ ; cette décomposition est proportionnelle au nombre des molécules de  $\text{O}_3$ . À des températures plus élevées, dans la partie du croisement rapide de la température, la réaction entre  $\text{O}_3$  et  $\text{O}$  plaira son rôle. Cette réaction est proportionnelle aux nombres des particules de  $\text{O}_3$  et de  $\text{O}$ . Utilisant la réaction (23), nous avons proportionnalité de  $Z$  au carré du nombre des particules de  $\text{O}_3$  (§ 4), et proportionnalité au facteur de  $e^{-E/kT}$ . Pour  $T \approx T_l$ , l'exponent a des valeurs de l'ordre de grandeur  $-30$ ; pour  $T \approx T_r$  il a des valeurs de l'ordre  $-5$ . Le nombre des réactions  $Z$  est une fonction rapidement croissante de  $T$ , quand on vient des températures basses, mais à des températures élevées on a une décroissance de  $Z$  aussi rapide parce que le nombre des molécules de  $\text{O}_3$  se diminue rapidement à cause de la probabilité croissante de réaction. Dans ces circonstances, le nombre des particules de  $\text{O}_3$ , dans son ordre de grandeur, est égal au nombre des particules  $\text{O}$ . Ça veut dire que notre idéalisation donnera des résultats comme que si nous aurions utilisé le système plus compliqué de réactions :



D'autre côté, le facteur  $e^{-E/kT}$  détermine le nombre  $Z$  aux basses températures d'une manière si prévalente — il est cause de la croissance rapide de  $Z$  avec  $T$  — qu'il n'importe pas grande chose, si le facteur de  $e^{-E/kT}$  soit le carré du nombre des particules de  $\text{O}_3$  ou une fonction plus compliquée.

Il est une autre simplification essentielle de notre calcul que nous n'avons pas affaire directement avec la diffusion de laquelle nous tenons compte par un choix convenable de  $E$ .

Les effets de la diffusion sont: 1°. De la zone à haute température, il y a diffusion de particules, surtout des particules actives; au cas



de la combustion de l'ozone ce sont des particules 0, au cas de la combustion des hydrocarbures ce sont des atomes libres et des «radicaux». Ces particules causent des réactions supplémentaires dans la partie pas encore enflammée. Cela signifie que formellement l'énergie d'activation moyenne par molécule semble être diminuée comparée à un calcul qui tiendrait compte direct de la diffusion. 2°. De la zone à basse température, on a diffusion des particules vers la flamme; le nombre  $Z$  est ainsi augmenté par l'augmentation des particules disponibles à la réaction. Cela fait croître le facteur de  $e^{-E/kT}$ , avec l'effet d'un changement au sens de notre hypothèse qui donne proportionnalité au carré des molécules du combustible. 3°. Par le phénomène cité sous n° 1°, la température dans la partie à gauche est augmentée, par le phénomène 2°, pendant que la température de la flamme ne sera pas changée notablement parceque les particules en question, avant leur réaction chimique, causeront un abaissement de température. Les températures  $T_r$ ,  $T_i$  ne sont pas touchées par ces phénomènes parceque  $T_i$  est la température du gaz «frais», et  $T_r$  est déterminé par la conservation d'énergie, irrespectif de la valeur de  $E$  (§ 5), la loi d'énergie contenant la chaleur de réaction, pas la chaleur d'activation. Ainsi on voit, que l'effet de la diffusion est d'étendre le domaine de la croissance de la température. Comme le caractère de la variation de  $T$  est déterminé essentiellement par le facteur  $e^{-E/kT}$  (§ 11), la diminution de  $E$  entraîne un élargissement du domaine de croissance de la température.

Ainsi on peut s'attendre que notre idéalisation du mécanisme des réactions, malgré sa simplification considérable, pourra décrire, qualitativement et en certain degré aussi quantitativement, les propriétés essentielles de la combustion. Les résultats de notre calcul sont une vérification de cette conjecture, on le voit de la comparaison aux dates expérimentaux de la combustion de l'ozone (§ 10). Nous déterminerons  $E$  d'une seule valeur mesurée de  $u_i$ . En cas des réactions plus compliquées on aurait à distinguer plusieurs valeurs de  $E$ , aurait-on l'intention d'entreprendre un calcul exact. Dans notre idéalisation, qui embrasse toutes les réactions dans une seule, il n'y a qu'une valeur seule de  $E$ . Dans la plupart des cas, on connaît des mesures une seule valeur de  $E$ , justement l'énergie d'activation «globale» qui correspond à la réaction globale, et qui correspond parfaitement à notre simplification. Cette valeur «globale» de  $E$ , en général, on la connaît à une exactitude si pauvre qu'il ne semble pas sensible d'essayer un calcul de la diminution formale de  $E$  qui au principe serait nécessaire selon le phénomène 1° cité plus haut. Dans ce cas, on est *forcé* de calculer  $E$  d'une valeur mesurée de la vitesse  $u_i$  de propagation de la combustion

— si on dispose des mesures de  $u$ . Si on ne dispose pas de telles mesures, on utilisera la valeur globale de  $E$  pour en déduire les valeurs théoriques de  $u_i$ . Si notre théorie est raisonnable, les valeurs de  $u$  doivent être de l'ordre de grandeur des valeurs qu'on s'attend d'autres dates expérimentales. Dans un travail à suivre, on appliquera notre méthode à la combustion des hydrocarbures (tenu compte de quelques changements introduits par le caractère différent du problème).

Si nous négligeons la friction, la loi de conservation de l'énergie s'écrit en forme différentielle comme suit :

$$(24) \quad \frac{d}{dx} \left[ \varphi u \left( \int_{T_0}^T c_v dT + \frac{u^2}{2} \right) + pu \right] = \frac{d}{dx} \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right) + rq' Z.$$

Ici  $r$  est le nombre des molécules du combustible — en cas de la combustion de l'ozone ce sont les molécules de  $O_3$  — qui disparaissent dans une seule réaction. Par intégration de (24) on déduit, en tenant compte de (1), (3) :

$$(25) \quad \varphi_l u_l \left[ \int_{T_l}^T c_v dT + \frac{u^2 - u_l^2}{2} + \frac{RT}{M} - \frac{RT_l}{M_l} \right] = \\ = \lambda \frac{dT}{dx} - \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_{T=T_l} + rq' \int_{T_l}^T Z dx.$$

$c_v$  est fonction de  $T$  aussi par médiation de la composition de la mixture gazeuse.

#### 4. LE NOMBRE $Z$ DES REACTIONS

Nous nous bornons au cas d'une réaction entre deux espèces  $\alpha$  et  $\beta$  de molécules, soient  $n_\alpha, n_\beta$  les nombres par  $\text{cm}^3$  des molécules,  $m_\alpha, m_\beta$  les masses des molécules. Nous nommerons  $m_{\text{rel}}$  la masse «résultante» :

$$(26) \quad m_{\text{rel}} = \frac{m_\alpha m_\beta}{m_\alpha + m_\beta}.$$

Soient  $a_\alpha, a_\beta$  les rayons moléculaires. Pour la réaction, il est d'importance décisive la partie  $E_{||}$  de l'énergie cinétique relative, qui représente le mouvement en direction de la ligne joignant les centres des deux molécules. Nous supposons que seulement ces collisions peuvent causer une réaction pour lesquelles  $E_{||}$  soit supérieure à l'énergie  $E$

d'activation. Une calcul simple nous donne au cas de *deux sortes inégales*  $\alpha, \beta$  de molécules :

$$(27) \quad Z = 2(a_\alpha + a_\beta)^2 n_\alpha n_\beta \sqrt{\frac{2\pi kT}{m_{\text{rel}}}} \cdot e^{-E/(kT)}.$$

Pour la combustion de l'ozone, il s'agit, en conséquence du type simplifié (23) de réaction, de réaction entre deux sortes *égales* de molécules : Appelons  $n$  le nombre de particules par  $\text{cm}^3$ , et  $m$  la masse moléculaire ; alors, en place de (27), nous avons pour des *molécules égales* :

$$(28) \quad Z = 2(2a)^2 n^2 \sqrt{\frac{\pi kT}{m}} \cdot e^{-E/(kT)}.$$

## 5. REACTIONS ENTRE DEUX ESPECES EGALES DE PARTICULES. DEDUCTION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE FONDAMENTAL. (47)

Désormais, il se traitera seulement de réactions entre deux espèces égales de molécules. Soit la réaction :



ici  $A$  désigne l'espèce d'atomes,  $A_{r'}$ ,  $A_{s'}$ , sont les symboles de molécules. On a :

$$(30) \quad 2r' = ss'.$$

Appelons  $n_1$  le nombre par  $\text{cm}^3$  des molécules  $A_{r'}$  du combustible,  $n_2$  le nombre par  $\text{cm}^3$  des molécules  $A_{s'}$ .

Considérons une lame d'épaisseur  $dx$  de la flamme. Les particules  $A_{r'}$  qui entrent à gauche par seconde et  $\text{cm}^2$ , ne sortiront pas toutes du côté droit de la lame parce que part d'elles disparaîtra en vertu de la réaction. Ils disparaissent 2 particules  $A_{r'}$  par réaction ce qu'entraîne pour un domaine d'épaisseur  $dx$  et d'une surface d'un  $\text{cm}^2$  orientée parallèle au plan  $yz$  :

$$(31) \quad (n_1 u)_{(x)} = (n_1 u)_{(x+dx)} + 2Z dx \cdot 1 ;$$

ici on a désigné par  $Z$  le nombre des réactions (29) par  $\text{cm}^3$  et par sec. Le nombre  $Z$  est donné par (28), si dans dite équation on remplace  $n$  par  $n_1$ , et  $m$  par  $m_1$ . De (31) on tire :

$$(31 a) \quad - \frac{d(n_1 u)}{dx} = 2Z.$$

On voit ainsi qu'on peut évaluer l'intégrale à la droite de (25) ce

qu'entraîne pour la loi de conservation de l'énergie (compte tenu du fait que  $r=2$ ):

$$(32) \quad \rho_l u_l \left[ \int_{T_l}^{T_r} c_v dT + \frac{u^2 - u_l^2}{2} + \frac{RT}{M} - \frac{RT_l}{M_l} \right] = \\ = \lambda \frac{dT}{dx} - \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_{T=T_l} - q' (n_1 u - n_{1l} u_l).$$

Ici  $n_{1l}$  est la valeur de  $n_1$  pour  $T=T_l$ .

En appliquant (32) au cas  $T=T_r$ , on déduit une relation donnant  $u_l^2$  en fonction de  $M_r, M_l, T_r, T_l$ ; mais nous montrerons que c'est une relation formelle seulement, inutile pour le calcul de  $u_l^2$ . Pour  $T=T_r$  on a  $\frac{dT}{dx} = 0$ , parceque la température est constante dans la zone à droite; en outre,  $n_{1r}=0$ , en conséquence de notre assumption que dans la flamme la réaction soit complète. L'expression  $\left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_{T=T_r}$  peut être négligée par raison de la croissance presque insensible de la température dans la zone gauche, le calcul de  $\left( \frac{dT}{dx} \right)_{T=T_l}$  pour la combustion de l'ozone en donne un exemple (§ 6). Ainsi on obtient:

$$(33) \quad \rho_l \left[ \int_{T_l}^{T_r} c_v dT + \frac{u_r^2 - u_l^2}{2} + \frac{RT_r}{M_r} - \frac{RT_l}{M_l} \right] = q' n_{1l}.$$

Cette équation est valable pour des combustions quelconques<sup>1</sup>, si on remplace l'expression à la droite par: chaleur de réaction par molécule du combustible, multiplié par le nombre  $n_{1l}$  des molécules du combustible qui se trouvent dans le  $\text{cm}^3$  de la zone pas encore enflammée. On peut transformer le quotient  $q' n_{1l}/\rho_l$ ; on a

$$(34) \quad n_{1l} = \frac{p_{1l}}{kT_l},$$

où  $p_{1l}$  est la pression partielle du combustible dans la zone pas encore enflammée. Ça donne:

$$\frac{q' n_{1l}}{\rho_l} = \frac{p_{1l} L_{q'}}{p_l M_l};$$

<sup>1</sup> Au cas de surplus d'air.

$L$  est le nombre de Loschmidt. Nous introduisons la désignation :

$$(35) \quad Lq' = Q',$$

où  $Q'$  est la chaleur de réaction par mole du combustible, libérée dans la réaction «globale».  $p_u/p_l$  est égal au quotient entre le nombre de moles du combustible et le nombre total de moles, les deux nombres calculés pour la zone pas encore enflammée, plus exactement : calculés pour  $T = T_l$ . En vertu de (8), on peut exprimer  $u_r$  par  $u_l, T_l/M_l, T_r/M_r$ , ce qui donne :

$$(36) \quad \int_{T_l}^{T_r} c_v dT + \frac{u_l^2 (1+\gamma)^2}{4} \left[ 1 - \frac{2\gamma T''}{(1+\gamma)^2 M''} - \sqrt{1 - \frac{4\gamma T''}{(1+\gamma)^2 M''}} - \frac{2}{(1+\gamma)^2} \right] + \frac{RT_l}{M_l} \left( \frac{T''}{M''} - 1 \right) = \frac{Q' p_u}{M_l p_l};$$

$$\gamma \equiv \frac{RT_l}{M_l u_l^2}; \quad T'' \equiv \frac{T_r}{T_l}; \quad M'' \equiv \frac{M_r}{M_l}.$$

(36) est l'équation pour le calcul de  $u_l$  que nous avons annoncé.

Nous nous bornons à traiter le cas  $\gamma \gg 1$  qui est le plus fréquent ; dans (22), il suffit alors garder le premier membre seul. Ainsi nous avons :

$$(37) \quad \int_{T_l}^{T_r} c_v dT + \frac{u_l^2}{2} \left[ \left( \frac{T''}{M''} \right)^2 - 1 \right] + \frac{RT_l}{M_l} \left( \frac{T''}{M''} - 1 \right) = \frac{Q' p_u}{M_l p_l}.$$

De (37), on pourrait avoir l'impression qu'on puisse calculer  $u_l$  d'une manière très simple, en fonction de  $T_r, T_l, M_r, M_l, Q', p_u/p_l$ . Mais il faut tenir en compte, que pour ce but, il faudrait savoir la valeur de  $c_v$  pour toutes les températures entre  $T_l$  et  $T_r$ , ce qu'exigerait la connaissance de la composition de la mixture enflammée pour toutes les températures en considération. D'autre part, ça ne semble pas être une difficulté sérieuse, parceque pour les combustions de mélanges de combustibles avec air qui sont d'importance pour la technique, la partie d'air est de telle sorte prépondérante que  $c_v$  résulte pratiquement identique à la chaleur spécifique de l'air ; naturellement, le cas de la combustion de l'ozone est une exception. Mais la difficulté que s'oppose à l'application de (37) au calcul de la vitesse de propagation des flammes, c'est le fait que le second membre (contenant  $u_l^2$ ) est beaucoup plus petit que les autres membres à gauche de l'équation (37). Pour la combustion de l'ozone on a, en unités CGS :

Moyen  $\bar{c}_v$  de  $c_v \approx 5 \cdot 10^6$ ;  $T_r \approx 1500^{\circ} K$ ;  $T_l \approx 300^{\circ} K$ ;  $M_l \approx 40$ ;  $M_r = 32$ ;  $u_l \approx 150$ , d'où il suit :

$$\frac{u_l^2}{2} \left[ \left( \frac{T''}{M''} \right)^2 - 1 \right] : \int_{T_l}^{T_r} c_v dT + \frac{RT_l}{M_l} \left( \frac{T''}{M''} - 1 \right) \approx 5 \cdot 10^{-5}.$$

C'est à dire : pour le calcul de  $u_l$  à partir de (36) ou de (37), il faudrait connaître les valeurs de  $T_r$ ,  $T_l$ , ... avec une exactitude beaucoup plus grande que la précision des mesures. C'était pour cette raison que nous avons nommé formelles les relations annoncées, (36) ou (37).

Les équations (36), (37) se simplifient maintenant à l'équation :

$$(38) \quad \int_{T_l}^{T_r} c_v dT + \frac{RT_l}{M_l} \left( \frac{T''}{M''} - 1 \right) = \frac{Q p_u}{M_l p_l}.$$

De même comme (33), l'équation (38) vaut pour des combustions quelconques<sup>1</sup> ; alors  $Q$  est la chaleur de réaction par mole du combustible,  $p_u$  la pression partielle du combustible dans la zone pas encore enflammée,  $M_l$  et  $p_l$  poids moléculaire et pression totale dans la zone pas encore enflammée.

De (38), on peut déduire la chaleur de réaction  $Q$  par mole de combustible, ou la composition initiale  $p_u/p_l$  de la mixture gazeuse, ou  $T_r$  ou  $\bar{c}_v$ , sous condition qu'on connaisse les autres grandeurs de l'équation mentionnée. En (38) la vélocité de propagation de la flamme a disparu ; nous la déduirons d'autres relations.

Pour le calcul approximatif de  $T_r$  nous posons :

$$(39) \quad c_v = \frac{f}{2} \cdot \frac{R}{M},$$

ou  $f$  est le nombre des degrés de liberté par molécule. Ainsi nous pouvons écrire :

$$(40) \quad c_v \approx \frac{f_l}{2} \frac{R}{M_l} + \frac{(f - f_l)}{2} \cdot \frac{R}{M_l};$$

il suit :

$$(41) \quad \int_{T_l}^{T_r} c_v dT \approx \frac{f_l}{2} \cdot \frac{RT_l}{M_l} (T'' - 1) + \frac{R}{2M_l} \int_{T_l}^{T_r} (f - f_l) dT \approx \\ \approx \frac{RT_l}{2M_l} (T'' - 1) (f_l + \overline{\Delta f_r}),$$

<sup>1</sup> Au cas de surplus d'air.

où

$$(42) \quad \overline{\Delta f_r} (T'' - 1) T_l \equiv \int_{T_l}^{T_r} (f - f_l) dT.$$

$\overline{\Delta f_r}$  est une valeur moyenne de l'augmentation en nombre de degrés de liberté moléculaires qui de son côté est une conséquence de l'augmentation de température entre  $T_l$  et  $T_r$ . Pour les membres à gauche de (38) on trouve ainsi :

$$\begin{aligned} & \int_{T_l}^{T_r} c_v dT + \frac{RT_l}{M_l} \left( \frac{T''}{M''} - 1 \right) \approx \\ & \approx \frac{RT_l}{M_l} (T'' - 1) \left[ \frac{f_l + 2 + \overline{\Delta f_r}}{2} + \frac{\frac{1}{M''} - 1}{1 - \frac{1}{T''}} \right]. \end{aligned}$$

Par l'aide de la relation :  $\frac{R}{M_l} \frac{(f_l + 2)}{2} = c_{pl}$ , il suit :

$$(43) \quad \begin{aligned} & \int_{T_l}^{T_r} c_v dT + \frac{RT_l}{M_l} \left( \frac{T''}{M''} - 1 \right) \approx \\ & \approx c_{pl} T_l (T'' - 1) \left[ 1 + \frac{\overline{\Delta f_r}}{f_l + 2} + \frac{2 \left( \frac{1}{M''} - 1 \right)}{(f_l + 2) \left( 1 - \frac{1}{T''} \right)} \right]; \end{aligned}$$

le dernier membre dans la parenthèse à droite est, en général plus petit de 0,05; on le pourra négliger. D'autre part,  $\overline{\Delta f_r} / (f_l + 2)$  a l'ordre de grandeur de 0,3. Si on définit comme moyen de  $c_p$  :

$$(44) \quad \overline{c_{pr}} = c_{pl} \left( 1 + \frac{\overline{\Delta f_r}}{f_l + 2} \right)$$

il résulte l'équation cherchée pour le calcul de  $T_r$  :

$$(45) \quad T'' \equiv \frac{T_r}{T_l} \approx 1 + \frac{Q' p_{li}}{p_l \overline{c_{pr}} M_l T_l}.$$

Nous nous servons de (45) pour le but de simplifications.

De (31 a) et de (32) on obtient une équation différentielle pour  $n_1 u$  en fonction de  $T$ . Il suit de l'appréciation donnée quelques lignes devant de l'équation (38), que pour des vitesses  $u_l$  de l'ordre de

grandeur de quelques mètres par seconde, on peut négliger en (32) le membre contenant  $u^2 - u_l^2$  en comparaison aux autres membres de la parenthèse. C'est seulement pour des températures  $T \approx 10^5 \cdot T_l$ , que ce membre atteindrait l'ordre de grandeur des autres deux membres. Ainsi il vient de (32):

$$(46) \quad dx = \frac{\lambda dT}{\varrho_l u_l \left[ \int_{T_l}^T c_v dT + \frac{RT}{M} - \frac{RT_l}{M_l} \right] + q'(n_1 u - n_{1l} u_l) + \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_{T=T_l}}$$

et de (31 a) et (28):

$$(47) \quad -\frac{d(n_1 u)}{dT} = \frac{4\lambda(2a_1)^2 n_1^2 \sqrt{\frac{\pi kT}{m_1}} e^{-E/(kT)}}{\varrho_l u_l \left[ \int_{T_l}^T c_v dT + \frac{RT}{M} - \frac{RT_l}{M_l} \right] + q'(n_1 u - n_{1l} u_l) + \left( \lambda \frac{dT}{dx} \right)_{T=T_l}}$$

Nous transformerons cette équation différentielle de sorte qu'elle contienne comme variables seulement  $n_1$  et  $T$ , et  $u_l$  comme paramètre inconnu.  $u_l$  est fixé par les conditions:  $n_1 = n_{1l}$  pour  $T = T_l$ ,  $n_1 = n_{1r}$  pour  $T = T_r$ . Le problème est: déterminer  $u_l$  en fonction des autres grandeurs.

## 6. DETERMINATION DE $\frac{dT}{dx}$ POUR $T = T_l$ .

L'équation (31 a) nous montre que dans la région  $T \approx T_l$  il n'y a pas d'état indépendant de  $x$ ; il n'est pas possible avoir à la fois  $\frac{dn_1}{dx} = 0$ ,  $\frac{du}{dx} = 0$ , parceque selon (28),  $Z \neq 0$  pour  $T = T_l$ . De (24) il suit en vertu de l'équation d'état des gaz:

$$(48) \quad \varrho_l u_l \left[ c_v \frac{dT}{dx} + u \frac{du}{dx} + \frac{R}{M_2} \left( M \frac{dT}{dx} - T \frac{dM}{dx} \right) \right] = \frac{d\lambda}{dT} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 + \lambda \frac{d^2 T}{dx^2} + 2q'Z.$$

Cela montre, qu'alors il n'est pas aussi possible avoir à la fois la valeur zéro pour  $dT/dx$ ,  $d^2 T/dx^2$ ,  $dn/dx$ ,  $dM/dx$ . En effet, pour  $T = T_l$  on n'a pas d'équilibre thermique; il y a, même à ces températures basses, des réactions  $2O_3 \rightarrow 3O_2$ , bienque leur nombre soit très



petit en comparaison au nombre de collisions. La réaction inverse  $3O_2 \rightarrow 2O_3$ , la pouvons négliger, comme nous l'avons négligé déjà dans nos équations. Elle donnerait le nombre des molécules  $O_3$  qui à la température  $T_l$  existent en équilibre thermique avec la quantité donnée de  $O_2$ . Mais ce nombre est très petit en comparaison à la quantité de  $O_3$  qui se trouve dans la mixture donnée avant la combustion.

C'est à dire, la composition donnée de la mixture, ce n'est pas du tout la composition qui correspondrait à la loi de Guldberg et Waage. Aussi à la température  $T_r$  nous pouvons négliger la réaction  $O_2 \rightarrow O_3$ . Le nombre des molécules  $O_3$ , qui existent en équilibre thermique avec les molécules de  $O_2$  à la température élevée de  $T_r$ , est assez plus grand, il est vrai, que le nombre correspondant à la température  $T_l$  duquel nous avons parlé audessus, mais il est désappréciable en regard de la quantité de  $O_3$  qui se trouve dans la mixture avant la combustion.

Ainsi nous avons pour  $T=T_r$  la condition  $n_1(T_r) \equiv n_{1r} = 0$ , ce qu'en traîne  $Z=0$ ,  $\left(\frac{dM}{dx}\right)_r = 0$ , et en vertu de (31 a) :  $\left(\frac{du}{dx}\right)_r = 0$ .

(48) la temperature est indépendante de  $x$ , dans la région  $T=T_r$ . Dans la zone à droite de flamme, nous avons partout les mêmes valeurs des variables. Dans la flamme, les variables ont une dépendance très prononcée de la coordonnée  $x$ , à gauche de la flamme, il y a aussi de variation des variables, comme nous avons vu; mais nous vérifierons par calcul direct que la variation est très petite si la temperature  $T'$  est assez basse, ce qu'on pourrait prévoir sans calcul.

La forme de  $Z$  déjà nous en peut donner une indication. La fonction  $e^{-E/(kT)}$  est d'une variabilité enorme entre  $T_l$  et  $T_r$ ; comme  $E/k$  est de l'ordre  $10^4$  °K, l'exponent change de  $-30$  pour  $T_l \approx 300$  °K à  $-5$  pour  $T_r \approx 2000$  °K. Par conséquent, le nombre de réactions est énormément plus petit pour  $T=T_l$  que pour les températures de la flamme. On tire de cela la conclusion que les autres grandeurs seront de même beaucoup moins variables dans la région pas encore enflammée de ce qu'elles le sont dans la flamme.

Pour l'évaluation de (48) il faut avoir  $dM/dx$  et  $\frac{du}{dx}$ . On a :

$$(49) \quad M = \frac{n_1 M_1 + n_2 M_2}{n_1 + n_2} = M_2 + \frac{p_1 (M_1 - M_2)}{p};$$

et en raison de (2) et (1) :

$$(50) \quad p = p_l + p_l u_l^2 \left(1 - \frac{u}{u_l}\right) = p_l \left[1 + k_l \left(\frac{u_l}{c_l}\right)^2 \left(1 - \frac{u}{u_l}\right)\right].$$

Il suit de (22 a) que

$$\frac{u}{u_l} \approx \frac{TM_l}{T_l M};$$

par conséquent,  $\frac{u}{u_l}$  ne surpasse pas l'ordre de 10; d'autre part, pour la combustion de l'ozone,  $\frac{u_l}{c_l}$  est de l'ordre de  $10^{-2}$ . Ainsi nous pouvons écrire :

$$(51) \quad M \approx M_2 + \frac{n_1 k T (M_1 - M_2)}{p_l};$$

c'est une relation de laquelle nous ferons usage plus loin.

Pour la différentiation de  $M$  par rapport de  $x$ , nous partirons de l'expression exacte de  $M$ . Introduisons l'abréviation :

$$(52) \quad \alpha = \frac{1}{\gamma} = k_l \left( \frac{u_l}{c_l} \right)^2;$$

on a :  $\alpha \ll 1$ . Nous obtenons de (49), (50) :

$$(53) \quad \frac{dM}{dx} = \frac{n_1 k T (M_1 - M_2)}{p_l} \left[ \frac{dn_1}{dx} \cdot \frac{1}{n_1} + \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} + \frac{\alpha}{u_l} \frac{du}{dx} \right].$$

Selon (31 a), il existe une connexion entre  $\frac{dn_1}{dx}$ ,  $\frac{du}{dx}$  :

$$\frac{dn_1}{dx} u + n_1 \frac{du}{dx} = -2Z.$$

En exprimant  $\frac{dn_1}{dx}$  par  $\frac{du}{dx}$ , nous obtenons pour la parenthèse grande de (53) :

$$\left[ \right] \approx \frac{1}{T} \frac{dT}{dx} - \frac{\left( 2Z + n_1 \frac{du}{dx} \right)}{n_1 u};$$

nous avons de plus :

$$(54) \quad \frac{du}{dx} \approx \frac{u_l M_l}{T_l} \left( \frac{dT}{dx} \cdot \frac{1}{M} - \frac{T}{M_2} \cdot \frac{dM}{dx} \right);$$

les autres membres, qui selon (22) s'y ajouteraient, les pouvons négliger comme on voit en différentiant membre par membre.

En observant (22 a), on trouve de (53) :

$$\frac{dM}{dx} \approx - \frac{n_1 k (M_1 - M_2) T_1 M}{p_l u_l M_l} \left[ \frac{2Z}{n_1} - \frac{u}{T} \frac{dT}{dx} + \frac{u_l M_l}{T_l} \left( \frac{dT}{dx} \frac{1}{M} - \frac{T}{M_2} \frac{dM}{dx} \right) \right].$$

En conséquence de (22 a), les deux expressions contenant  $\frac{dT}{dx}$  se détruisent. Il reste (cf. (51)) :

$$(55) \quad \frac{dM}{dx} \left[ 1 - \frac{n_1 k T (M_1 - M_2)}{p_l M} \right] \approx \frac{dM}{dx} \frac{M_2}{M} = - \frac{k T_l (M_1 - M_2) M \cdot 2Z}{p_l u_l M_l}$$

à cause de  $M_1 > M_2$ , on a toujours  $\frac{dM}{dx} < 0$ . Maintenant nous pouvons former  $\frac{du}{dx}$ ; il suit de (54) :

$$(56) \quad \frac{du}{dx} \approx \frac{u_l M_l}{T_l M} \left[ \frac{dT}{dx} + \frac{k T T_l (M_1 - M_2) M}{M_2 p_l u_l M_l} \cdot 2Z \right].$$

C'est à dire :  $u$  est une fonction croissante vers la droite, et par conséquent,  $u > 0$  partout. De (31 a), on tire ainsi que  $dn_1/dx < 0$  partout.

Pour des gaz, la conductibilité thermique  $\lambda$  est proportionnelle à  $\sqrt{T}$ ; nous écrivons :

$$(57) \quad \lambda = \lambda_0 \sqrt{T}.$$

Par substitution des expressions de  $dM/dx$ ,  $du/dx$  dans (48), nous obtenons :

$$(58) \quad p_l u_l \left[ c_p \frac{dT}{dx} + \frac{u_l^2 T M_l^2}{T_l^2 M^2} \left( \frac{dT}{dx} + \frac{k T T_l (M_1 - M_2) M}{M_2 M_l p_l u_l} \cdot 2Z \right) + \frac{k T k T_l (M_1 - M_2)}{p_l u_l M_l M_2} \cdot 2Z \right] = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{T}} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 + \lambda_0 \sqrt{T} \frac{d^2 T}{dx^2} + 2q' Z.$$

Ici les membres originant en  $u \frac{du}{dx}$ , c'est à dire en la variation de l'énergie cinétique, nous les pouvons négliger en regard des autres dans la parenthèse [], parceque :

$$\frac{u_l^2 T M_l^2}{T_l^2 M^2 c_p} \approx \frac{u_l^2 T M_l^2}{T_l^2 M \cdot 8R} = \frac{T}{T_l} \cdot \frac{M}{M_l} \cdot \frac{\alpha}{8};$$

et :

$$\frac{u_l^2 T M_l^2 k T T_l (M_1 - M_2)}{T_l^2 M M_2 M_l p_l u_l} \cdot \frac{p_l u_l M_l M_2}{RT k T_l (M_1 - M_2)} = \alpha \cdot \frac{M_l T}{M T_l}.$$

Tenant compte de (51), on trouve :

$$(59) \quad \rho_l u_l \left[ c_p \frac{dT}{dx} + \frac{2Z}{n_1} \cdot \frac{RT_l}{u_l M_l} \left( \frac{M}{M_2} - 1 \right) \right] = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{T}} \left( \frac{dT}{dx} \right)^2 + \lambda_0 \sqrt{T} \frac{d^2 T}{dx^2} + 2q' Z.$$

Nous écrivons cette équation pour  $T=T_l$ , la lettre caractérisera les valeurs des variables prises au point  $T=T_l$ . Les dérivées  $dT/dx$ ,  $d^2 T/dx^2$  seront indiquées par  $T_x, T_{xx}$ . Ainsi il suit de (59):

$$(60) \quad \rho_l u_l c_{pl} T_{xl} = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{T_l}} T_{xl}^2 + \lambda_0 \sqrt{T_l} T_{xxl} + 2Z_l \left[ q' - \frac{\rho_l RT_l}{n_{1l} M_l} \left( \frac{M_l}{M_2} - 1 \right) \right];$$

(51) entraîne :

$$\frac{\rho_l RT_l}{n_{1l} M_l} \left( \frac{M_l}{M_2} - 1 \right) = k T_l \left( \frac{M_l}{M_2} - 1 \right),$$

une expression qui est de l'ordre de grandeur de  $k T_l$ , pour la combustion de l'ozone elle est égale à  $\frac{1}{2} k T_l$ . Ça veut dire que cette expression est beaucoup plus petite en valeur que  $q'$ , parceque l'énergie cinétique moyenne par molécule est beaucoup plus petite que la chaleur de réaction par molécule. Par conséquent, (60) se simplifie à :

$$(61) \quad \rho_l u_l c_{pl} T_{xl} = \frac{\lambda_0}{2\sqrt{T_l}} T_{xl}^2 + \lambda_0 \sqrt{T_l} T_{xxl} + 2Z_l q'.$$

Comme idéalisation raisonnable de la situation dans la mixture pas encore enflammée, nous pouvons considérer l'hypothèse<sup>1</sup>:

$$(62) \quad T_{xxl} = 0;$$

elle signifie l'hypothèse de variation linéaire de la température dans la région près de  $T=T_l$ . Nous montrerons que  $T_{xl}$  résulte très petit, et que  $T_{xx}, T_x$  restent petits dans toute la région  $T < T_l$ . Nous apprécions l'ordre de grandeur en CGS :

$$\rho_l \approx 10^{-3}; \quad u_l \approx 2 \cdot 10^2; \quad c_{pl} \approx \frac{4 \cdot 8,3 \cdot 10^7}{40}; \quad \lambda_0 \approx 1,5 \cdot 10^2;$$

$$T_l \approx 300; \quad n_{1l} = \frac{p_{1l}}{k T_l} = \frac{p_l}{(m^* + 1) k T_l},$$

si nous introduisons l'abréviation :

<sup>1</sup> Elle est équivalente à l'hypothèse qu'on puisse négliger l'expression contenant  $T_{xxl}$  en regard du membre à gauche de (61); voir les valeurs numériques données au-dessous.

$$(63) \quad m^* = \frac{n_{2l}}{n_{1l}};$$

elle caractérise la mixture avant combustion; au cas de la combustion de l'ozone,  $m^*$  est égal au quotient des nombres molaires  $O_2/O_3$ , c'est à dire

$$n_{1l} \approx \frac{10^6}{2 \cdot 1,4 \cdot 10^{-16} \cdot 3 \cdot 10^2} \approx 1,2 \cdot 10^{19};$$

$$m_1 = 48 \cdot 1,6 \cdot 10^{-24}; \quad 2 a_1 \approx 3 \cdot 10^{-8}.$$

Nous posons  $E/k \approx 1,1 \cdot 10^4$ , voir § 9. Ça donne :

$$\frac{E}{kT_l} \approx \frac{1,1 \cdot 10^4}{3 \cdot 10^2} \approx 37; \quad q' \approx 2,35 \cdot 10^{-12}.$$

On tire de cela :

$$2Z_l q' \approx 4,9 \cdot 10^{-16} \cdot 1,2^2 \cdot 10^{38} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 1,4 \cdot 10^{-16} \cdot 3 \cdot 10^2}{48 \cdot 1,6 \cdot 10^{-24}}}.$$

$$\cdot e^{-37} \cdot 2,75 \cdot 10^{-12} \approx 4,3; \quad \rho_l u_l c_{pl} \approx 1,7 \cdot 10^6; \quad \frac{\lambda_0}{2\sqrt{T_l}} \approx 4.$$

Pour  $Z_l \rightarrow 0$ , il doit résulter  $T_{xl} \rightarrow 0$ : si on n'a pas de réaction, il n'y a pas de variation de température. Ainsi on trouve des ordres de grandeur :

$$(64) \quad T_{xl} \approx \frac{2Z_l q'}{\rho_l u_l c_{pl}}.$$

L'expression contenant  $Z_{xl}^2$  est par le facteur  $6 \cdot 10^{-12}$  plus petite que l'expression contenant  $T_{xl}$ , ce qui signifie qu'on la peut négliger. L'ordre de grandeur de  $T_{xl}$  est de  $2,5 \cdot 10^{-6}$ .

Maintenant nous pouvons calculer les autres dérivées; nous trouvons de (55):  $M_{xl} \approx -8 \cdot 10^{-9}$ ; de (56):  $u_{xl} \approx 1,7 \cdot 10^{-6}$ ; de (31 a):  $n_{1xl} \approx -1,1 \cdot 10^{11}$ . Nous formons les dérivées logarithmiques :

$$\frac{M_{xl}}{M_l} \approx -2 \cdot 10^{-10}; \quad \frac{u_{xl}}{u_l} \approx 8 \cdot 10^{-9}; \quad \frac{n_{1xl}}{n_{1l}} \approx -9 \cdot 10^{-9}; \quad \frac{T_{xl}}{T_l} \approx 8 \cdot 10^{-9}.$$

De (28) nous avons:  $\frac{Z_{xl}}{Z} \approx 2,8 \cdot 10^{-7}$ . Ça veut dire que toutes les gran-

deurs contenues dans les équations sont d'une variabilité très petite, dans la région  $T \approx T_l$ ; on conclue de (59) que cela vaut aussi dans la région  $T < T_l$ . Les conditions sont, dans la région  $T \lesssim T_l$ , presque indépendantes de la coordonnée  $x$ .

## 7. TRANSFORMATION DE L'EQUATION DIFFERENTIELLE (47).

Considérons l'expression

$$(65) \quad \int_{T_l}^T c_v dT + R \left( \frac{T}{M} - \frac{T_l}{M_l} \right),$$

qui apparaît dans le dénominateur à droite de (47). Utilisant les abbréviations (cf. (39)-(44)):

$$(66) \quad \bar{c}_p \equiv c_{pl} \left( 1 + \frac{\bar{\Delta}f}{f_l + 2} \right); \quad \bar{\Delta}f \cdot (T - T_l) \equiv \int_{T_l}^T (f - f_l) dT,$$

on trouve de (65)

$$(67) \quad \int_{T_l}^T c_v dT + R \left( \frac{T}{M} - \frac{T_l}{M_l} \right) \approx \bar{c}_p (T - T_l) \approx \bar{c}_{pr} (T - T_l).$$

Nous introduisons dans (47) la variable :

$$(68) \quad N_1 = \frac{n_1 M_l}{M}; \quad \tau = \frac{E}{kT},$$

et ainsi nous transformons (47) dans une équation différentielle pour  $N_1(\tau)$ . En conséquence de (22 a) il suit :

$$(68 a) \quad n_1 u = u_l \tau_l \frac{N_1}{\tau}; \quad \tau_l \equiv \frac{E}{kT_l},$$

et le dénominateur à droite de (47) se transpose en :

$$\frac{\rho_l u_l \bar{c}_{pr} E \left( \frac{1}{\tau} - \frac{1}{\tau_l} \right)}{k} + q' u_l \tau_l \left( \frac{N_1}{\tau} - \frac{N_{1l}}{\tau_l} \right) + (\lambda T_x)_l.$$

Nous introduisons les abbréviations :

$$(69) \quad D_1 = \left( \rho_l \bar{c}_{pr} \frac{E}{kT} + q' N_{1l} - \frac{(\lambda T_x)_l}{u_l} \right) \cdot \frac{1}{q' \tau_l}; \quad D_2 = \frac{\rho_l \bar{c}_{pr} E}{k \tau_l q'};$$

ça donne au dénominateur à droite de (47) la forme suivante :

$$q' u_l \tau_l \left( \frac{D_2 + N_1}{\tau} - D_1 \right).$$

Pour le numérateur, il nous faut savoir  $n_1$ , c'est à dire  $M/M_l$  (cf. (68)), en fonction de  $N_1$  et  $\tau$ . Selon (49), on a :

$$\frac{M}{M_l} = \frac{1 + \frac{p_1}{p} \left( \frac{M_1}{M_2} - 1 \right)}{1 + \frac{p_{1l}}{p_l} \left( \frac{M_1}{M_2} - 1 \right)};$$

en lieu de  $p$  nous pouvons écrire  $p_l$  (cf. (50)); pour  $M_1/M_2$  nous utilisons l'abréviation :

$$(70) \quad \mu = \frac{M_1}{M_2},$$

pour la combustion de l'ozone, c'est égal à 3/2. En conséquence de (63) il est :

$$(71) \quad \frac{p_{1l}}{p_l} = \frac{n_{1l}}{n_{1l} + n_{2l}} = \frac{1}{1 + m^*};$$

en outre :

$$\frac{p_1}{p} \approx \frac{p_1}{p_l} = \frac{n_1 k T}{p_l} = \frac{N_1 M E}{M_l p_l \tau}.$$

Cela donne :

$$\frac{M}{M_l} = \frac{1 + \frac{M}{M_l} \cdot \frac{N_1}{\tau} \cdot \frac{E}{p_l} (\mu - 1)}{1 + \frac{\mu - 1}{m^* + 1}};$$

il suit :

$$(72) \quad \frac{M}{M_l} = \frac{1}{\frac{(m^* + \mu)}{m^* + 1} \left( 1 - \frac{N_1}{\tau} \cdot \frac{E}{p_l} \cdot \frac{(\mu - 1)(m^* + 1)}{m^* + \mu} \right)}.$$

Pour l'expression à gauche de (47) il résulte :

$$- \frac{d(n_1 u)}{dT} = u_l \tau_l \frac{d(N_1/\tau)}{d\tau} \cdot \frac{k\tau^2}{E} = \frac{k\tau}{E} \cdot u_l \tau_l \left( \frac{dN_1}{d\tau} - \frac{N_1}{\tau} \right).$$

Posons :

$$(73) \quad A = \frac{4(2a_1)^2 \sqrt{\frac{\pi}{m_1}} \lambda_0 E^2}{k^{3/2} q' \tau_l^2};$$

compte tenu de (57), nous obtenons de (47) :

$$(74) \quad \frac{dN_1}{d\tau} = \frac{N_1}{\tau} + \frac{A(m^*+1)^2}{(m^*+\mu)^2 u_l^2} \cdot \frac{e^{-\tau} N_1^2}{\left[1 - \frac{N_1 E(\mu-1)(m^*+1)}{p_l(m^*+\mu)\tau}\right]^2} \cdot \tau(N_1 - D_1\tau + D_2).$$

Dans la loi d'énergie (32), nous pouvons négliger l'énergie cinétique (voir (67), et les considérations qui conduisaient à (38)); ainsi nous trouvons de (32) pour  $T = T_r$ :

$$(75) \quad \rho_l \bar{c}_{pr}(T_r - T_l) = -(\lambda T_x)_l / u_l + q' N_{1l};$$

selon (69), ça équivaut à:

$$(76) \quad D_1 \tau_r = D_2.$$

Nous posons maintenant:

$$(77) \quad N_1 = D_1 v; \quad \tau = \tau_r + y.$$

D'autre part, l'appréciation donnée au § antécédant nous montre que:

$$(77a) \quad \rho_l \bar{c}_{pr}(T_r - T_l) = q' N_{1l}; \quad M_l \bar{c}_{pr}(T_r - T_l) = \frac{Q'}{m^*+1};$$

d'où

$$(78) \quad D_1 = \frac{D_2}{\tau_r} = \frac{N_{1l}}{\tau_l \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}\right)};$$

en outre:

$$(78a) \quad p_l = p_{1l}(m^*+1) = \frac{N_{1l} E(m^*+1)}{\tau_l}.$$

Cela donne:

$$(79) \quad \frac{D_1 E(m^*+1)}{p_l} = \frac{1}{1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}}.$$

On trouve ainsi de (74):

$$(80) \quad \frac{dv}{dy} = \frac{v}{\tau_r + y} + \frac{A}{u_l^2} \left( \frac{m^*+1}{m^*+\mu} \right)^2 \cdot \frac{e^{-y} \cdot v^2}{\left[1 - \frac{v(\mu-1)}{(\tau_r+y)(m^*+\mu)(1-\tau_r/\tau_l)}\right]^2} (\tau_r+y)(v-y).$$

C'est la forme finale de l'équation différentielle (47), de laquelle nous aurons à déduire  $u_l$ , en faisant usage des conditions à limite valables pour  $v$  aux points  $T_l$  et  $T_r$ .

En premier lieu, nous chercherons gagner quelques connaissances des courbes intégrales de (80).



## 8. LES COURBES INTEGRALES DE (80).

À cause de la signification physique de  $v$  et de  $\tau$ , nous n'aurons à considérer que des valeurs positives de ces variables. Nous constatons la pente des courbes intégrales. Il est:  $dv/dy = \infty$  pour  $\tau = 0$ , de même pour la droite «A»:  $v = y$ , et pour la droite «D»:

$$v = \frac{\tau(m^* + \mu)(1 - \tau_r/\tau_l)}{\mu - 1}$$

cette droite correspond à  $M/M_l \rightarrow \infty$ , cf. (72). Pour notre problème, nous avons toujours

$$v < \frac{(m^* + \mu) \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}\right)}{\mu - 1} \cdot \tau.$$

Il est:  $dv/dy = 0$  pour  $v = 0$ , de même pour la courbe «B»:

$$(81) \quad \left[1 - \frac{v(\mu - 1)}{(\tau_r + y)(m^* + \mu)(1 - \tau_r/\tau_l)}\right]^2 (v - y) + \frac{Ae^{-\tau r}}{u_l^2} \cdot \left(\frac{m^* + 1}{m^* + \mu}\right)^2 \cdot e^{-y} \cdot v = 0.$$

La courbe  $B$  passe par le point  $y = 0, v = 0$ ; partout dans le domaine  $y > 0, v > 0$  elle se trouve au-dessous de la droite  $A$ . En effet, en raison de (81) on a pour les valeurs  $v(B)$  de  $v$ , correspondantes à la courbe  $B$ :

$$(81 a) \quad v(B) = \frac{y}{1 + \frac{A \cdot e^{-\tau r} (m^* + \mu)^2 e^{-y}}{\left[ u_l (m^* + \mu) \left(1 - \frac{v(B)(\mu - 1)}{(\tau_r + y)(m^* + \mu)(1 - \tau_r/\tau_l)}\right) \right]^2}};$$

le dénominateur étant  $> 1$ , il suit que  $v(B) < y$ . Au point  $y = 0, v = 0$ , la pente de la courbe  $B$  relative à l'axe de  $\tau$ , est mineure de 1. Pour des valeurs de  $y$  suffisamment grandes, la courbe  $B$  s'approche asymptotiquement à la droite  $A$ .

Pour  $v > 0, \tau > 0$ , on a  $dv/dy > 0$ , si  $v > y$ , c'est à dire: à gauche et au-dessous de la droite  $A$ , cf. figure 1. Dans le domaine  $v > 0, \tau > 0, y > 0, y > v > v(B)$ , c'est à dire: entre la droite  $A$  et la courbe  $B$  au-dessus de l'axe des abscisses, on a  $dv/dy < 0$ . Dans le domaine  $v > 0, \tau > 0, y > 0, v < v(B)$ , c'est à dire: au-dessous de la courbe  $B$ , mais au-dessus de l'axe des abscisses, on a  $dv/dy > 0$ . Cela donne

une idée qualitative de la forme des courbes intégrales, comme l'on a esquissé dans la fig. 1 ; nous aurons à compléter cette figure provisoire.

On voit, que le point  $P: v=0, y=0, \tau=\tau_r$ , est un point singulier. La courbe intégrale caractérisant la combustion, doit passer justement par ce point  $P$ . En effet, pour  $T=T_r$ , il doit résulter  $n_1=0$ , c'est à dire  $v=0$  pour  $\tau=\tau_r$ , soit pour  $y=0$ . Cette courbe intégrale, nous la nommerons la courbe «C»; elle doit passer en outre par un point donné:  $T=T_l, n_1=n_{1l}$ , c'est à dire:  $\tau=\tau_l$ , soit  $y=y_l$ , et  $v=v_l$ . Ce

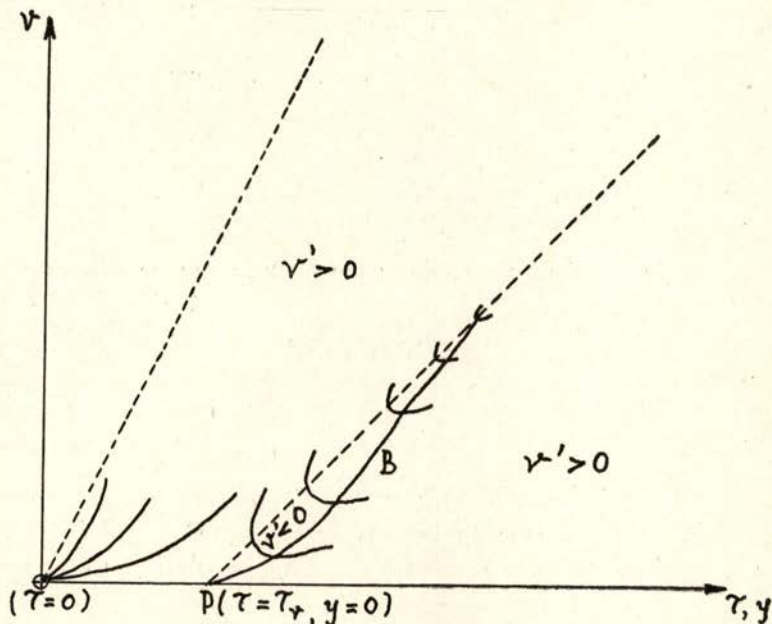


Fig. 1 — Résumé provisoire de la forme des courbes intégrales de l'éq. (80). Les courbes auxiliaires sont représentées par de lignes striées.

point sera appelé le point  $Q$ . Les courbes intégrales de (80) contiennent une constante d'intégration arbitraire, laquelle est fixée au moment qu'on satisfasse à la condition que la courbe passe par un point donné. Par conséquent,  $C$  ne contient plus de constante libre au moment qu'on ait satisfait à la condition que  $C$  doit passer par  $P$ . Ça veut dire qu'en général  $C$  ne peut pas passer par  $Q$ , parcequ'on peut choisir les coordonnées de  $Q(\tau=\tau_l, y=y_l)$  à discrétion. Les grandeurs qui apparaissent en (80):  $\tau_r, \tau_l, A, m^*, \mu$  peuvent être considérées comme connues,  $u_l$  est la grandeur cherchée. Comme en (80)  $u_l$  est contenue en forme explicite, les courbes intégrales de (80) dépendent de la valeur de  $u_l$ . Une variation de  $u_l$  en (80), il est vrai, ne cause pas de changement aux droites  $A$  et  $D$ . De même sur l'axe d'ordonnées

et sur  $A$ , la pente  $\infty$  des courbes intégrales reste inchangée, et il reste inchangée la pente zéro sur l'axe d'abscisses. Mais ils changent la courbe  $B$ , et la pente  $dv/dy$  des courbes intégrales. Par variation de  $u_l$  on peut faire passer la courbe  $C$  par le point  $Q$ . Ça est possible pour une seule valeur de  $u_l$  et implique la détermination de la vitesse de propagation de la combustion.

Nous montrerons d'abord que le point  $Q$  est situé toujours au-dessus de la droite  $A$ ; ça est équivalent à la démonstration du fait qu'on ait toujours  $v_l > y_l$ . Il suit de (77) que  $v_l = N_{1l}/D_1$ ; nous tirons de (76), (69), (75):

$$(82) \quad v_l = \frac{N_{1l} \tau_r}{D_1} = \frac{N_{1l} \tau_r k \tau_l q'}{\varrho_l \bar{c}_{pr} E} = \frac{N_{1l} \tau_r k \tau_l (T_r - T_l)}{\left(N_{1l} - \frac{(\lambda T_x)_l}{u_l q'}\right) E}$$

$$= \frac{T_l - T_r}{1 - \frac{(\lambda T_x)_l}{N_{1l} u_l q'}} = \frac{y_l}{1 - \frac{(\lambda T_x)_l}{N_{1l} u_l q'}};$$

comme le dénominateur est plus petit que 1, on a  $v_l > y_l$ . Mais il est à observer que le dénominateur a une valeur extrêmement voisine de 1, ce que signifie que  $Q$  pratiquement se trouve sur la droite  $A$ . Les valeurs numériques du § 7 nous donnent pour le dénominateur de (82):

$$1 - \frac{(\lambda T_x)_l}{N_{1l} u_l q'} \approx 1 - 1 \cdot 10^{-9}.$$

Par conséquent, nous pouvons poser

$$(82 a) \quad v_l = y_l$$

dans tous les cas, où on ne s'intéresse pas en la différence entre  $v_l$  et  $y_l$ .

Il suit de l'ordre connu de grandeur des énergies d'activation, que pour  $T_l \approx 300^\circ\text{K}$ ,  $\tau_l$  est un grand nombre de l'ordre de 30, et que  $\tau_r$  est de l'ordre de 5. Des caractéristiques physiques de la mixture avant la combustion et de la flamme même on peut déduire sans avoir exécuté aucune calcul:  $\tau_l$  doit avoir une valeur si élevée que le nombre  $Z$  des collisions effectives résulte comme négligeable; d'autre part,  $\tau_r$  doit être un nombre si petit que  $Z$  ne soit pas négligeable comparé au nombre «cinétique» des collisions des molécules. Exprimé en formules ça veut dire qu'en l'équation différentielle (80), le second membre à droite ne soit considérable qu'à des valeurs de  $\tau$  très voisines de  $\tau_r$ ,

et qu'on puisse négliger ce membre aux valeurs de  $\tau$  plus élevées. Posons :

$$(83) \quad v' \equiv \frac{dv}{dy};$$

pour des valeurs suffisamment grandes de  $\tau$  il suit de l'équation (80) :

$$(84) \quad v' \approx \frac{v}{\tau_r + y},$$

ce qu'entraîne

$$(85) \quad v \approx (\tau_r + y) \cdot \text{const.}$$

Par conséquent, toutes les courbes intégrales sont, dans la région  $v > 0$ ,  $\tau > 0$ , des droites qui semblent rayonner du point 0 ( $v=0, \tau=0$ ) pourvu qu'on se trouve à des distances suffisamment grandes du point  $v=0, y=0$ . Ça vaut partout, à l'exception du voisinage de la droite  $A$  où on a :  $v \approx y$ , où par conséquent le second membre à droite de (80) cesse à être négligeable ; en effet, sur  $A$  ce membre tend vers l'infini.

Examinons maintenant, si l'approximation (85) soit valable dans le voisinage du point  $Q(v_l, y_l)$ . Nous calculons  $dv/dy$  pour  $v=v_l, y=y_l$  à partir de (80) ; pour  $v_l=y_l$  nous aurons à faire usage de (82), en outre, il suffira poser  $v_l=y_l$ . Tenu compte des éq. (77), (73), (64), (28), (73), (44), il suit pour  $v'_l$  :

$$(86) \quad v'_l = 1 - \frac{T_l}{T_r} \cdot \frac{\Delta f_r}{f_l + 2 + \Delta f_r} \approx 1,$$

le second membre étant au maximum de l'ordre de 0,07, régulièrement plus petit de cela. Nous démontrerons que cette déviation de la valeur déduite de (84) :

$$v'(y \approx y_l) = \frac{\tau_l - \tau_r}{\tau_l} = 1 - \frac{T_l}{T_r},$$

s'effectue dans la proximité la plus voisine de la droite  $A$ . Dans dite région, les courbes intégrales ont une courbure vers le haut, comme on trouve de (80), à l'aide de (82) et (86). Le fait d'une courbure de signe positif,  $v'' > 0$ , l'on voit aussi des faits suivants :  $v'_l \approx 1$ ,  $Q$  audessus de la droite  $A$ ,  $v' > 0$  à gauche et au-dessus de  $A$ , pour  $y \gg 1$  les courbes intégrales sont des raies rayonnant du point  $v=0, \tau=0$  (à l'exception de la proximité la plus voisine de  $Q$ ).

En outre, on voit que le facteur  $e^{-y}$  est la cause du caractère rectiligne des courbes intégrales dans la région de valeurs suffisamment grandes de  $y$ . Les éqs. (81) ou (81 a) montrent que la courbe  $B$  est pratiquement identique à la droite dans la région de valeurs suffisamment grandes de  $y$ . Par conséquent, la courbe  $C$  part du point  $Q$  dans une direction qui s'éloigne de la droite  $A$  vers le côté gauche au sens de valeurs de  $v$  décroissantes; elle est courbée initialement vers le haut, alors elle suit la raie partante du point  $v=0$ ,  $\tau=0$ , pour terminer au point  $P$ .

La pente de la courbe  $C$  au voisinage du point  $P$ , nous la déduisons de (80). Pour  $y \ll 1$ ,  $v \ll 1$  on a :

$$(87) \quad v' \cdot (v - y) \approx \frac{A \left( \frac{m^* + 1}{m^* + \mu} \right)^2 \cdot e^{-\tau_r} v_2}{u_1^2 \tau_r} = Bv^2; \quad B = \frac{A \left( \frac{m^* + 1}{m^* + \mu} \right)^2 e^{-\tau_r}}{u_1^2 \tau_r}.$$

Cette équation différentielle est intégrable par des méthodes élémentaires; on trouve :

$$(88) \quad y = e^{\frac{1}{Bv}} \left( B_1 + \frac{1}{B} \int_{x=\frac{1}{Bv}}^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx \right);$$

$B_1$  est la constante d'intégration; à cause de la condition  $y=0$  pour  $v=0$ , et parceque  $B > 0$ , on a:  $B_1=0$ . Nous développons l'intégrale dans une série sémicongérente :

$$(89) \quad By = Bv - 1! (Bv)^2 + 2! (Bv)^3 - 3! (Bv)^4 + \dots$$

$v=0$  est compatible avec  $y=0$ ; en effet, l'éq. (80) montre que  $v=0$  est une solution exacte. L'axe  $\tau$  est une courbe intégrale. Si on finit la série (89) au point, où les membres commencent à augmenter, il résulte un polynôme qui donne une représentation assez exacte  $y=f(v)$  dans le voisinage du point  $P$ . La fonction inverse  $v=f^{-1}(y)$  est univalente dans le voisinage de  $P$ , elle est de la forme :

$$(90 a) \quad v = y + \dots$$

Hors de l'axe  $y$ , il y a une seule courbe intégrale de plus qui passe par le point singulier  $P$ ; évidemment, cette courbe c'est la courbe cherchée  $C$ . Aux environs de  $P$ , elle est donnée approximativement par (90 a).

Pour une représentation plus exacte valable dans le voisinage de  $P$ , il nous faut introduire :

$$(90b) \quad v = y + by^2 + cy^3 + \dots$$

dans l'éq. (80). Notez que (90a) était une conséquence de l'équation approximative (87)! On trouve :

$$(91) \quad v = y + By^2 + B \cdot \left[ \frac{2(\mu-1)}{(m^* + \mu)(1 - \tau_r/\tau_i) \tau_r} - 1 \right] y^3 + \dots;$$

la valeur de  $B$  est donnée par (87). L'éq. (91), c'est la représentation cherchée de  $C$  en forme de série, valable dans le voisinage du point  $P$  ( $y=0, v=0$ ). On voit que la courbe  $C$  est tangente à la droite  $A$  au point  $P$ , elle a courbure positive aux environs de  $P$ . La courbure diminue à l'augmentation de  $y$ ; en effet, le facteur de  $y^3$  dans (91) est négatif. Des valeurs numériques du § 6, on trouve, utilisant (73):  $A \approx 5 \cdot 10^7$ ,  $B \approx 1,0$ , si on assume  $\tau_r \approx 5$ .

Aucune des courbes intégrales situées au-dessus de  $A$ , peut franchir la droite  $A$ , comme  $v' > 0$  partout dans cette région, et comme  $v' \rightarrow \infty$  sur  $A$ . Par conséquent, cela vaut aussi pour la courbe  $C$ . Les courbes intégrales situées au-dessous de  $A$ , franchissent toutes la droite  $A$  et se rapprochent à elle aussitôt. En général, toutes les courbes intégrales au-dessus de  $A$ , s'accommodent tant plus à la direction de  $A$  quant la valeur de  $y$  soit plus grande, aussitôt que la courbe s'aurait approché suffisamment à la droite  $A$ . Chez les courbes intégrales qui se trouvent plus haut entre les courbes venant de la région au-dessous de  $A$  et s'approchant à la droite  $A$ , ce changement de direction auprès de  $A$  est très rapide; d'abord elles changent à la verticale en franchissant  $A$ , alors elles s'accommodent à la direction de  $A$  vers le dehors. Ces courbes semblent se composer de deux droites: l'une venant de dehors dans la direction vers l'origine  $O$ , elle termine sur  $A$ ; l'autre identique à la droite  $A$ , suivie dans la direction vers le dehors à partir du point d'intersection de  $A$  avec la première droite. Les deux droites forment un angle qui à peu près est égal à  $\pi$ . Ainsi on trouve la représentation plus perfectionnée de la fig. 2 qui est à remplacer l'esquisse de la fig. 1. On a numéroté dans la fig. 2 quelques courbes intégrales. Pour des valeurs de  $y$  assez grandes, les courbes venant de la région au-dessous de  $A$ , résultent pratiquement identiques à la droite  $A$ .

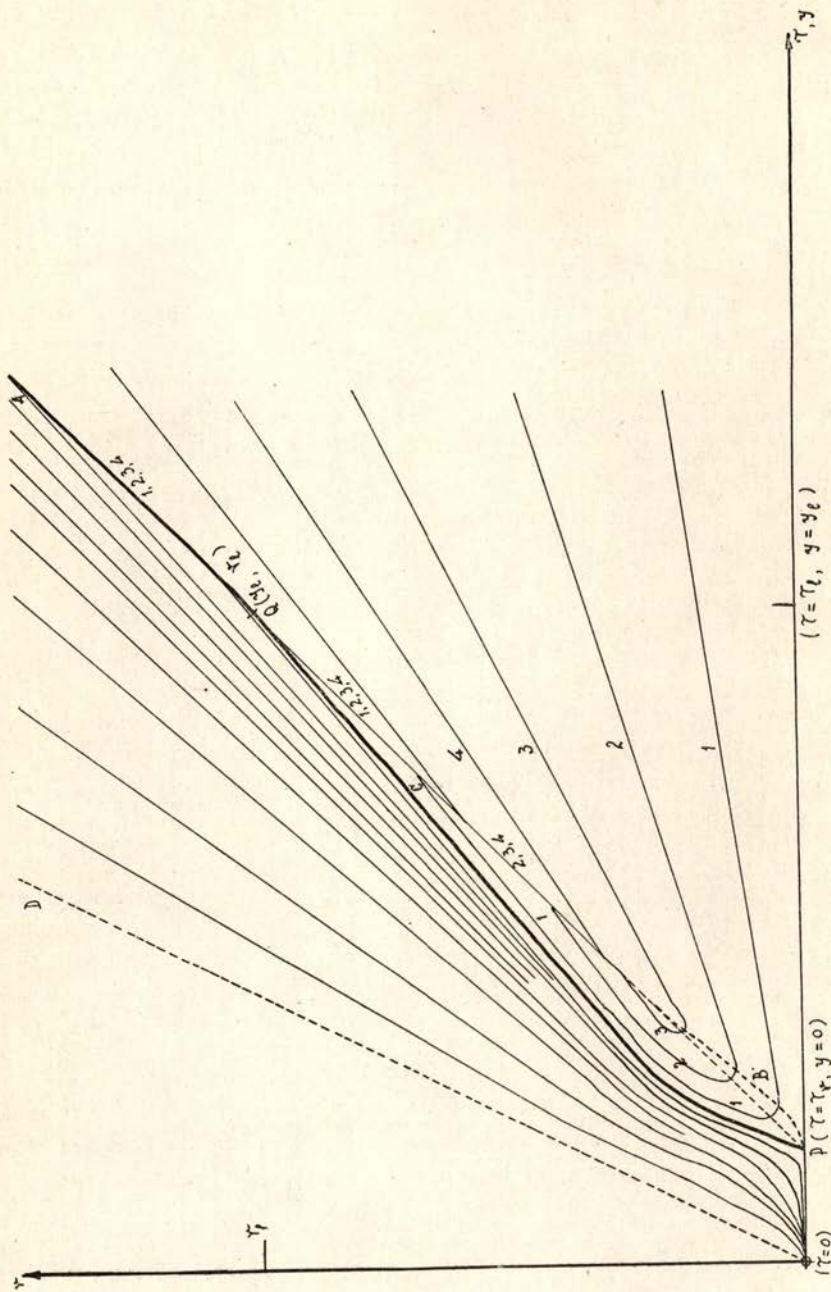


Fig. 2 — Représentation qualitative des courbes intégrales de (80) en lignes plaines.  
 Les courbes auxiliaires ont été striés.  
 La courbe C est représentée par une ligne grosse.

On tire des éqs. (32), (67), (68), (69), (68 a), (76), (77):

$$\lambda T_x = \frac{n_l q^l \tau_l D_2}{\tau_r} \cdot \frac{v-y}{\tau};$$

à l'aide de (69), (77a) ça se transforme en :

$$(92) \quad \lambda T_x = \frac{u_l q^l n_{1l}}{1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}} \cdot \frac{v-y}{\tau};$$

par conséquent,  $T_x \approx O(10^6) \cdot \frac{v-y}{\tau}$ . Or,  $T_x$  a des valeurs très grandes de l'ordre de  $10^5$  dans la flamme; il y est  $T \approx 1800^\circ\text{K}$ , c'est à dire  $\tau \ll 6$ . Il suit que  $v-y \approx O(1)$  dans cette région de valeurs de  $\tau$ ; en outre,  $v > y$  sur la courbe  $C$ , ce que signifie  $T_x > 0$ . Pour des valeurs de  $y$  qui soient  $< 1$ , mais pas trop petites, disons pour  $y \approx \frac{1}{3}$ , le second membre à droite de (80) est beaucoup plus grand que le premier; pour  $y \approx \frac{1}{3}$  le quotient des deux membres est de l'ordre de

20. On pourra calculer  $v$  dans cette région de l'éq. (91). La courbe  $C$  s'éloigne dans cette région de la droite  $A$ , sa courbure étant positive, cf. (91). Aussi pour des valeurs de  $T$  plus petites, c'est à dire pour  $\tau$  et  $y$  plus grandes,  $T_x$  toujours est assez grand; par conséquent,  $v-y$  continue à croître. Si nous passons à des valeurs de  $y$  de plus en plus croissantes, bientôt le second membre sera plus petit que le premier, parceque  $v-y$  est croissante, et surtout, parceque  $e^{-y}$  diminue rapidement. Ainsi on entre la région, où  $\tau$  et  $y$  sont si grandes que le second membre à droite de (80) est à négliger en raison du premier. Alors  $v-y$  est toujours de l'ordre 1, cependant  $\tau$  atteint l'ordre de 20 à 40. Cela donne la partie rectiligne de la courbe  $C$ , la direction de laquelle est celle d'une raie sortant du point 0 ( $v=0, \tau=0$ ). Le calcul de  $v_l'$  nous montre que pour des valeurs de  $y$  élevées le second membre de (80) ne cessera pas à être négligeable en raison du premier avant que soit  $v \approx y$ . Ce n'est pas plus tôt que  $C$  commence à devier de la direction de la raie mentionnée pour s'accomoder à la droite  $A$ . Même sous les conditions suivantes:  $\tau \approx \tau_l, v-y \approx y_l \mu$  où  $\mu \ll 1$ , mais  $\mu \gg \frac{(\lambda T_x)_l}{n_{1l} q^l u_l} \equiv \varepsilon \approx 0(10^{-9})$  — c'est possible à cause de la petitesse de  $\varepsilon$  — la courbe  $C$  toujours est rectiligne et conserve la direction de la raie



mentionnée. Ce n'est qu'au cas  $v-y \approx y_l \varepsilon$ , que le second membre de (80) devienne comparable au premier, et que  $C$  se détourne pour s'accommoder à la direction de  $A$ . Au même temps, il résulte  $T_x \approx T_{x_l}$ , ce qu'on trouve de (92); la courbe  $C$  a arrivé au point  $Q$ . À cause de  $\varepsilon \approx 0(10^{-9})$ , le point  $Q$ , c'est le point d'intersection entre la droite  $A$  et la partie rectiligne de  $C$ . Par conséquent, la partie rectiligne de  $C$  a la pente :

$$(93) \quad v' = \frac{v_l}{\tau_l} = \frac{y_l}{\tau_l} = 1 - \frac{\tau_r}{\tau_l} = 1 - \frac{T_l}{T_r}.$$

En total, la courbe  $C$  possède les propriétés : Elle sort du point  $P$  ( $v=0, y=0$ ), elle est ascendante jusqu'au point  $Q$  ( $v_l=y_l=\tau_l-\tau_r$ ). Elle est tangente à la droite  $A$  ( $v=y$ ) dans le point  $P$ ; dans le voisinage de  $P$ , elle a la forme :  $n=y+By^2+\dots$ ,  $B$  étant définie par (87). Audessus de  $P$ , mais dans le voisinage de  $P$ , la pente de  $C$  est donnée essentiellement par le second membre de (80). Bientôt,  $C$  s'accommode à la raie qui joint le point  $O$  ( $v=0, \tau=0$ ) au point  $Q$ ; jusqu'à  $Q$ , la courbe  $C$  coïncide avec cette raie.  $\tau_r, \tau_l$  étant connues, on connaît la position des points  $P, Q$ . Mais seulement au cas que  $u_l$  soit choisie proprement, la courbe  $C$  passera en réalité par le point  $Q$ , en tout autre cas, elle atteindra la droite  $A$  dans un point qui sera différent de  $Q$ . Maintenant nous irons à calculer  $u_l$ .

## 9. CALCUL ANALYTIQUE DE LA VELOCITE DE PROPAGATION DE LA COMBUSTION.

Comme représentation approximative de  $C$  nous utilisons :

$$(94) \quad v_C \approx (b_1 y + b_2) e^{-y} + b_3 y + b_4;$$

ainsi nous pourrions satisfaire à la condition de que  $C$  soit une droite pour  $y \gg 1$ ; on aura à fixer  $b_3, b_4$  de telle sorte que la droite soit une raie joignant  $O$  et  $Q$ ; nous satisferons à la condition de tangence à la droite  $A$  en  $P$ , ce qu'entraînera deux relations de plus pour les constantes; et enfin, nous aurons une bonne représentation qualitative de la courbe  $C$  entre  $P$  et la raie mentionnée, surtout dans la région importante des valeurs de  $y$  pas trop grandes. En effet, dans cette dernière région, le second membre à droite de (80) est prédominant;  $v-y$  est alors de l'ordre de  $y, (\tau_r+y)^{-1}$  peut être développé en série

de  $y/\tau_r$ , les deux carrés au numérateur et au dénominateur (sans  $1/u_i^2$ ) sont causés par  $(M/M_i)^2$ , expression qui ne diffère jamais beaucoup de l'unité. Par conséquent, le second membre de (80) assumera dans la région considérée la forme:  $\text{const}^{\text{te}} \cdot ye^{-y}$ . Il suit des conditions mentionnées:  $b_3 = 1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}$ ;  $b_4 = \tau_r \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}\right) = \tau_r b_3$ ;  $b_2 = -b_4 = -\tau_r b_3$ ;  $b_1 - b_2 + b_3 = 1$ ;  $b_1 = 1 - b_3(1 + \tau_r)$ . Cela donne à la représentation approximative de la courbe  $C$  la forme finale:

$$(95) \quad v_C = [y(1 - b_3(1 + \tau_r)) - b_3 \tau_r] e^{-y} + b_3(y + \tau_r); \quad b_3 = 1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}.$$

Il ne serait pas difficile changer (94) de sorte que pour  $C$  les conditions mentionnées restent satisfaites mais qu'on ait pour  $y \ll 1$  l'approximation plus exacte (91). Pour cela, on poserait par exemple:

$$(95a) \quad v_C = \frac{a_1 + a_2 y + a_3 y^2}{a_4 y e^y + 1} + a_5 + a_6 y.$$

La méthode de détermination de  $u_i$  par l'usage de l'approximation (94), laquelle nous appliquerons plus bas, peut être appliquée aussi à la forme (95a) ou à d'autres approximations proprement choisies. Nous nous bornerons à utiliser (94), (95).

Nos considérations nous donnent le droit d'espérer que la fonction (95) sera une approximation raisonnable de la courbe  $C$ , mieux dit, de celle courbe  $C$  qui correspond à la valeur appropriée de  $u_i$ . En effet, pour une valeur fixe quelconque de  $u_i$ , la courbe  $C$  ne passera pas par  $Q$ , et par conséquent, ne correspondra pas à notre fonction  $v_C$ . C'est pour une seule valeur bien déterminée de  $u_i$ , que  $C$  passera par  $Q$ , et c'est seulement pour cette valeur de  $u_i$  que  $C$  sera représentée approximativement par  $v_C$ . Selon nos suppositions,  $v_C$  possède les propriétés nécessaires de  $C$ , exactement pour  $y \rightarrow 0$  et pour  $y \rightarrow y_i$ , qualitativement dans la région intermédiaire. Si nous aurions la connaissance exacte de la courbe cherchée  $C$ , la courbe devrait coïncider avec  $v_C$  en  $P$  et  $Q$  (c'est à dire dans l'approximation à laquelle nous avons satisfait aux conditions valables au voisinage de  $P$  et  $Q$ ), mais la courbe ne serait pas aussi très différente de  $v_C$  dans la région intermédiaire. Cela implique une condition pour l'équation différentielle;  $u_i$  doit avoir une valeur telle, que  $v_C$  satisfasse de la meilleure façon possible à l'équation différentielle. En effet, il n'y a pas de paramètre libre en  $v_C$ ; par conséquent toute condition supplémentaire aux conditions satisfaites, qui exige similitude entre  $v_C$  et la courbe cherchée  $C$ , c'est une condition fixant le paramètre  $u_i$ , jusqu'à ce point arbitraire.

C'est une méthode pour la détermination de paramètres applicable à d'autres équations différentielles aussi. Soit donné un problème de sorte qu'il existe une courbe intégrale satisfaisant aux conditions du problème, seulement en cas qu'on donne une certaine valeur au paramètre arbitraire. Alors on forme une solution approximative qui satisfait aux conditions données et qui possède les propriétés de la courbe intégrale cherchée au degré le plus haut possible. La substitution de la solution approximative dans l'équation différentielle donnera la valeur (approximée) du paramètre.

Dans notre problème nous avons 2 possibilités :

I) Nous utilisons le développement (91) déduit de l'équation différentielle (80), et nous exigerons que ce développement soit coïncident au développement de  $v_C$  dans les membres d'ordre plus élevé aussi. Ainsi on effectue que la courbe approximée  $v_C$  coïncide, même dans le voisinage plus étendu de  $P$ , avec celle des courbes  $C$  qui appartient à la valeur calculée de  $u_i$ . Ce voisinage de  $P$  est en effet de grande importance physique. La courbe mentionnée  $C$  ne passera pas nécessairement par  $Q$ . Mais comme nous avons choisi  $v_C$  de manière que  $v_C$  représente la courbe cherchée  $C$  d'une façon assez étroite, la valeur de  $u_i$  calculée à la méthode I) sera à peu près identique à la valeur exacte de  $u_i$ .

II) Nous exigeons que la solution approximée  $v_C$  satisfasse exactement à l'équation différentielle (80) dans un point d'importance physique. Pour cela, nous choisirons une température  $\bar{T}$  qui soit située dans la région de forte réaction chimique, cela exige  $\bar{T}$  plus voisin de  $T_r$  que de  $T_l$ , par exemple :  $\bar{T} \approx \frac{2T_r + T_l}{3}$ . Alors nous avons pour les valeurs correspondantes de  $\tau$  et de  $y$

$$\bar{\tau} \approx \frac{3\tau_r \tau_l}{2\tau_l + \tau_r}; \quad \bar{y} \approx \frac{\tau_r \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}\right)}{2 + \tau_r/\tau_l};$$

en général la parenthèse a des valeurs entre 0,6 et 0,8, pour les combustions régulières. Comme nous sommes libres à choisir  $\bar{y}$  à discrétion — sous condition d'un choix raisonnable —, nous posons :

$$(96) \quad \bar{y} = \frac{\tau_r}{3}.$$

Nous exigerons que  $v_C$  satisfasse à l'équation différentielle (80) exactement au point  $\bar{y}$ . Alors nous obtiendrons une certaine valeur de  $u_i$ , et

une courbe intégrale passant par le point  $\bar{y}$ ,  $v_C(y)$ , qui dans ce point a la pente commune à  $v_C$ . Cette courbe intégrale ne passera pas exactement ni par  $P$  ni par  $Q$ , mais au cas que  $v_C$  soit une bonne approximation, la courbe intégrale ne manquera pas à satisfaire à ces conditions à un degré assez haut.

Maintenant nous déduisons les formules pour la vitesse de propagation de la combustion qui résultent des exigences données sous I ou II.

I) Près de  $P$ , on a selon (95):

$$(97) \quad v_C = y + y^2 \frac{\tau_r}{2} \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l} - \frac{2}{\tau_l}\right) - y^3 \frac{\tau_r}{3} \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l} - \frac{3}{2\tau_l}\right) + \dots;$$

la comparaison à (91) nous donne 2 conditions pour  $u_l^2$ , parceque nous allons à comparer deux membres du développement. Voilà *une preuve du degré d'exactitude de notre approximation*: les 2 conditions doivent donner à peu près la même valeur de  $u_l$ .

Le facteur de  $y^2$  donne, à cause de (87):

$$(98 a) \quad u_{l(1)}^2 = \frac{2A \left(\frac{m^*+1}{m^*+\mu}\right)^2 e^{-\tau_r}}{\tau_r^2 \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l} - \frac{2}{\tau_l}\right)};$$

et le facteur de  $y^3$ :

$$(98 b) \quad u_{l(2)}^2 = \frac{3A \left(\frac{m^*+1}{m^*+\mu}\right)^2 e^{-\tau_r} \left[1 - \frac{2(\mu-1)}{(m^*+\mu)(1-\tau_r/\tau_l)\tau_r}\right]}{\tau_r^2 \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l} - \frac{3}{2\tau_l}\right)}.$$

Le quotient des deux valeurs de  $u_l^2$  est:

$$(98 c) \quad \frac{u_{l(2)}^2}{u_{l(1)}^2} = \frac{3 \left[1 - \frac{2(\mu-1)}{(m^*+\mu)(1-\tau_r/\tau_l)\tau_r}\right] \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l} - \frac{2}{\tau_l}\right)}{2 \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l} - \frac{3}{2\tau_l}\right)} \approx \frac{3}{2} \left[1 - \frac{2(\mu-1)}{(m^*+\mu)\left(1 - \frac{\tau_l}{\tau_r}\right)\tau_r} - \frac{1}{2(\tau_l - \tau_r)}\right],$$

en vertu de  $\tau_l \gg 1$ . On peut négliger le dernier terme de la parenthèse, parcequ'il est  $< 0,03$ ; le second est  $< \frac{1}{\tau_r}$ , et la parenthèse

n'est que peu variable (cf. les valeurs numériques de la table 1!). Dans des nombres, on a :

$$(98 d) \quad \frac{u_{l(2)}}{u_{l(1)}} \approx 1,1 \text{ à } 1,2.$$

Ça veut dire : *notre méthode d'approximation a passé bien cet examen.* Nous pouvons constater comme résultat de l'exigence I pour la formule de la vélocité de propagation de la combustion

$$(98 e) \quad u_{l(1)} = \frac{\sqrt{2} A_1 \frac{m^* + 1}{m^* + \mu} \cdot e^{-\tau_r/2}}{\tau_l \tau_r \sqrt{1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}}}; \quad A_1 = A \tau_l^2 = \frac{4(2a_1)^2 \sqrt{\frac{\pi}{m_1}} \lambda_0 E^2}{k^{3/2} q'}$$

Nous montrerons que l'exigence II donne pratiquement la même formule.

Selon (98 e),  $u_l$  est déterminé essentiellement par  $e^{-\tau_r/2}$ ;  $u_l$  a de valeurs grandes pour  $\tau_r \equiv \frac{E}{kT_r}$  petit, c'est-à-dire pour de températures élevées  $T_r$  de la partie « consommée » de la mixture, et pour de petites énergies d'activation;  $u_l$  est une fonction croissante monotone de  $T_r$  et de  $T_l$ , c'est à dire de la température de la mixture pas encore enflammée. Pour  $\tau_r$  on a d'accord à la loi d'énergie (77 a) :

$$(99) \quad 1 - \frac{\tau_r}{\tau_l} = \frac{q' n_{lu} \tau_r k}{E \bar{c}_{pr} \rho_l} = \frac{q'}{E} \cdot \tau_r \cdot \frac{2}{f_l + 2 + \Delta f_r} \cdot \frac{1}{m^* + 1};$$

$$\tau_r = \frac{1}{\frac{1}{\tau_l} + \frac{q'}{E} \cdot \frac{2}{f_l + 2 + \Delta f_r} \cdot \frac{1}{m^* + 1}};$$

pour des valeurs constantes de  $\tau_l = \frac{E}{kT_l}$ ,  $\tau_r$  est autant plus petit que  $q'/E$  soit plus grand, que le nombre  $f$  des degrés de liberté de la molécule soit plus petit, (ci-inclus le nombre des degrés de liberté excitables par l'augmentation de température), et que  $m^*$ , le quotient molaire oxygène/combustible, soit plus grand. Cependant, le résultat concernant  $m^*$ , dépend essentiellement de notre supposition d'une réaction entre des molécules similaires. Ce résultat ne serait pas valable dans la même forme pour des réactions oxygène-combustible, comme on les trouve chez la combustion des hydrocarbures. En outre,  $q'/E$  est toujours  $> 1$ , parcequ'au cas de combustion la chaleur  $q'$  de réaction par molécule, est toujours plus grande que l'énergie  $E$  d'activation par

molécule; L'énergie libérée, dans ces cas, doit être plus grande que l'énergie introduite, si non, on n'aurait pas de combustion.

II) L'exigence alternative pour le calcul de  $u_l$ , c'est la satisfaction de l'équation différentielle (80) par  $v_C$ , au point  $y = \bar{y} = \tau_r/3$ . Nous déduisons de (95):

$$(100 a) \quad v_C(\tau_r + y) - v_C = e^{-y} [y^2 (-1 + b_3(\tau_r + 1)) + y\tau_r(-1 + b_3(\tau_r + 2)) + \tau_r].$$

Utilisant la désignation  $\bar{v}_C \equiv v_C(\bar{y})$ , on trouve ainsi:

$$(100 b) \quad \bar{v}'_C(\tau_r + y) - \bar{v}_C = e^{-\tau_r/3} \cdot \tau_r^3 \left[ \frac{4}{9} \left( 1 - \frac{\tau_r}{\tau_l} \right) + \frac{1}{3\tau_r} + \frac{1}{\tau_r^2} - \frac{7}{3\tau_l} \right] \approx \\ \approx \frac{4}{9} \tau_r^3 \left( 1 - \frac{\tau_r}{\tau_l} \right) e^{-\tau_r/3},$$

et:

$$(100 c) \quad \bar{v}_C = \tau_r \left[ e^{-\tau_r/3} \left( \left( 1 + \frac{\tau_r}{3} \right) \left( \frac{\tau_r}{\tau_l} - 1 \right) + \frac{1}{3\tau_l} \right) + \frac{4}{3} \left( 1 - \frac{\tau_r}{\tau_l} \right) \right] \approx \\ \approx \tau_r \left( 1 - \frac{\tau_r}{\tau_l} \right) \left[ \frac{4}{3} - e^{-\tau_r/3} \left( \frac{\tau_r}{3} + 1 \right) \right];$$

cette expression est toujours positive, parcequ'on a  $e^{-\tau_r/3}(\tau_r/3 + 1) < 1$ , pour toutes les valeurs positives de  $\tau_r$ . Il nous faut aussi:

$$(100 d) \quad \bar{v}_C - \bar{y} \approx \tau_r \left[ \left( 1 - \frac{\tau_r}{\tau_l} \right) \left( \frac{4}{3} - e^{-\tau_r/3} \left( \frac{\tau_r}{3} + 1 \right) \right) - \frac{1}{3} \right] \approx \\ \approx \tau_r \left( 1 - \frac{\tau_r}{\tau_l} \right) \left[ 1 - e^{-\tau_r/3} \left( \frac{\tau_r}{3} + 1 \right) \right].$$

Ainsi on trouve par substitution en (80):

$$(101) \quad u_{l(II)}^2 = \\ = \frac{9A_1 \left( \frac{m^* + 1}{m^* + \mu} \right)^2 e^{-\tau_r} \left[ \frac{4}{3} - e^{-\tau_r/3} \left( \frac{\tau_r}{3} + 1 \right) \right]^2}{4\tau_l^2 \tau_r^2 \left[ 1 - \frac{3(\mu - 1) \left( \frac{4}{3} - e^{-\tau_r/3} \left( \frac{\tau_r}{3} + 1 \right) \right)^2}{4(m^* + \mu)} \right]^2 \cdot \left( 1 - e^{-\tau_r/3} \left( \frac{\tau_r}{3} + 1 \right) \right)};$$

le quotient des deux valeurs de  $u_i^2$  est :

(101 a)

$$\frac{u_{i(II)}^2}{u_{i(I)}^2} \approx \frac{\left[ 1 - e^{-\tau_r/3} \cdot \frac{3}{4} \left( \frac{\tau_r}{3} + 1 \right) \right]^2 \left( 1 - \frac{\tau_r}{\tau_l} \right) \cdot 2}{\left[ 1 - \frac{(\mu-1) \left( 1 - e^{-\tau_r/3} \cdot \frac{3}{4} \left( \frac{\tau_r}{3} + 1 \right) \right)}{m^* + \mu} \right]^2 \cdot \left( 1 - e^{-\tau_r/3} \left( \frac{\tau_r}{3} + 1 \right) \right)}$$

toutes les parenthèses ne sont que peu variables, elles ne sont pas très différentes de l'unité. Nous pouvons constater :

(101 b)  $\frac{u_{i(II)}}{u_{i(I)}} \approx 1,2 \text{ à } 1,4;$

les deux méthodes I, II, donnent pratiquement la même formule pour la vitesse de propagation de la combustion, ce qu'est une autre démonstration de l'aptitude de notre approximation. Evidemment, on peut en général juger l'exactitude de l'approximation obtenue pour le paramètre, simplement par la détermination des valeurs du paramètre qui résultent pour des points différents. Dans notre cas, l'accord est en effet très bon.

Dans ce qui suit, nous ferons usage de la valeur plus simple de  $u_{i(I)}$ . Nous ajouterons le facteur  $\sqrt{2} \approx 1,4$ , parce que la formule  $u_{i(II)}$  sera un peu meilleure que celle de  $u_{i(I)}$ ; nous obtenons ainsi la formule d'approximation pour la vitesse de propagation de la combustion dans sa forme définitive :

(102) 
$$u_i = \frac{4 \cdot 2 a_1 \left( \frac{\pi}{m_1} \right)^{1/4} \sqrt{i_0} E}{k^{3/4} \sqrt{q'}} \cdot \frac{m^* + 1}{m^* + \mu} \cdot \frac{e^{-\tau_r/2}}{\tau_l \tau_r \sqrt{1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}}}$$

Nous nous rappelons la signification des notations :  $\tau_r = \frac{E}{kT_r}$  ;  $\tau_l = \frac{E}{kT_l}$  ;  $T_r, T_l$  températures des parties consommée et pas encore consommée respectivement ; E énergie d'activation par molécule du combustible ; k constante de Boltzmann ;  $m^*$  quotient des nombres molaires  $O_2/O_3$  (l'ozone représentant le combustible), les deux nombres pris dans la partie pas encore consommée (enflammée) de la mixture gazeuse ;  $\mu$  quotient des poids moléculaires  $O_3/O_2$  ;  $2 a_1, m_1$  diamètre moléculaire, masse moléculaire du combustible ;  $q'$  chaleur de réaction

par molécule du combustible;  $\lambda_0$  conductibilité thermique de la mixture, divisée par  $\sqrt{T}$ . Toutes les grandeurs dimensionnées sont à mesurer dans le même système d'unités, p. e. dans le système CGS.

Dans (102) le premier facteur est égal à  $2\sqrt{A_1}$ , cf. (98 e); il est le facteur qui détermine la dimension. Maintenant, nous montrerons que la dépendance *dimensionnelle* de  $u_l$  des grandeurs physiques, se peut déduire déjà de considérations purement qualitatives sans qu'il y ait besoin de beaucoup de calcul pour cela. On déduit de la loi d'énergie (cf. (77 a)):

$$(77 a) \quad \varrho_l \bar{c}_{pr} (T_r - T_l) = q' n_{1l},$$

si nous la formulons pour les deux températures limites  $T_r, T_l$ . D'autre part, la loi d'énergie donne pour les dimensions (cf. (25)):

$$(103 a) \quad \lambda \frac{dT}{dx} \sim \varrho_l u_l \bar{c}_{pr} T - r q' \int Z dx;$$

$r$  est le nombre des molécules du combustible qui disparaissent par réaction. L'expression  $r q' \int Z dx$  qui apparaît ici à coté de  $\varrho_l u_l \bar{c}_{pr} T$ , semble indiquer qu'il faudrait introduire le nombre pur  $\frac{r q' \int Z dx}{\varrho_l u_l \bar{c}_{pr} T}$ ; mais (31 a) montre que

$$(103 b) \quad r q' \int_{T_r}^{T_l} Z dx = n_{1l} u_l \cdot q',$$

de manière qu'il résulte seulement le nombre  $\frac{q' n_{1l}}{\varrho_l \bar{c}_{pr} (T_r - T_l)}$  qui selon (77 a) est égal à 1. De (31 a) il suit:

$$(31 a) \quad \frac{d(n_{1l} u)}{dx} \sim r Z.$$

Par division, on trouve de (103 a), (31 a) la relation dimensionnelle:

$$(103 c) \quad \lambda \sim \frac{\varrho_l u_l^2 \bar{c}_{pr} n_{1l}}{r Z},$$

parceque  $n_{1l} \sim n_{1l}$ , et  $u \sim u_l$ . Cela donne en raison de (77 a):

$$(103 d) \quad u_l^2 \sim \frac{\lambda_r Z (T_r - T_l)}{q' n_{1l}} = \frac{r Z}{L} \cdot \frac{\lambda M_l (m^* + 1)}{\varrho_l^2 \bar{c}_{pr}};$$

à droite, on peut ajouter un facteur  $f$  sans dimension, qui peut dépen-



dre de grandeurs sans dimension, c'est à dire de  $\tau_r, \tau_l, m^*, \mu$ . La théorie cinétique des gaz nous apprend que

$$(103 e) \quad \lambda \approx \frac{k^{3/2} \sqrt{T}}{(2a)^2 \sqrt{m}}$$

à un facteur de l'ordre 1 près;  $2a, m$  sont des valeurs moyennes du diamètre moléculaire et de la masse moléculaire de la mixture gazeuse.

Compte tenu de  $n_{1l} = \frac{P_{1l}}{k T_l}$ , il vient de (103 d):

$$(103 f) \quad u_l^2 = \frac{\lambda r Z E^3}{k q' p_{1l}^2} \cdot \frac{1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}}{\tau_l^2 \tau_r} \cdot f = \frac{r Z E^{7/2}}{(2a)^2 \sqrt{m} q' p_{1l}^2} \cdot \frac{1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}}{\tau_l^2 \tau_r \sqrt{\tau}} \cdot f.$$

Selon (103 d, f),  $u_l^2$  a une dépendance essentielle du nombre  $Z$  de collisions effectives. Pour ce nombre  $Z$  des collisions par  $\text{cm}^3$  et sec qui conduisent à une réaction, nous pouvons écrire en général (cf. (28)):

$$(103 g) \quad Z \approx n_{1l}^\alpha \tau_l^{\beta-1/2} e^{-\tau} \cdot g;$$

$n_{1l}$  est, comme toujours, le nombre par  $\text{cm}^3$  des molécules du combustible. Il est assumé que la réaction soit une réaction entre des molécules de l'espèce 1 exclusivement, le cas plus général sera traité dans le travail prochain. Le facteur  $\tau_l^\beta$  nous permet de tenir compte de la coopération de degrés intérieurs de liberté dans la réaction<sup>1</sup>; pour  $s$  degrés de vibration, qui participent à la réaction, il s'ajoute un facteur  $\frac{\tau_l^{2s}}{(2s)!}$  au nombre  $Z$  comme nous l'avions écrit en (28), pourvu qu'il se traite de collisions à deux;  $g$  en (103 g) est un facteur de la dimension de  $\text{cm}^{3\alpha-3} \text{sec}^{-1}$ . Ainsi on trouve de (103 f) la formule:

$$(103 h) \quad u_l^2 \approx g \frac{E^{7/2-\alpha} P_{1l}^{\alpha-2}}{(2a)^2 \sqrt{m} q'} \cdot \frac{\tau_l^{\alpha+\beta-1}}{\tau_l^2 \tau_r} \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}\right) e^{-\tau} \cdot F,$$

où  $F$  est un nombre pur qui peut être fonction de  $\tau_r, \tau_l, m^*, \mu$ .

Au cas de notre formule (28) qui est un cas spécial de la formule

(103 g) on a:  $\alpha=2, \beta=0$ ;  $g \sim (2a)^2 \sqrt{\frac{\pi}{m}}$  à un facteur de l'ordre 1 près.

<sup>1</sup> Cf. les formules données dans le livre de H. J. Schumacher, *Chemische Gasreaktionen*, édition Steinkopff, Dresden 1938, p. 20.

Substituons (103 g) en (103 d), observons que  $\lambda = \lambda_0 \sqrt{T}$  et tenons compte de la valeur de  $g$ , alors nous trouvons pour  $\alpha = 2$ ,  $\beta = 0$

$$(103 i) \quad u_i^2 = \frac{2(2a)^2 \lambda_0 E^2}{k^{3/2} \sqrt{m} q'} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_i}\right) e^{-\tau}}{\tau_r \tau} \cdot f,$$

formule qui est formellement identique à (102). Il est facile prévoir qu'on aura plutôt  $\tau_r$  que  $\tau_i$  dans l'exponent, et l'on suspecte que le nombre des réactions ne comence à augmenter beaucoup qu'à des températures assez élevées. Mais sans calcul il n'est pas possible contrôler cette présomption ni déterminer la fonction  $f/\tau$ . Au cas de (28), il vient de (103 i) à cause de la rélation  $\lambda_0 \approx \frac{k^{3/2}}{(2a)^2 \sqrt{m}}$ :

$$(103 k) \quad u_i^2 = \frac{E}{q'} \cdot \frac{E}{m} \cdot \frac{\left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_i}\right) e^{-\tau} \tau}{\tau_i^2 \tau_r} \cdot F.$$

$E/q'$  est de l'ordre de 1/2;  $E/m$  est égal, d'une exactitude très grande, à  $E_{\text{volts}} \cdot \frac{10^{12}}{M}$ , où  $M$  est le poids moléculaire de la mixture gazeuse;

par conséquent,  $E/m$  est de l'ordre de  $\frac{10^{12}}{M} \cdot \frac{\text{cm}^2}{\text{sec}^2}$ . Nous voyons: (103 d),

et toutes les équations déduites jusqu'à (103 k), sont des conséquences dimensionelles des équations fondamentales. Cela s'entend, parcequ'on peut faire usage de toutes les équations qui régissent un problème des sciences naturelles, pour en déduire des relations dimensionelles. Dans notre problème, il n'y a pas de dimensions d'appareils, par conséquent il doit être possible déduire la vélocité de propagation de la combustion des équations fondamentales seules.

Jusqu'à ce point, nous avons négligé la diffusion, ou mieux dit: nous avons tenu compte d'elle d'une manière sommaire, sans faire usage des équations qui régissent l'influence de la diffusion. Nous allons à montrer que la formule (103 d) est valable même au cas que nous tenons compte de la diffusion. Les équations pour ce cas général, les on trouve par exemple dans le livre de Jost<sup>1</sup>; (il faut ajouter aux formules de Jost la loi de conservation du moment). Les équations (77 a),

• 1 W. Jost, *Explosions-u. Verbrennungsvorgaenge in Gasen*, édition Springer, Berlin, 1939, p. 117.

(103 a, b) restent inchangées; en lieu de (31 a), on a la relation dimensionnelle :

$$(103 l) \quad \frac{d}{dx} \left( D \frac{dn_1}{dx} \right) \sim \frac{d(n_1 u)}{dx} \sim rZ;$$

$D$  est la constante de diffusion. De (103 l) on tire  $D \frac{dn_1}{dx} \sim n_{1l} u_l$ , et de (103 a, l) :

$$(103 m) \quad \frac{\lambda}{D} \sim \varrho_l \bar{c}_{pr},$$

relation dimensionnelle bien connue de la théorie cinétique des gaz. De (103 a, l) on déduit à l'aide de (77 a) :

$$(103 n) \quad u_l^2 \sim \frac{\lambda rZ}{\varrho_l \bar{c}_{pr} n_{1l}} = \frac{\lambda rZ (T_r - T_l)}{q_l n_{1l}^2} = \frac{rZ}{L} \cdot \frac{DM_l (m^* + 1)}{\varrho_l} = \frac{DrZ}{n_{1l}},$$

c'est en effet identique à l'équation (103 d). La dernière forme de (103 n) est d'une simplicité remarquable. Il suit: *les équations (103 d, f) représentent la dépendance dimensionnelle de la vitesse de propagation de la combustion des grandeurs physiques même dans le cas général.* Elles sont une conséquence directe et exclusive des lois de conservation et des suppositions de combustion stationnaire et de réaction entre des particules similaires. Le facteur  $f$ , à l'autre côté, ne s'encontre que par un calcul explicite. L'équation (102) est un cas spécial de (103 d, f) qui est caractérisé par notre formule (28) pour le nombre  $Z$  de collisions.

## 10. COMPARAISON À L'EXPERIENCE.

D'abord nous comparons notre formule pour la vitesse de propagation de la combustion à la formule donnée par Nusselt<sup>1</sup>. La formule de Nusselt est déduite des suppositions: Il existe une «température d'inflammation»  $T_z$ , au-dessus de laquelle la mixture s'enflamme; au-dessous de  $T_z$  la mixture est supposée de réagir lentement; entre  $T_l$  et  $T_z$  l'augmentation de température est causée seulement par la conduction de la chaleur émise par la flamme; entre  $T_z$  et  $T_r$  l'augmen-

<sup>1</sup> Nous suivons l'exposition donnée par W. Jost dans son livre mentionné plus haut, ibidem, p. 108.

tation de température est linéaire ; la vélocité de réaction est indépendante de la température, dans toute la région comprise entre  $T_z$  et  $T_r$ . Dans notre notation, la formule de Nusselt s'écrit :

$$(104) \quad u_{iN}^2 = \frac{\lambda(T_r - T_z) T_l s Z}{\bar{\rho} \bar{c} (T_z - T_l) T_z n_{2r}};$$

$s$  est le nombre de molécules du produit final de la réaction qui se produisent dans chacune des réactions (pour la combustion de l'ozone, le produit final est  $O_2$ , on a  $s=3$ , la notation est la même comme en (29));  $\bar{\rho}, \bar{c}$  sont des valeurs moyennes de la densité et de la chaleur spécifique de la mixture;  $n_{2r}$  est le nombre de molécules du produit final de la réaction par  $\text{cm}^3$  de la mixture « consommée ». À cause de  $p_r \approx p$  (cf. (50)) et de (71), il suit :

$$n_{2r} = n_{1l} \frac{\tau_l}{\tau_r} (m^* + 1).$$

Cela donne à l'équation de Nusselt la forme :

$$(104 a) \quad u_{iN}^2 = \frac{\lambda(T_r - T_z) T_r s Z}{\bar{\rho} \bar{c} (T_z - T_l) T_z n_{1l} (m^* + 1)}.$$

C'est la forme de (103 n) qui, selon nos considérations, doit être valable pour toutes les équations qui décrivent la vélocité de propagation de la combustion. On trouve par division de (104 a), (103 n) :

$$(104 b) \quad \frac{u_{iN}^2}{u_i^2} \sim \frac{(T_r - T_z) T_r}{(T_z - T_l) T_z (m^* + 1)};$$

il reste une fonction sans dimensions, dépendante de quotients de températures et de  $m^*$ , comme on avait à s'attendre dans nos considérations dimensionnelles.

Il suit : Les conséquences qu'on a déduit de la formule de Nusselt sur la dépendance de la vélocité  $u_i$  de  $\bar{\rho}, \bar{c}, Z$ , sont valables en toute généralité, elles sont valables pour toute théorie de la combustion, et *ne sont pas* caractéristiques de la théorie de Nusselt, basée sur les suppositions spécifiées plus haut. En effet, ces conséquences ont été vérifiées par l'expérience. Nous constatons : 1) Au cas qu'on remplace dans une mixture combustible, un gaz inerte du point de vue chimique par un autre qui ait à peu près la même valeur de  $\lambda$ , mais d'autres valeurs de  $\bar{\rho} \bar{c}$ , la vélocité de propagation de la combustion doit être

plus petite pour le gaz qui ait la valeur de  $\bar{\rho} \bar{c}$  plus grande. (Dans nos formules (103), il apparaît  $\bar{\rho}_i \bar{c}_{pr}$  en lieu de  $\bar{\rho} \bar{c}$ , en conséquence de nos considérations sur la loi d'énergie (77 a)). 2) D'accord à (104) et, plus généralement, à (103 n), la vitesse  $u_i$  doit être déterminée par  $\lambda$  seulement, si dans une mixture on remplace un gaz inerte par un autre ayant la même valeur de  $\bar{\rho} \bar{c}$ .

Cette conclusion est une conséquence générale et inévitable des équations fondamentales : elle n'est pas causée par les suppositions assez spéciales et idéalisées de la théorie de Nusselt. On a fait l'objection<sup>1</sup> que l'hélium a une conductibilité thermique plus de 6 fois plus grande que l'argon, les capacités calorifiques étant égales, et que par conséquent la vitesse de combustion devrait être beaucoup plus grande dans des mixtures contenant hélium, de ce quelle est dans les mixtures contenant argon. Les mesures montrent une augmentation médiocre seulement. On a constaté dans des mixtures de 10%  $CH_4$  avec 90% d'une atmosphère contenant 21%  $O_2$  et 79%  $He$  ou  $A$ , que la vitesse de combustion était de 59 cm/sec dans la mixture contenant  $A$ , et de 82 cm/sec dans la mixture contenant  $He$ .

L'objection ne me semble pas décisive. La conductibilité thermique des formules (103 n) et (102), c'est la conductibilité de la mixture. Par un calcul basé sur une formule pour la conductibilité thermique de mixtures que j'avais obtenu au moyen d'une considération simple de la théorie cinétique des gaz, je trouvais 2,1 en lieu de la valeur observée  $82/59 = 1,4$ , pour le quotient théorique des vitesses de combustion des mixtures mentionnées plus haut, c'est à dire une valeur trop élevée, par 50%. Hélas, la conductibilité thermique n'a pas été mesurée dans ces mixtures.

Une généralisation de la déduction usuelle élémentaire pour la conductibilité thermique qui fait usage de considérations cinétiques, nous conduit à la formule :

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\lambda_1}{1 + \frac{n_2}{n_1} \left( \frac{a_1 + a_2}{2a_1} \right)^2 \sqrt{\frac{m_1}{m_2}} + \frac{n_3}{n_1} \left( \frac{a_1 + a_3}{2a_1} \right)^2 \sqrt{\frac{m_1}{m_3}} + \dots} + \\ &+ \frac{\lambda_2}{\frac{n_1}{n_2} \left( \frac{a_2 + a_1}{2a_2} \right)^2 \sqrt{\frac{m_2}{m_1}} + 1 + \frac{n_3}{n_2} \left( \frac{a_2 + a_3}{2a_2} \right)^2 \sqrt{\frac{m_2}{m_3}} + \dots} + \dots \\ &= \sum_k \frac{\lambda_k}{\sum_i \frac{n_i}{n_k} \left( \frac{a_k + a_i}{2a_k} \right)^2 \sqrt{\frac{m_k}{m_i}}} \end{aligned}$$

<sup>1</sup> Voir le livre de Jost, p. 110/111.

ici les  $\lambda_k$  sont les conductibilités thermiques des composantes de la mixture,  $m_k$  les nombres de molécules par  $\text{cm}^3$ ,  $a_k$  les rayons des molécules,  $n_k$  leurs masses. Pour le calcul des mixtures de  $\text{CH}_4$  mentionnées plus haut, nous avons employé les valeurs (en unités Å):  $2a_{\text{CH}_4}=3,34$ ;  $2a_{\text{O}_2}=3,0$ ;  $2a_{\text{He}}=2,0$ ;  $2a_A=2,9$ ; pour toutes les  $\lambda_k$  nous avons assumé, d'accord à la théorie cinétique des gaz, qu'on ait  $\lambda_k=\lambda_{ok}\sqrt{T}$ ; nous avons utilisé les valeurs suivantes des  $\lambda_{ok}$  (en unités CGS):  $\text{CH}_4$   $1,7 \cdot 10^2$ ;  $\text{O}_2$   $1,5 \cdot 10^2$ ;  $\text{He}$   $6,1 \cdot 10^2$ ;  $A$   $0,92 \cdot 10^2$ .

Une erreur de 50% n'apparaîtra pas grosse, si nous tenons compte du fait que les mesures de la vitesse de combustion d'ordinaire ne son pas très exactes et que les  $\lambda_k$  ne sont pas exactement proportionnelles à  $\sqrt{T}$ . Mais qualitativement, on déduit facilement de notre formule pour  $\lambda$  la raison, pourquoi les mesures de la vitesse de combustion accomplies dans des mixtures de  $\text{H}_2$  avec des «atmosphères» composées de 21% de  $\text{O}_2$  et de 79% de  $\text{He}$  ou  $\text{Ne}$  ou  $A$ , n'aient pas montré de différence essentielle entre les gaz nobles; pour  $\text{H}_2$ ,  $\lambda_0$  est spécialement grande et  $m$  spécialement petite. Ainsi la contribution de l'hydrogène à la valeur de  $\lambda$  prévaut sur les contributions des autres gaz de telle façon que pas même la contribution du  $\text{He}$  puisse essentiellement changer la valeur de  $\lambda$  en comparaison aux valeurs résultantes pour les mixtures contenant d'autres gaz nobles.

La formule pour  $\lambda$  donnée plus haut nous montre que la conductibilité thermique d'une mixture gazeuse peut être calculée des conductibilités des composantes d'accord à la règle de mélanges, seulement au cas que les rayons et les masses moléculaires ne soient pas très différents pour ces espèces de molécules qui donnent de contributions sensibles à la valeur de  $\lambda$ . Je le regrette de n'avoir pas à disposition du matériel empirique pour contrôler cette conclusion.

La formule de Nusselt fait usage de la conception d'une «température d'inflammation». Jost a montré dans son livre que cette conception doit être considérée comme une construction provisoire affectée de défauts essentiels. Toujours, cette conception permet (comme on sait) à l'aide de (104) prévoir l'existence de limites d'inflammation. En effet si la mixture n'a pas la composition stoechiométrique,  $T_r$  n'a pas sa valeur maximum; d'autre part, la température d'inflammation augmentera à partir de la composition stoechiométrique de la mixture (parceque alors la mixture sera plus difficile à enflammer); par conséquent, la différence  $T_r - T_z$  diminuera, et  $u_i^2$  avec elle. La limite d'inflammation sera atteinte au moment où  $u_i$  ait devenue si petite que la combustion ne ce déplace plus. Pour notre cas de réaction entre particules similaires, qui est représenté par la formule (102), il n'existe pas la con-

ception de composition stoechiométrique. Selon (77a),  $T_r$  augmente avec  $n_{11}$ , c'est à dire avec la concentration du combustible, au même tempsil diminue  $\tau_r$ , comme  $u_l$  augmente à la diminution de  $\tau_r$  (cf. (102)),  $u_l$  est une fonction monotone croissante de  $n_{11}$ . Une diminution de  $u_l$  aux deux cotés d'une composition optimale résultera de la théorie au moment que nous considérerons des réactions entre particules inégales; dans un travail prochain nous montrerons que, d'accord à l'expérience, la vélocité de combustion est une fonction croissante de la quantité du combustible, dans la région du surplus en air jusqu'au delà du point stoechiométrique; après avoir atteint un maximum dans la région du surplus en combustible, la vélocité de combustion commence et continue à diminuer à l'augmentation de la quantité du combustible. Nous n'aurons pas besoin de l'hypothèse d'une température d'inflammation pour cela; en effet, nous n'en avons pas aussi besoin dans le travail présent.

Il suit de (102) que  $u_l$  ne varie pas beaucoup à la variation de la température  $T_l$ ; en effet, (99) entraîne que  $\tau_r$  ne varie pas beaucoup à la variation de  $\tau_l$ , parcequ'au dénominateur de  $\tau_r$ , le second membre auprès de  $1/\tau_l$  est en général 4 ou 5 fois plus grande que  $1/\tau_l$ , cf. la table 1 donnée plus loin. Cette variabilité de  $u_l$  relativement insignifiante est d'accord à l'expérience (Jost, p. 112), mais elle est en contradiction à la formule de Nusselt, laquelle donnerait même  $u_l \rightarrow \infty$  pour  $T_l \rightarrow T_z$ . En réalité,  $u_l$  reste régulier partout, aussi en cas qu'on dépasse par beaucoup les «températures d'inflammation» assumées dans la littérature,  $u_l$  ne montre de dépendance significative de  $T_l$  qu'à des concentrations du combustible si petites (c'est à dire à de grandes valeurs de  $m^*$ ) que  $\tau_r$  devienne de l'ordre de grandeur de  $\tau_l$  (cf. la structure de la formule (99) pour  $\tau_r$ ). Dans cette région  $u_l$  décroît rapidement à la diminution de  $T_l$  (et, par conséquence, de  $T_r$ ), ainsi  $u_l$  devient aussitôt négligeable. Pris dans le sens mathématique, cette diminution ne cessera qu'au moment où l'expression  $\sqrt{1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}}$  du dénominateur de (102) ait de valeurs très petites; ça s'effectuerait dans la proximité la plus voisine du point  $\tau_l = \tau_r$ . Mais il est à tenir compte du fait que (102) est une formule approximative: l'équation plus compliquée (101) laquelle à cause de sa dérivation nous pouvons considérer comme plus authentique, n'a pas de zéro au dénominateur à droite. De plus, notre méthode d'approximation avait comme une de ses bases la supposition que  $\tau_l$  soit considérablement plus grand que  $\tau_r$ , supposition qui en effet se trouve réalisée dans toutes les flammes. Autrement dit: la limite  $\tau_r \rightarrow \tau_l$  n'a pas de signification physique ni est permise au sens

mathématique parce que les formules, selon leur dérivation, ne sont pas compétentes pour la limite mentionnée.

Maintenant nous montrerons que les mesures de la combustion de l'ozone, du point de vue quantitatif, sont représentées assez bien par la formule (102). À cause des raisons données dans le § 3, nous aurons à traiter  $E$  comme paramètre qui est à déterminer d'une seule valeur mesurée de  $u_l$ . Seulement l'ordre de grandeur de  $E$  nous est connue de la physique atomique, elle est  $\approx 1 \text{ eV} = 1,6 \cdot 10^{-12}$  ergs, par conséquent  $E/k \approx O(10^4)$ . Si le rayon moléculaire du  $O_3$  nous était connu, nous pourrions calculer  $A_1$ ; nous pourrions assumer qu'il soit plus grand que le rayon du  $O_2$ . La valeur de  $q'$  est connue:  $q' = 2,35 \cdot 10^{-12}$  ergs, et  $\lambda_0 = 1,5 \cdot 10^2$  CGS. Utilisant le rayon moléculaire du  $O_2$ :  $a \approx 1,5 \cdot 10^{-8}$  et la valeur  $E/k = 1,1 \cdot 10^4$ , on obtiendrait:  $A_1 \approx 6,4 \cdot 10^{10} \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right)^2$ . En vue de l'incertitude de la valeur de  $A_1$ , on préférera traiter  $A_1$  aussi comme paramètre.

Nous déterminons  $E/k$  et  $A_1$  de 2 valeurs empiriques de  $u_l$ . Des mesures de Lewis et v. Elbe nous avons:

$$\begin{aligned} u_l &= 158 \text{ pour } m^* = 3,054; & T_l &= 427^\circ K; & T_r &= 1343^\circ K; \\ u_l &= 747 \text{ pour } m^* = 1,016; & T_l &= 468^\circ K; & T_r &= 2044^\circ K. \end{aligned}$$

À l'aide de (102) nous trouvons

$$E/k = 0,947 \cdot 10^4 K; \quad A_1 = 1,52 \cdot 10^{11} \left(\frac{\text{cm}}{\text{sec}}\right)^2.$$

Ces deux nombres correspondent bien à l'expectation théorique pour  $E/k$  et  $A_1$ ; ils nous peuvent servir comme première indication que l'équation (102) sera capable de représenter la vélocité de propagation de la combustion de l'ozone. De plus, il est possible maintenant, calculer à l'aide de (102) toutes les valeurs de  $u_l$  correspondantes aux valeurs mesurées. Le résultat se présente dans la table 1. Les valeurs en parenthèse ne sont pas compétentes pour la comparaison entre théorie et expériences parcequ'elles ont été utilisées pour la détermination de  $E/k$  et  $A_1$ . Dans la dernière colonne, ils y sont données les 4 valeurs de la vélocité de combustion calculées par Lewis et v. Elbe.

Si nous utilisons le rayon moléculaire du  $O_2$  qui certainement est trop petit, nous obtenons comme valeur théorique de  $A_1$ , à l'aide de la valeur de  $E/k$  mentionnée plus haut:  $E/k = 9,47 \cdot 10^3$ , la suivante:

$$\bar{A}_1 = 4,9 \cdot 10^{10}. \text{ Ainsi, il résulterait du quotient } \sqrt{\frac{\bar{A}_1}{A_1}} = \sqrt{\frac{15,2}{4,9}} = 1,76$$



une valeur du rayon moléculaire de  $O_3$  1,76 fois plus grande que celle du rayon de  $O_2$ ; c'est une valeur un peu grande, mais la concordance en ordre de grandeur est très satisfaisante. L'énergie d'activation mesurée de la réaction  $2O_3 \rightarrow 3O_2$  est de  $24 \pm 1$  Cal par mole; à l'aide de (102) nous obtenons 19,0 Cal, ce qu'est autre fois une concordance

TABLE 1

$m^*$	$T_i$ °K	$T_r$ °K	$u_i$ obser- vées cm/sec	$u_i$ calculées, à q. (102) cm/sec	$\tau_i$	$\tau_r$	erreur = $u_i$ (calc.) - $u_i$ (obs.) en % de $u_i$ (obs.)	$u_i$ calculées, Lewis cm/sec	erreur, Lewis en %
3,054	300	1239	55,0	71,7	31,6	7,65	30	253	360
	327	1259	74,3	85,3	29,0	7,54	15		
	361	1289	100,0	108	26,2	7,35	8		
	401	1322	134,2	136	23,8	7,16	1		
	427	1343	158,0	(158)	22,2	7,05	(0)		
1,497	451	1362	178,0	191	20,1	6,95	7	451	185
	301	1680	141	238	31,5	5,65	69		
	307	1685	187	249	30,9	5,63	33		
	333	1704	224	284	28,5	5,56	27		
	376	1738	282	361	25,2	5,45	24		
1,016	408	1763	352	405	23,2	5,38	15	333	108
	441	1790	435	467	21,5	5,30	7		
	477	1818	563	539	19,9	5,21	- 4		
	302	1922	160	369	31,4	4,95	130		
	312	1928	287	394	30,4	4,91	37		
	350	1958	379	465	27,1	4,85	23		
	376	1976	495	520	25,2	4,80	5		
	411	2003	615	609	23,0	4,73	- 1		
	453	2035	733	710	20,9	4,66	- 3		
	468	2044	747	(747)	20,3	4,63	(0)		
	486	2063	780	806	19,5	4,59	+ 3		

assez bonne, il est à tenir en compte que notre valeur doit être quelque chose plus petite de 24 Cal. Mais, en vue des approximations faites dans nos suppositions et dans notre calcul, on ne donnera pas trop d'importance à l'aspect quantitatif du problème. Plutôt, il est essentiel que l'éq. (102) satisfasse à toutes les demandes de caractère qualitatif, et en quelque sorte aux demandes quantitatives aussi, et qu'on trouve des valeurs raisonnables de  $E/k$  et de  $A_1$ .

D'accord à (102), la vitesse  $u_i$  de combustion ne dépend pas de la

pression ; en effet, il suit de (49), (70), (71) que  $\frac{m^*+1}{m^*+\mu} = \frac{M_2}{M_1}$ , c'est à dire  $\frac{m^*+1}{m^*+\mu}$  n'est pas variable avec la pression  $p_l$ . La table 1 ne donne pas les valeurs de  $p_l$ ; Lewis et v. Elbe on mesuré les valeurs suivantes (en mm Hg) :

TABLE 2

$m^*$	$T_l$	$T_r$	$p_l$
3,054	300	1239	624
3,054	427	1343	2560
1,016	302	1922	495
1,016	468	2044	3760

On voit que  $p_l$  varie beaucoup ; en tant qu'on peut considérer l'éq. (102) comme confirmée par l'expérience (cf. table 1), on pourra dire que la vélocité de combustion soit indépendante de la pression.

À l'aide de (71), (49) on tire de (77 a) :

$$(105) \quad T_r - T_l = \frac{q' n_{l1}}{\rho_l \bar{c}_{pr}} = \frac{q' L p_{l1}}{M_1 \bar{c}_{pr} p_l} = \frac{Q'}{M_1 \bar{c}_{pr} (m^* + 1)} = \frac{Q'}{(M_2 m^* + M_1) \bar{c}_{pr}}$$

Dans nos calculations, nous avons traité  $\bar{c}_{pr}$  comme constante : il est à remarquer que c'en n'est pas exactement le cas comme le montrent les

TABLE 3

$m^*$	$T_l$	$T_r - T_l$	$\frac{32 \bar{c}_{pr}}{R}$
3,054	300	939	3,98
	401	921	4,05
	451	911	4,09
1,497	301	1379	4,12
	408	1355	4,19
	477	1341	4,23
1,016	302	1620	4,18
	411	1592	4,25
	486	1577	4,29

éqs. (66), (67). Mais nous pouvons contrôler cette approximation à l'aide de la table 1. D'accord à (105),  $T_r - T_l$  doit être constante, si  $\bar{c}_{pr}$  en réalité est une constante. La table 3 démontre que c'est assez bien le cas.

La diminution faible de  $T_r - T_l$  à l'augmentation de  $T_l$  sous condition de la constance de  $m^*$ , est un reflet de l'augmentation de  $\bar{c}_{pr}$ . Pour  $32 \bar{c}_{pr}/R$  on trouve les valeurs de la 4<sup>me</sup> colonne; la théorie cinétique des gaz donnerait pour 5 degrés de liberté la valeur 3,5. Notre valeur plus élevée, de 4 environ, est causée par l'excitation de quelques degrés de plus à cause des températures élevées.

On peut déterminer la vitesse de combustion aussi par intégration graphique de l'équation différentielle. Il est démontré en § 8 qu'on a à chercher la courbe intégrale qui part du point  $Q(v_l, y_l)$  et atteint le point  $P(v=0, y=0)$ . La courbe intégrale partant de  $Q$  passera au-dessus de  $P$  pour tourner à gauche ou à droite, selon la valeur de  $u_l$ . Pour une valeur seule bien définie de  $u_l$  la courbe débouchera en  $P$ .

Les calculations du travail présent, étaient faites d'origine avec une formule pour le nombre  $Z$  de collisions selon laquelle l'énergie relative puisse être transmise entière, pas seulement la partie  $E_{||}$  relative au mouvement dans la ligne joignant les deux centres des molécules. Les formules correspondantes à ce cas antérieur diffèrent des formules du travail présent par un facteur additionnel  $\sqrt{\tau+1}$  en  $u_l$ ; en outre, on avait utilisé le point  $y=1$  pour la dérivation de la formule de  $u_l$ , en lieu de  $y=\tau/3$  cf. (96). On avait trouvé pour ce cas par intégration graphique que les valeurs de  $u_l$  calculées par la méthode d'approximation analytique étaient pratiquement identiques aux valeurs trouvées par voie graphique; la différence était 2% au maximum. On avait traité  $E/k$  et  $A_1$  comme paramètres. Ainsi nous pourrions affirmer qu'aussi dans notre cas la méthode graphique donnera des valeurs pratiquement identiques aux valeurs trouvées par la méthode analytique d'approximation. Au même temps, nos formules d'approximation seront autre fois prouvées.

## 11. LA TEMPERATURE DANS LA FLAMME.

Il suit de (92), (78 a) et de la relation:  $p_{l1} = n_{l1} k T_l$  que :

$$(106) \quad T_x = \frac{u_l q' p_{l1} \tau_l}{(m^* + 1) E \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}\right) \lambda_0 \sqrt{E/k}} \cdot \frac{v-y}{\sqrt{\tau}}$$

La fonction à droite est connue comme fonction de  $y$ , c'est à dire de  $T$ , aussitôt qu'on ait déterminé  $v(y)$  par les méthodes graphique ou analytique, d'approximation décrites dans les §§ 9, 10.

Nous utilisons l'expression approximative (95) de  $v$ . Tenu compte de  $y_l = \tau_l - \tau_r$ , il suit :

$$(107) \quad v_c - y = \frac{\tau_r}{\tau_l} [(y(1-y_l) - y_l)e^{-y} + y_l - y].$$

À cause de  $T = \frac{E}{k\tau}$  et de  $\tau = \tau_r + y$ , on a :

$$(108) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{-k^{3/2} u_l q' p_l \tau_r}{E^{5/2} (m^* + 1) \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}\right) \lambda_0} \cdot [(y(1-y_l) - y_l)e^{-y} + y_l - y](\tau_r + y)^{3/2}.$$

D'accord à (108), l'augmentation de la température est déterminée essentiellement par  $e^{-y} = \exp\left(-\frac{E}{kT}\right) \cdot \text{const}^e$ , parceque c'est cette expression qui cause à peu près complètement la variation de  $dy/dx$ . Nous assumons  $x=0$  pour  $T = T_1 \equiv \frac{T_l + T_r}{2}$ , c'est à dire pour

$$(109) \quad y_l \equiv \frac{\tau_r(\tau_l - \tau_r)}{\tau_l + \tau_r}; \quad \tau_1 \equiv \tau_r + y_l = \frac{2\tau_r\tau_l}{\tau_l + \tau_r}.$$

Cela donne comme équation qui détermine la température dans la flamme :

$$(110) \quad \int_{y_l}^y \frac{dy}{(\tau_r + y)^{3/2} [(-y(1-y_l) + y_l)e^{-y} - y_l + y]} = \frac{k^{3/2} u_l q' p_l \tau_r}{E^{5/2} (m^* + 1) \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}\right) \lambda_0} \cdot x.$$

Nous évaluons l'intégrale de manière approximative en posant :

$$(110 a) \quad \frac{1}{\square} \approx \frac{1}{y - y_l} + \frac{2}{y^2(2 - y_l)};$$

ainsi nous avons décrit l'expression  $\frac{1}{\square}$  avec exactitude pour les deux régions  $y \gg 1$  et  $y \ll 1$ . Dans tout le domaine des valeurs de  $y$  et  $y_l$ , la différence entre l'approximation (110 a) et la valeur exacte de  $\frac{1}{\square}$  ne

surpasse pas 25 % de la valeur exacte. Nous écrivons :

$$(111) \quad K = \frac{k^{3/2} u_l q' p_l \tau_r}{E^{5/2} (m^* + 1) \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}\right) \lambda_0}$$

et nous obtenons :

$$(112) \quad \frac{2}{\tau_l} \left( \frac{1}{\sqrt{\tau}} - \frac{1}{\sqrt{\tau_1}} \right) - \frac{1}{\tau_l^{3/2}} \ln \left( \frac{\sqrt{\tau_l} + \sqrt{\tau}}{\sqrt{\tau_l} + \sqrt{\tau_1}} \cdot \frac{\sqrt{\tau_l} - \sqrt{\tau_1}}{\sqrt{\tau_l} - \sqrt{\tau}} \right) + \frac{2}{y_l - 2} \cdot \left[ \frac{1}{\tau_r^2} \left( \frac{3y + \tau_r}{y\sqrt{\tau}} - \frac{3y_1 + \tau_r}{y_1\sqrt{\tau_1}} \right) - \frac{3}{2\tau_r^{5/2}} \ln \left( \frac{\sqrt{\tau} + \sqrt{\tau_r}}{\sqrt{\tau_1} + \sqrt{\tau_r}} \cdot \frac{\sqrt{\tau_1} - \sqrt{\tau_r}}{\sqrt{\tau} - \sqrt{\tau_r}} \right) \right] = K \cdot x;$$

ici  $y = \tau - \tau_r$ ;  $\tau = E/kT$ . Dans (112), nous avons  $x$  en fonction de  $T$ , c'est à dire : nous connaissons *la température dans la flamme*

Pour une estimation de *l'épaisseur de la flamme*, nous introduisons :

$$(113) \quad T_a = T_r - T_l = T_r \left(1 - \frac{T_l}{T_r}\right); \quad T_b = T_l \left(1 + \frac{T_l}{T_r}\right);$$

nous pouvons considérer la distance entre les coordonnées correspondantes  $x_a, x_b$  comme mesure approximée de l'épaisseur de la flamme. Utilisant l'abréviation

$$(114 a) \quad \delta = T_l/T_r = \tau_r \tau_l.$$

nous avons :

$$(114 b) \quad \tau_a = \frac{\tau_r}{1 - \delta}; \quad \tau_b = \frac{\tau_l}{1 + \delta}.$$

Par une calcul simple, on trouve

$$(115) \quad x_a - x_b = \frac{1}{K \tau_l^{5/2}} \left[ 2\tau_l \left( \sqrt{\frac{1 - \delta}{\delta}} - \sqrt{1 + \delta} \right) - \tau_l \ln \left( \frac{1 + \sqrt{\frac{\delta}{1 - \delta}}}{1 + \sqrt{\frac{1}{1 + \delta}}} \cdot \frac{1 - \sqrt{\frac{1}{1 + \delta}}}{1 - \sqrt{\frac{\delta}{1 - \delta}}} \right) + \frac{2}{\tau_l \delta^{5/2} \left(1 - \delta - \frac{2}{\tau_l}\right)} \cdot \left( \frac{1 + 2\delta}{\delta \sqrt{\frac{1}{1 - \delta}}} - \frac{3 - 2\delta(1 + \delta)}{(1 - \delta(1 + \delta)) \sqrt{\frac{1}{\delta(1 + \delta)}}} \right) \right]$$

$$-\frac{3}{\tau_l \delta^{5/2} \left(1 - \delta - \frac{2}{\tau_l}\right)} \ln \left( \frac{\sqrt{\frac{1}{1-\delta}} + 1}{\sqrt{\frac{1}{1+\delta}} + \sqrt{\delta}} \cdot \frac{\sqrt{\frac{1}{1+\delta}} - \sqrt{\delta}}{\sqrt{\frac{1}{1-\delta}} - 1} \right) \Bigg].$$

Nous obtenons de (111), (115) pour la combustion caractérisée par les nombres:  $m^* = 1,016$ ;  $T_l = 302$ ;  $T_r = 1922$ ;  $p_l = 495$  mm Hg;  $u_l$  (calc.) = 369, comme valeur de  $K$  à peu près 9,0 et comme valeur de l'épaisseur de la flamme:  $x_a - x_b \approx 3,7 \cdot 10^{-3}$  cm. Pour calculer l'ordre de grandeur, il suffit la formule:

$$(115 a) \quad x_a - x_b \approx \frac{2}{K \tau_l^{3/2}} \left[ \frac{1}{\sqrt{\delta}} - 1 + \ln \sqrt{\frac{4}{\delta}} \right]; \quad \delta = \frac{T_l}{T_r}.$$

Cette formule donne  $3,9 \cdot 10^{-3}$  cm en lieu de  $3,7 \cdot 10^{-3}$  cm pour l'exemple mentionné de combustion.

En employant (115) ou (115 a), on tiendra compte du fait que les températures  $T_a$ ,  $T_b$  diffèrent par 20% environ de  $T_r$ ,  $T_l$ , selon notre définition. Si nous posons:

$$\delta' = \frac{\delta}{10}$$

en lieu de  $\delta$ , la température  $T_a$  résulte inférieure à  $T_r$  par 2% environ, la température  $T_b$  supérieure à  $T_l$  par 2% environ. Les éqs. (115), (115 a) sont valables pour  $\delta'$  aussi. Avec cette définition, l'épaisseur de la flamme résulte dans notre exemple, à l'aide de (115 a), comme:  $x'_a - x'_b = 1,2 \cdot 10^{-2}$  cm. (nous utilisons la désignation  $x'_a - x'_b$  pour accentuer la différence en définition).

À cause du facteur  $1/K$ , l'épaisseur de la flamme est inversement proportionnelle à la pression  $p_l$  de la partie pas encore enflammée de la mixture (cf. (111)). Cette conclusion est basée essentiellement sur l'indépendance de  $u_l$  de la pression (cf. (102)), c'est à dire sur la supposition  $Z \sim n_1^2$  qui était une conséquence de notre supposition d'une réaction entre particules similaires. Si le nombre  $Z$  de collisions montre une dépendance de la pression différente de l'antécédante, la vitesse de combustion sera fonction de la pression (cf. (103f, h)), et l'épaisseur de la flamme sera une fonction de la pression différente de  $1/p_l$  (cf. (111), (115 a)).

De même comme pour la vitesse de combustion, on peut montrer pour l'épaisseur de la flamme que nos équations sont d'une validité générale quant à leur forme dimensionnelle si nous ne fixons pas la

formule donnant  $Z$ . Le traitement sommaire de la diffusion qui était essentielle pour l'exécution de notre calcul et pour la détermination du facteur sans dimensions en (115), (115 a), n'influe pas sur la forme dimensionnelle des équations (115), (115 a), ni sur la dépendance qualitative des grandeurs physiques. En effet, ils suivent de (103 l, m), (77 a), (71) les relations dimensionnelles :

$$(116 a) \quad \Delta x \sim \frac{D}{u_l} \sim \frac{\lambda}{u_l \rho_l \bar{c}_{pr}} = \frac{\lambda E \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}\right)}{u_l q' n_{l1} k \tau_r} = \frac{\lambda_0 E^{5/2} \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}\right) (m^* + 1)}{k^{3/2} u_l q' p_l \tau_r \tau_l \sqrt{\tau}}.$$

D'autre part, on a selon (111) :

$$(116 b) \quad \frac{1}{K \tau_l^{3/2}} = \frac{\lambda_0 E^{5/2} \left(1 - \frac{\tau_r}{\tau_l}\right) (m^* + 1)}{k^{3/2} u_l q' p_l \tau_r \tau_l^{3/2}},$$

ce qu'est identique à (116 a), à l'exception du fait qu'on ait en (116 a) le facteur sans dimensions  $\frac{1}{\sqrt{\tau}}$  qui ne peut pas être déterminé plus exactement par considérations dimensionnelles, pendant qu'en (116 b) on a  $\frac{1}{\sqrt{\tau_l}}$ . Par conséquent notre formule (115 a) pour l'épaisseur de la flamme peut être considérée comme hors de question quant à leur dépendance dimensionnelle des grandeurs physiques. La diffusion ne changerait pas cette dépendance,  $u_l$  étant donné par (103 d, f). Suppositions de caractère spécial n'influent que sur le nombre  $Z$  de réactions qui apparaît sous la forme de  $\sqrt{Z}$ , dans  $u_l$ . D'autre côté, pour le résultat quantitatif, la forme de la parenthèse de (115 a) est d'importance; dans notre exemple, la parenthèse a la valeur de 10 environ, si nous calculons  $x'_a - x'_b$ .

La température de la flamme peut être déterminée aussi par l'application de la méthode graphique à l'équation (106); le côté droit de (106) est une fonction connue de  $T$ . Ainsi on a  $\frac{dT}{dx} = f(T)$ , de manière qu'on peut trouver la valeur  $dx = dT/f(T)$  correspondante à un  $dT$  quelconque. Cela permet la détermination graphique de la courbe  $T = T(x)$ . Pour chacun ensemble de valeurs de  $T_r, T_l, m^*, p_l$  on a une courbe. Mais du point de vue qualitatif, toutes les courbes se ressemblent: inclination presque insensible dans la partie pas encore « consommée », inclination très grande dans la zone de combustion, transition à des températures constantes  $T_r$  dans la partie « consommée ».

L'épaisseur de la flamme décroît à l'augmentation de la vitesse de combustion, de  $T_i$  et de  $T_r$ .

À la méthode du travail présent, on peut traiter toutes les combustions qui sont causées essentiellement par la collision de 2 espèces de molécules. Dans la plupart du travail présent, on a supposé qu'il se traite de collisions entre 2 espèces *égales* de molécules. Les équations se compliquent un peu si l'on suppose de collisions entre 2 espèces *inéga*les de molécules. Dans un travail prochain, on traitera ce cas pour l'appliquer à la combustion d'hydrocarbures. Nous montrerons qu'il est possible constituer une formule analytique pour la vitesse de propagation de la combustion même dans ce cas un peu plus compliqué.

*Mayence, Institut de Physique de l'Université.*







# PORTUGALIAE MATHEMATICA

REVISTA DE COLABORAÇÃO INTERNACIONAL

Preço dos volumes já publicados

Volume 1 — 500\$00; Volumes 2 a 7 — 250\$00 cada

Para os sócios da Sociedade Portuguesa de Matemática

Volume 1 — 400\$00; cada um dos volumes seguintes: 150\$00

Assinatura do volume 8: 150\$00, e para os sócios da S. P. M. 50\$00

Pedidos a Gazeta de Matemática, Lda. — R. Almirante Barroso, 20, r/c — LISBOA-N.

# GAZETA DE FÍSICA

REVISTA DOS ESTUDANTES DE FÍSICA E DOS  
FÍSICOS E TÉCNICOS FÍSICOS PORTUGUESES

**DEFENDE OS INTERESSES PROFISSIONAIS DOS FÍSICOS**

*Publica artigos científicos, de divulgação  
e vulgarização dedicados a estudantes, professores  
e técnicos, e problemas saídos nos exames*

Número avulso ..... Esc. 12\$50

Assinatura por um ano (4 números) Esc. 40\$00

Pedidos para:

Laboratório de Física da F. C. L. — R. da Escola Politécnica — LISBOA

# PORTUGALIAE PHYSICA

REVISTA DE COLABORAÇÃO INTERNACIONAL

●  
REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO

LABORATÓRIO DE FÍSICA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA

●  
Publicados: Volume 1 (4 fascículos) e Volume 2 (4 fascículos)

Assinatura do Volume 1 — 150\$00

Assinatura de cada um dos volumes seguintes — 80\$00

PORTUGALIAE PHYSICA se propose de servir simultanément deux buts — le développement des études physiques au Portugal et la collaboration internationale dans ce domaine.

PORTUGALIAE PHYSICA est la seule revue portugaise consacré exclusivement aux sciences physiques.

Les travaux à publier devront être écrits à la machine (les symboles à la main). Tout auteur d'un mémoire ne dépassant pas 50 pages aura droit à 100 tirages-à-part gratuits.

Toute la correspondance concernant la Rédaction de PORTUGALIAE PHYSICA doit être adressée à

## P O R T U G A L I A E   P H Y S I C A

Laboratório de Física — Faculdade de Ciências

Rua da Escola Politécnica — Lisboa — Portugal

Les Universités, les Laboratoires de Physique, les Académies, les Sociétés Savantes et les Revues de Physique sont invités à recevoir cette revue en échange de leurs publications.

PORTUGALIAE PHYSICA donnera un compte-rendu détaillé de tous les ouvrages soumis à la Redaction en deux exemplaires

Preço do volume I. . . . . Esc. 150\$00

Preço de cada um dos  
volumes seguintes. . . . . Esc. 80\$00

Preço deste fascículo. . . . . Esc. 30\$00

# PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME 3

FASCÍCULO 2 (Págs. 91-126)

1 9 5 1

FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA  
PORTUGAL

# PORTUGALIAE PHYSICA

(Fundador: Prof. A. Cyrillo Soares)

VOLUME 3

1951

FASCÍCULO 2

---

*Comissão de redacção:* M. Telles Antunes, A. Marques da Silva e M. Valadares  
*Editor:* Amaro Monteiro (Director do Laboratório de Física da Faculdade de Ciências de Lisboa)

---

## ÍNDICE

(Table des matières)

Laura Levi — A propos d'une critique a la loi de l'induction . . . . .	91-94
Lidia Salgueiro et Maria Helena Blanc de Sousa — Influence de la tension d'excitation sur les satellites des raies de l'or, du plomb et du bismuth. . . . .	95-100
Glaphyra Vieira — Figures de distribution du dépôt actif sur des plaques métalliques . . . . .	101-116
Lidia Salgueiro et J. Gomes Ferreira — Étude de la forme et de l'intensité de la bande satellite qui accompagne la raie $L\beta_2$ de l'or . . . . .	117-126

Nomes e direcções dos autores deste fascículo

(Noms et adresses des auteurs de ce fascicule)

Laura Levi — La Plata — Argentina.

Lidia Salgueiro — Faculdade de Ciências de Lisboa — Portugal.

Maria Helena Blanc de Sousa — Faculdade de Ciências de Lisboa — Portugal.

Glaphyra Vieira — Faculdade de Ciências de Lisboa — Portugal.

J. Gomes Ferreira — Faculdade de Ciências de Lisboa — Portugal.





*Ernest C. Gillis*



## Prof. Doutor Armando Cyrillo Soares

(1883-1950)

*Nasceu, em Vila Nogueira de Azeitão, a 28 de Janeiro de 1883.*

*Em 1906, iniciou a sua vida oficial no magistério como Professor do Liceu Central da 3.<sup>a</sup> Zona de Lisboa.*

*Em Outubro de 1912, começou a sua actividade docente na Faculdade de Ciências da Universidade de Lisboa na qualidade de Assistente de Física e Química, ascendendo a Professor Catedrático de Física em 12 de Outubro de 1923.*

*Em Janeiro de 1930, foi nomeado Director do Laboratório de Física da mesma Faculdade de Ciências e então se inicia a sua grande obra como orientador do grupo de discipulos que mais tarde constituiria o Centro de Estudos de Física, que só foi reconhecido oficialmente em 1940; a partir desta data, foi nomeado seu Director e como tal se manteve até que, em 24 de Setembro de 1947, pediu a sua exoneração.*

*Por eleição, ocupou os cargos de: Vice-Reitor da Universidade de Lisboa, Director do Observatório Central Meteorológico, Presidente da Sociedade Portuguesa de Química e Física, Vogal do Conselho Superior de Instrução Pública, e foi sócio correspondente da Academia das Ciências de Lisboa.*

*Como Director do Centro de Estudos de Física, verificou a necessidade do aparecimento duma revista científica portuguesa, o que o levou a promover a fundação de «Portugaliae Physica».*

*A obra deixada pelo Prof. Doutor Cyrillo Soares é unanimemente considerada por quantos dela têm conhecimento como de grande mérito, mas todos aqueles que tiveram o privilégio de com ele privar sabem que essa obra é dum valor moral e humano inexcédível.*

*Por tudo o que nos legou, não poderia a «Portugaliae Physica», no primeiro número publicado após a sua perda, deixar de prestar, à memória daquele que foi seu fundador, a respeitosa homenagem que lhe é devida.*



## A PROPOS D'UNE CRITIQUE À LA LOI DE L'INDUCTION

par LAURA LEVI (LA PLATA-ARGENTINA)

(Março, 1951)

Dans un article récemment publié dans cette revue L. DE BROGLIE<sup>(1)</sup> rappelle une expérience de A. BLONDEL<sup>(2)</sup> qui montre qu'en faisant sortir graduellement une bobine d'un champ magnétique, sans couper des lignes de force, on n'obtient pas de courant induit. D'après ce résultat L. DE BROGLIE conclut que la forme généralement adoptée pour énoncer la loi d'induction « quand, par une cause quelconque le flux d'induction magnétique qui traverse un circuit vient à varier il se produit dans ce circuit une force électro-motrice » est trop générale. Quand il s'agit d'une variation de flux par déplacement ou déformation du circuit dans un champ invariable on devrait ajouter la condition que le circuit coupe les lignes de force du champ.

Nous croyons utile de présenter quelques éclaircissements sur ce phénomène et son interprétation.

L'interprétation du phénomène de l'induction électromagnétique comme variation du flux magnétique qui traverse un certain circuit qui se déplace ou se déforme dans un champ magnétique constant dans le temps, est étroitement liée à la condition géométrique que le circuit soit représentable par une ligne fermée, dont l'image matérielle la plus simple est celle d'un anneau, en fil de fer.

Dans ces conditions cette variation est mathématiquement équivalente à l'évaluation des lignes d'induction coupées, en tenant compte de leur signe, par rapport au mouvement du circuit.

Il ne s'agit pas d'un phénomène physique mais tout simplement d'une transformation vectorielle qui, appliquée à la deuxième équation de MAXWELL tient son expression dans l'équation

$$\int_s \vec{E} \cdot \vec{ds} = - \frac{d}{dt} \int_\sigma B_n d\sigma = \int_s \vec{B} \times \vec{u} \cdot \vec{ds} \quad (1)$$

(1) L. DE BROGLIE — *Port. Physica*, vol. 3, p. 15 (1949).

(2) A. BLONDEL — *Comptes Rendus*, Ac. Sc. t. 159, p. 676 (1914).

où le deuxième membre exprime la variation par unité de temps du flux du vecteur  $B$  (induction) à travers la surface  $\sigma$  limitée par le contour  $s$  (circuit), dont les éléments se déplacent avec la vitesse  $\vec{u}$ , en coupant les lignes d'induction d'après ce que montre le troisième membre de cette même équation.

L'application de cette règle exige cependant un peu d'attention quand le circuit se ferme, par des contacts mobiles, sur des corps à deux ou trois dimensions (expérience unipolaire, roue de BARLOW, etc.). Dans ces conditions on doit se rappeler qu'étant la vitesse  $\vec{u}$  considérée en (1) une vitesse matérielle des éléments qui forment le circuit, les parties indéterminées de celui-ci dans les corps pluridimensionaux, qui au début se peuvent tracer d'une forme arbitraire, doivent se maintenir fixes par rapport à ces mêmes corps afin que (1) soit exacte.

Le contour  $s$  se complète alors par les lignes parcourues par les contacts mobiles et la surface limitée par celui-ci peut se comparer à une membrane élastique, fixée dans le contour référé qui s'allonge infiniment, pendant le mouvement. Comme exemple classique de tels circuits nous avons déjà analysé<sup>(1)</sup> l'expérience de l'induction unipolaire montrant dès lors comme un raisonnement semblable nous permettra d'interpréter l'expérience de BLONDEL.

Maintenant nous allons nous occuper de cette dernière expérience.

Le dispositif utilisé par BLONDEL se compose essentiellement, d'un tambour en bois sur lequel on roule les spires d'un fil conducteur. Le tambour, qui est mobile au tour de son axe, est placé dans un champ magnétique uniforme créé par un électro-aimant de telle façon que l'axe du tambour soit parallèle aux lignes de force du champ. Hors du champ magnétique et parallèlement au premier tambour on place un autre sur lequel on fixe une extrémité du fil conducteur et qui est mis en rotation par un moteur.

Quand le système est en marche les spires de la bobine se déroulent du premier tambour et se roulent sur le second. Le circuit se ferme par un galvanomètre, lié par des contacts mobiles aux extrémités du conducteur sur les deux tambours.

Avec ce dispositif, BLONDEL, n'a obtenu aucun courant induit, quand le contact mobile qui est placé dans le champ est formé par un disque conducteur, de même axe et de même rayon que le cylindre,

(1) En publication, en *Matematicae Notae* (Instituto de Matemática—Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas aplicadas a la Industria—Rosario (Argentina)—Año X.

et lié au galvanomètre à son centre et à la bobine par un collecteur qui frotte sur sa périphérie.

D'après la théorie et selon le principe qui fait dépendre la force électro-motrice du nombre de lignes d'induction coupées par unité de temps, il est évident en effet, que dans ce cas il ne peut pas avoir de force électro-motrice d'induction, parce que, la vitesse  $\vec{u}$  de chaque élément  $ds$  du circuit est parallèle à l'élément lui-même et l'intégral dans le troisième membre de (1) s'annule; si on raisonne sur la variation du fluxe on conclut qu'il diminue parce que les spires disparaissent à la droite du premier tambour.

Cependant, cette variation n'est pas la seule, au contraire de ce qui pensent BLONDEL et DE BROGLIE, parce que, ayant choisi un rayon du disque où on suppose que le courant passe premièrement et d'après ce que l'on a dit, il doit se conserver invariable pendant toute l'expérience et la surface  $\sigma$ , qui a une extrémité liée aux points de ce rayon, s'agrandit sur le disque, augmentant ainsi le fluxe à gauche en même proportion qu'il diminue à droite.

On voit ainsi, que la loi qui attribue la production d'une force électro-motrice induite à une variation de fluxe magnétique, est absolument générale.



## INFLUENCE DE LA TENSION D'EXCITATION SUR LES SATELLITES DES RAIES DE L'OR, DU PLOMB ET DU BISMUTH

par LÍDIA SALGUEIRO et MARIA HELENA BLANC DE SOUSA

*Laboratoire de Physique-Faculté de Sciences de Lisbonne*

(Reçu le 1<sup>er</sup> Juillet 1951)

COSTER et KRONIG [1] ont établi une théorie sur l'origine des raies satellites et, après leurs travaux, quelques auteurs ont essayé de faire une vérification expérimentale de cette théorie.

COSTER et KRONIG attribuaient l'origine des raies satellites des spectres L, à la double ionisation des atomes, comme conséquence des transitions  $L_{III} \rightarrow L_I$  et  $L_{II} \rightarrow L_I$ ; la probabilité de ces transitions était notablement augmentée par l'existence de l'effet Auger.

Dans ces conditions, on a étudié [2] l'influence de la tension appliquée dans un tube à rayons X, sur les raies satellites du spectre L; si la théorie est acceptable, les raies satellites doivent disparaître à une tension inférieure à la tension d'excitation de  $L_I$ .

Les travaux déjà publiés [3] sont en parfait accord avec la théorie de COSTER et KRONIG, en ce qui concerne les satellites de  $L_{\alpha_1}$ .

C'est encore à partir de cette théorie, que RICHTMYER et RAMBERG [4] ont prévu théoriquement la forme et l'intensité des bandes satellites des raies du spectre  $L_{III}$ . Ils ont obtenu un bon accord pour les satellites de la raie  $L_{\alpha_1}$ ; cependant, en ce qui concerne la bande satellite de  $L_{\beta_2}$  il y a une notable divergence entre le calcul et l'expérience.

Cette divergence nous a fait étudier l'effet de la tension d'excitation sur les satellites de la raie  $L_{\beta_2}$ .

Nous avons employé un tube à rayons X, démontable, muni d'une anticathode soit d'or ( $Z=79$ ), soit de plomb ( $Z=82$ ) ou de bismuth ( $Z=83$ ). Ces trois éléments ont un nombre atomique qui dépasse la discontinuité prévue par COSTER et KRONIG ( $Z=73$ ).

L'installation employée a été déjà décrite [5]. Nous avons fait la mesure de la tension avec un voltmètre électrostatique.

On a obtenu les spectres avec un spectrographe à cristal courbe, type CAUCHOIS [6], et dans les conditions suivantes :

intensité du courant : 1,0 mA

tensions d'excitation :

a) Or : 13,0 kV et 24,0 kV

b) plomb : 14,0 kV et 24,0 kV

c) bismuth : 14,5 kV et 24,0 kV.

Il faut remarquer que les tensions d'excitation  $L$  pour les éléments cités sont, respectivement :

or :  $V_{LI} = 14,4$  kV ;  $V_{LII} = 13,7$  kV ;  $V_{LIII} = 11,9$  kV

plomb :  $V_{LI} = 15,9$  kV ;  $V_{LII} = 15,2$  kV ;  $V_{LIII} = 13,1$  kV

bismuth :  $V_{LI} = 16,2$  kV ;  $V_{LII} = 15,7$  kV ;  $V_{LIII} = 13,4$  kV .

Nous avons fait des expositions entre 10 heures et 90 heures. L'enregistrement a été fait sur film Ilfex ; des essais faits sur plusieurs films ont montré que le film Ilfex était le plus sensible.

La raie  $L\beta_2$  de l'or aussi bien que du plomb sous une tension de 24,0 kV, est accompagnée d'une bande satellite. En effet, les microphotogrammes des clichés de la raie  $L\beta_2$ , montrent une raie, nettement assymétrique. Cette assymétrie disparaît dans les microphotogrammes des spectres excités sous une tension entre  $V_{LI}$  et  $V_{LIII}$ , ce qui indique l'absence des satellites.

Quand on emploie le bismuth, et sous une tension de 24,0 kV l'observation de la bande satellite est difficile, du fait que la raie satellite  $L\beta_2^1$  a la même longueur d'onde que la raie  $L\beta_1$ .

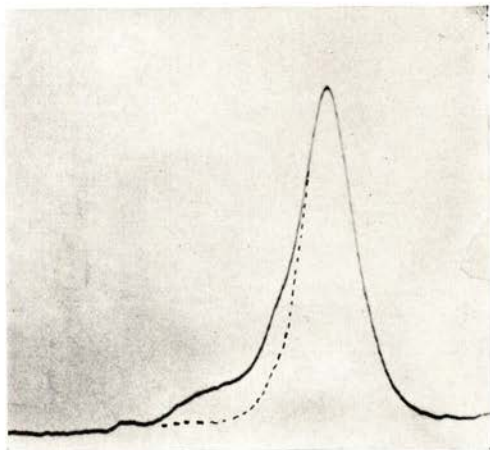
Cependant, pour une tension entre  $V_{LI}$  et  $V_{LIII}$ , la raie  $L\beta_2$  est parfaitement symétrique comme pour le plomb et l'or, et la raie  $L\beta_1$  n'apparaît pas sur les clichés. Ce fait nous a permis de contrôler la mesure de la tension.

D'après ces résultats nous avons conclu que l'origine de la bande satellite de la raie  $L\beta_2$  est essentiellement la double ionisation des atomes, en parfait accord avec la théorie de COSTER et KRONIG.

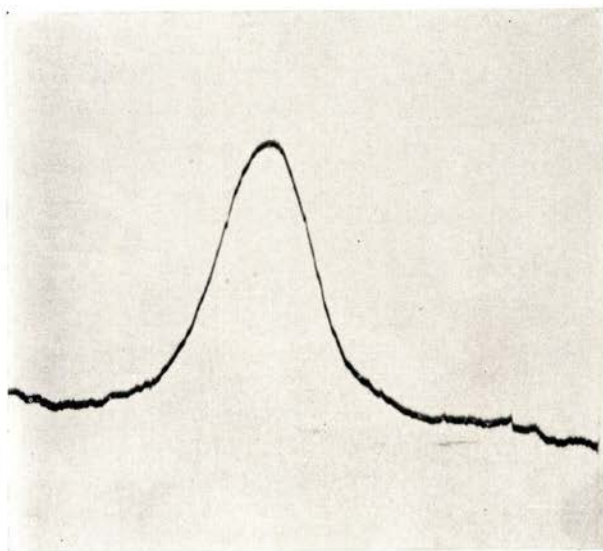
Nous pensons déterminer avec précision la forme et l'intensité de la bande satellite qui accompagne la raie  $L\beta_2$ . Comme il n'y a pas d'accord entre les prévisions théoriques et les données expérimentales, ces déterminations peuvent avoir beaucoup d'intérêt.

Les microphotogrammes, dont nous reproduisons seulement ceux de l'or, ont été obtenus avec un microphotomètre Bouty de la «Junta das missões geográficas e de investigações coloniais» par notre collègue Mr. J. GOMES FERREIRA, à qui nous adressons nos remerciements.





*Microphotogramme de l'or sous la tension de 21,0 kV. La ligne pointillée montre la configuration de la courbe dans l'absence de raies satellites*



*Microphotogramme de l'or sous la tension de 13,0 kV. La raie est parfaitement symétrique*



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. COSTER et R. de L. KRONIG, *Physica*, 2, p. 13, 1935.
- [2] D. COSTER, *Phil. Mag.*, 44, p. 546, 1922.  
D. COSTER, KNIPERS, et HUIZINGA, *Physica*, 2, p. 870, 1935.
- [3] M. VALADARES et F. MENDES, *C. R. Acad. Sc. Paris*, 226, p. 1187, 1948.
- [4] RICHTMYER et RAMBERG, *Phys. Rev.*, 51, p. 925, 1937.
- [5] M. VALADARES et F. MENDES, *ref. cit.*
- [6] J. SARMENTO, *Portugaliae Physica*, 2, p. 139, 1946.



## FIGURES DE DISTRIBUTION DU DÉPÔT ACTIF SUR DES PLAQUES MÉTALLIQUES

par GLAPHYRA VIEIRA (À LISBONNE)

(Reçu Août 1951)

Les premières études sur la distribution du dépôt radioactif sur des plaques métalliques ont été entreprises par ROSENBLUM et VALADARES [1]. Ils ont utilisé comme source radioactive une préparation forte et étendue de radiothorium qui occupait entièrement le fond du récipient où l'activation avait été réalisée. Ces auteurs ont conclu, d'après les résultats de leurs expériences, que la distribution du dépôt actif sur les plaques dépendait de la forme géométrique et de la position de ces dernières par rapport à l'axe du récipient cylindrique utilisé; par contre elle était indépendante de la nature du métal qui constituait la plaque et de la tension appliquée (15 à 1200 volts).

On sait [2] et [3] que, pour activer un corps, il suffit de le placer dans un récipient clos, à l'intérieur duquel il y a, par exemple, du radium, du thorium ou de l'actinium, ou bien de l'exposer dans une atmosphère chargée de l'une des émanations d'un de ces éléments. La transformation des atomes de chacune des émanations donne lieu à la production d'atomes de matière radioactive solide qui généralement se présentent ionisés; si le champ électrique n'existe pas, ces atomes se déposent sur les parois du récipient et sur le corps qu'on prétend activer formant le dépôt actif de l'émanation correspondante. Comme la plupart des atomes radioactifs provenant des émanations sont chargés positivement, le bilan d'activation augmente quand le potentiel du corps que l'on prétend activer est négatif par rapport aux parois du récipient.

Nous avons repris cette étude de la distribution du dépôt actif sur des plaques métalliques en utilisant, au lieu d'une source étendue de thorium (comme les auteurs cités), une source de radium que l'on pouvait considérer ponctuelle.

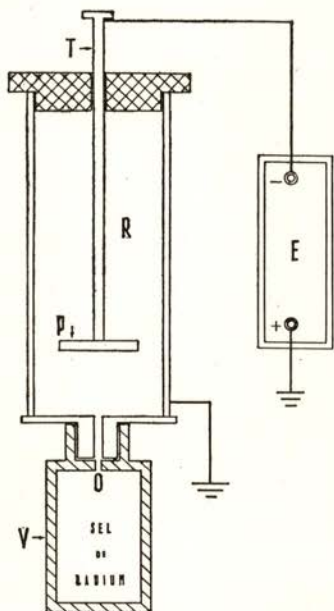
**Dispositif expérimental.** Le dispositif que nous avons utilisé se compose essentiellement de deux parties.

Un vase métallique *V* clos et contenant 38 milligrammes de radium (Radonator fourni par la Maison Degea Aktiengesellschaft de Berlin);

qui a dans sa partie supérieure un petit orifice *O* par lequel l'émanation s'échappe; et un récipient *R* en laiton qui s'adapte au radonator. Dans la base de *R* il y a une ouverture qui se trouve en face de l'orifice *O*, lequel se présente donc comme une source ponctuelle. Le récipient où l'on reçoit l'émanation au fur et à mesure qu'elle se produit, est fermé par un couvercle en ébonite traversé par une tige métallique *T*. À l'extrémité inférieure de cette tige, laquelle fonctionne comme électrode négative de la tension à appliquer, on adapte une des plaques métalliques (laiton) *P*, qu'on prétend activer dans l'atmosphère gazeuse ionisée constituée par l'air et par le radon à la pression atmosphérique. Ces plaques ont des contours réguliers et des formes géométriques différentes. Les tensions appliquées d'accord avec le schéma, sont fournies par un élévateur de tension *E*, (stabilisateur et rectificateur), qu'on peut régler, et qui est susceptible de produire des tensions de 100 à 2500 volts.

La plaque, qui reste toujours négative par rapport aux parois du récipient, est activée pendant 30 à 60 minutes et appliquée ensuite, pendant une à deux minutes contre une plaque photographique. Celle-ci, après développement, nous donne une image de la distribution du dépôt actif sur la plaque métallique.

**Resultats.** Dans plusieurs essais préliminaires nous avons utilisé un récipient cylindrique de 6 cm de diamètre et 15 cm de hauteur, et des plaques de forme géométriques différentes (circulaire: 3 cm de diamètre, et hexagonale: 2 cm de côté). Nous avons vérifié d'abord que, pour la même distance de la plaque au fond du récipient, la figure obtenue montre toujours la même allure, quelle que soit la tension appliquée (150 à 2000 volts) et la forme géométrique de la plaque (Fig. 1 et 3).



Dispositif d'activation des plaques métalliques

Ensuite, en maintenant constante la tension et en variant régulièrement la distance de la plaque au fond du récipient, nous avons vérifié, que la figure représentative du dépôt était toujours une circonférence de rayon variable avec la distance, (la distance augmentant, le rayon diminue).

Pour vérifier si la forme du récipient avait une influence sur la distribution du dépôt actif, nous avons remplacé, dans le dispositif expérimental, le cylindre en laiton, par des prismes droits du même métal avec la même hauteur et une base polygonale presque régulière ayant une surface à peu près égale à celle du cercle qui forme la base du cylindre.

Pour chaque récipient utilisé, nous avons répété toutes les expériences antérieurement décrites.

Les figures 1, 2, 5, 6, 7 et 8 représentent des autoradiographies obtenues sous la tension de 2000 volts avec la plaque circulaire placée normalement à l'axe des récipients utilisés et à des distances variables de leurs fonds.

Les figures obtenues reproduisent la forme de la section droite du récipient : circonférence dans le cas du cylindre, carré et hexagone dans les cas des prismes dont ces polygones forment les bases. Dans ces deux derniers cas, on peut encore remarquer la distribution privilégiée des dépôts selon les rayons des polygones, correspondant à la section droite du prisme utilisé (Fig. 5, 6, 7, 8 et 9).

On remarque encore dans le cas des récipients prismatiques, que la forme des figures se maintient constante, mais leurs dimensions varient aussi avec la distance de la plaque au fond du récipient (voir figures 2, 4, 6 et 8) passant par un minimum, fonction de la tension employée (Fig. 9), au delà duquel les figures deviennent moins nettes.

Dans toutes ces expériences, nous avons utilisé des distances allant de 1 cm jusqu'à 10 cm. Nous avons encore vérifié que, pour des distances inférieures à 1 cm, la forme géométrique de la plaque commençait à avoir une influence sur la forme du dépôt comme on peut le voir sur la figure 10.

Le point central que l'on voit sur toutes les autoradiographies correspond à la tâche directe de l'orifice par où s'échappe l'émanation.

Les résultats des expériences antérieures nous ont conduit à entreprendre d'autres essais dans le but d'étudier l'influence de la nature des parois du récipient sur les images obtenues.

À cet effet nous avons remplacé, d'abord, dans le primitif dispositif expérimental, le récipient cylindrique en métal par un cylindre

creux en verre (diamètre 7 cm ; hauteur 15 cm), placé sur une base en laiton.

Puisque dans ces essais les parois de l'enceinte étaient en matière isolante, la tension appliquée a été établie entre la base métallique et la plaque à activer. Dans ces conditions, quelle que soit la forme géométrique de l'électrode et sa distance au fond du récipient, on obtient des autoradiographies qui reproduisent seulement l'image de la surface de la plaque employée et dans lesquelles on ne voit aucune région privilégiée due à la concentration du dépôt actif (Fig. 11), sauf sur le pourtour.

Nous avons fait encore d'autres essais dans lesquels une moitié de la paroi du cylindre en verre était recouverte intérieurement de haut en bas par une feuille en laiton. La tension appliquée a été établie, comme dans les essais précédents, entre la base métallique et la plaque à activer. Nous avons obtenu, dans ces conditions, des autoradiographies que montrent l'influence des parois, dans le cas envisagé, sur la distribution du dépôt, comme on voit sur la figure 12.

En présence de ces résultats nous avons fait d'autres activations mais en modifiant la position de la plaque quant aux parois du récipient métallique et à l'orifice qui fonctionne comme source radioactive. Ces essais ont été réalisés en maintenant d'abord la plaque centrée relativement aux parois du récipient mais en déplaçant l'axe de l'ensemble par rapport à l'orifice *O*. Ensuite, avec l'orifice centré par rapport à l'axe du récipient nous avons décentré la plaque relativement aux parois.

Dans le premier cas on n'a remarqué aucun changement dans la forme et dans les dimensions des figures, mais l'image du point change de position, et disparaît même lorsque la projection verticale de l'orifice ne tombe plus sur la plaque. Même dans ce cas extrême, la forme et les dimensions des figures se montraient toujours constantes (Fig. 13).

Dans le second cas, l'image du point central change également de position, mais il se maintient à l'intérieur de la figure, qui, dans ces conditions, ne présente plus une forme régulière. Dans le cas, par exemple, d'une plaque circulaire et d'un récipient constitué par, un cylindre droit, dont l'axe passe par l'orifice, mais où la plaque a été déplacée, nous avons obtenu une autoradiographie, dans laquelle on voit le point et la figure représentative du dépôt décentrés par rapport à l'image de la plaque. Dans ce cas la figure n'est plus une circonférence mais une courbe continue de rayon variable (Fig. 14).



Toutes les expériences décrites ont été faites en plaçant toujours la plaque normalement à l'axe du récipient.

Pour vérifier si la forme du dépôt était influencée par la position relative de la plaque et de l'axe, nous avons entrepris une autre série d'expériences dans lesquelles on a employé la plaque circulaire et le récipient cylindrique en laiton (tout cet ensemble centré avec l'orifice qui fonctionne de source radioactive), mais en plaçant la plaque de telle façon que l'angle plaque-axe prenait différentes valeurs entre 90 et 0 degrés.

Dans ces conditions, nous avons obtenu des ellipses, comme il était à prévoir, dont le rapport entre les axes augmentait lorsque l'angle diminuait. Ainsi qu'il fallait s'y attendre à la limite on obtenait un segment de droite. Les figures 15 et 16 représentent respectivement des résultats obtenus avec les positions, moyenne (environ 45°) et extrême (0°).

Conclusions. Tous les résultats décrits nous mènent à la conclusion que la distribution du dépôt radioactif sur des plaques métalliques est indépendante de la tension appliquée et de la forme géométrique de la plaque, (pour des distances de la plaque au fond du récipient supérieures à 1 cm).

Par contre elle dépend de la position de la plaque à activer, de leur distance au fond du récipient et dépend surtout de la forme des parois du récipient où l'activation a été réalisée.

Cette dernière conclusion est contraire à celle de ROSENBLUM et VALADARES.

Il se peut que cette divergence soit due à l'emploi, par ces auteurs d'une source étendue et par conséquent difficilement homogène au lieu d'une source qui se présente ponctuelle comme celle que nous avons employé.

D'autre part, ce désaccord peut être encore, nous le croyons, expliqué par le fait que le rapport entre la surface de la plaque et la surface de la section droite du récipient était beaucoup plus grand dans nos essais, 1 : 4, que dans les expériences de ROSENBLUM et VALADARES dont le rapport est 1 : 37. C'est-à-dire, dans le dispositif expérimental employé par ces auteurs, la distance des bords de la plaque relativement aux parois de l'enceinte où se faisait l'activation était très grande en comparaison avec celle que nous avons utilisé dans nos conditions d'expérience.

Nous nous proposons maintenant d'étudier l'influence que ce rapport (surface de la plaque-surface de la section droite du récipient) pourra avoir sur la distribution du dépôt actif. Ensuite, en poursuivant

nos recherches, nous tâcherons de définir les surfaces équipotentielles dont les autoradiographies présentées montrent les sections en plusieurs régions à l'intérieur du récipient.

Nous espérons ainsi pouvoir apporter une contribution à l'étude expérimental de la distribution du champ électrique dans une atmosphère gazeuse limitée, car on peut admettre que les points de plus grande concentration du dépôt actif doivent correspondre à des maxima du champ électrique.

Ce travail a été réalisé au Laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences de Lisbonne. Je remercie l'actuel Directeur du Laboratoire M. le Prof. Dr. AMARO MONTEIRO des moyens qu'il a mis à ma disposition. Je tiens aussi à exprimer toute ma reconnaissance à M. le Dr. MANUEL VALADARES qui m'a suggéré ce travail et dont les premiers conseils ont été pour moi une aide précieuse.

Je voudrais, en terminant, rendre ici mes profonds hommages à la mémoire de mon Maître M. le Prof. Dr. A. CYRILLO SOARES, qui était, Directeur du Laboratoire de Physique au début de ces expériences. Je ne pourrais jamais oublier ses précieux conseils, ses encouragements et les moyens de travail qu'il a bien voulu mettre à ma disposition ; ainsi que l'intérêt bienveillant qu'il apportait toujours à tous les travaux réalisés au Laboratoire.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] ROSENBLUM et VALADARES. *Comptes rendus, Acad. Sc. Paris.* 192, 1931, p. 939.
- [2] MADAME PIERRE CURIE, *Radioactivité.* Ed. Hermann & Cie. Paris. 1935.
- [3] E. RUTHERFORD, J. CHADWICK and C. D. ELLIS, *Radiations from Radioactive Substances.* Ed. University Press. Cambridge. 1930.



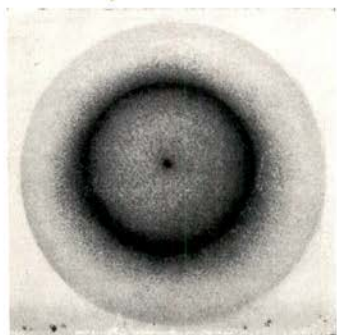


Fig. 1

*Plaque circulaire*

*Récipient: Cylindre droit en laiton*

*Distance plaque—fond du récipient: 3 cm.*

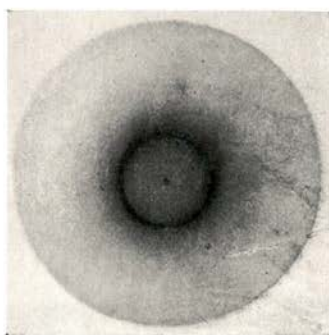


Fig. 2

*Plaque circulaire*

*Récipient: Cylindre droit en laiton*

*Distance plaque—fond du récipient: 5 cm.*

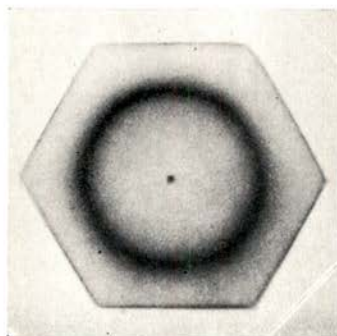


Fig. 3

*Plaque hexagonal*

*Récipient: Cylindre droit en laiton*

*Distance plaque—fond du récipient: 3 cm.*

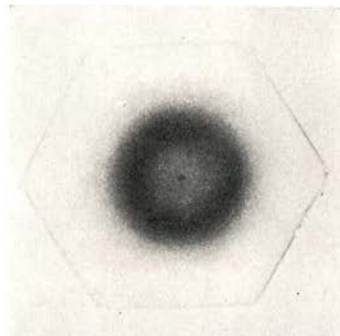
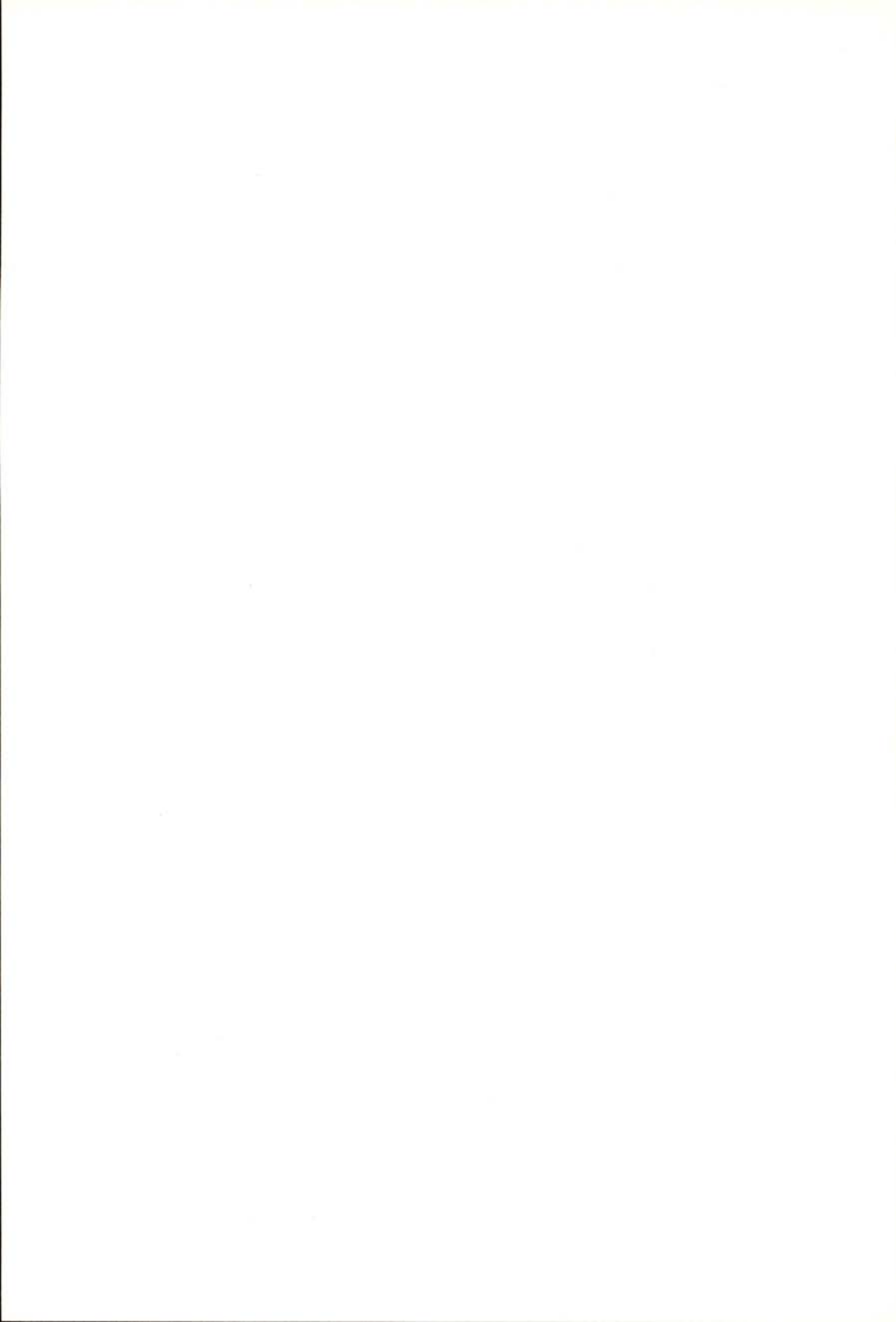


Fig. 4

*Plaque hexagonal*

*Récipient: Cylindre droit en laiton*

*Distance plaque—fond du récipient: 6 cm.*



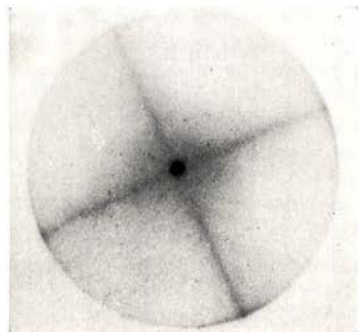


Fig. 9

*Plaque circulaire*

*Récipient: Prisme droit, de base carré, en laiton*

*Distance plaque—fond du récipient: 8 cm.*

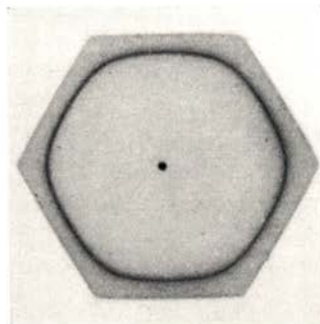


Fig 10

*Plaque hexagonal*

*Récipient: Cylindre droit en laiton*  
*Distance plaque—fond du récipient: <1 cm.*

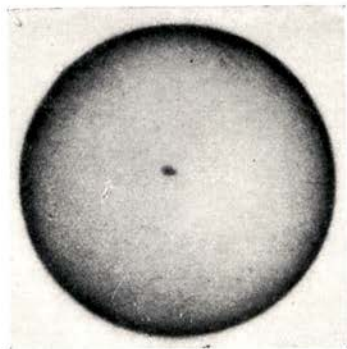


Fig. 11

*Plaque circulaire*

*Récipient: Cylindre droit avec les parois en verre, posé sur une base en laiton*

*Distance plaque—fond du récipient: 3 cm.*

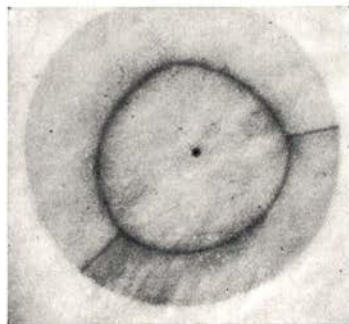


Fig. 12

*Plaque circulaire*

*Récipient: Une moitié de la paroi du cylindre droit en verre est recouverte intérieurement de haut en bas par une feuille en laiton*

*Distance plaque—fond du récipient: 3 cm.*





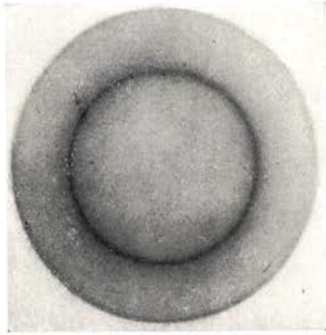


Fig. 13

*Plaque circulaire*

*Récipient: Cylindre droit en laiton*

*Plaque centrée par rapport aux parois du récipient, mais l'axe de l'ensemble déplacé relativement à l'orifice O*

*Distance plaque—fond du récipient: 3 cm.*

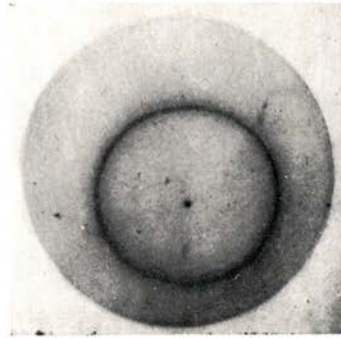


Fig. 14

*Plaque circulaire*

*Récipient: Cylindre droit en laiton*

*L'orifice O centré par rapport à l'axe du récipient, mais avec la plaque décentré relativement aux parois*

*Distance plaque—fond du récipient: 3 cm.*

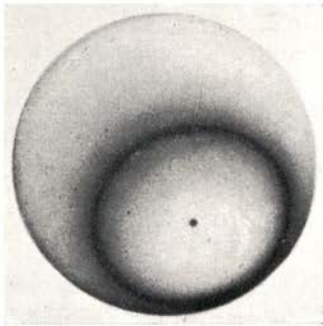


Fig. 15

*Plaque circulaire*

*Récipient: Cylindre droit en laiton*

*Tout l'ensemble (plaque-parois du récipient) centré avec l'orifice O*

*Angle plaque—axe du récipient: 45° (environ)*

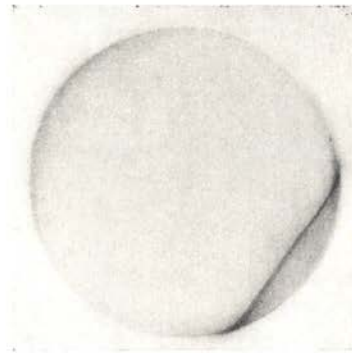


Fig. 16

*Plaque circulaire*

*Récipient: Cylindre droit en laiton*

*Tout l'ensemble (plaque-parois du récipient) centré avec l'orifice O*

*Angle plaque—axe du récipient: 0°*



## ÉTUDE DE LA FORME ET DE L'INTENSITÉ DE LA BANDE SATÉLLITE QUI ACCOMPAGNE LA RAIE $L\beta_2$ DE L'OR

par LÍDIA SALGUEIRO et J. GOMES FERREIRA (\*)

(À LISBONNE)

(Reçu Décembre 1951)

RICHTMYER, RAMBERG et BARNES [1] ont déterminé expérimentalement les intensités et les formes des bandes satellites qui accompagnent soit la raie  $L\beta_2$ , soit la raie  $L\alpha_1$  de l'or. Ils ont employé un spectromètre à double cristal muni d'une chambre d'ionization comme détecteur.

Les auteurs ont conclu que la raison de l'intensité de la bande satellite qui accompagne la raie  $L\beta_2$  par rapport à celle-ci, est de 0,055.

Ils ont aussi déterminé théoriquement [2] les intensités et les formes des bandes satellites citées et ont obtenu la valeur 0,15 pour la raison des intensités de la bande satellite et de la raie  $L\beta_2$ .

La configuration des courbes obtenues par RICHTMYER, RAMBERG et BARNES (RBR) théorique et expérimentalement est assez différente.

Ainsi, tandis que la courbe théorique présente un accentué maximum au voisinage de  $8,0 Ry$ , la courbe expérimentale présente un maximum au voisinage de  $5,0 Ry$  et un autre moins accentué vers les  $4,0 Ry$ .

Il faut encore remarquer que la courbe expérimentale n'a qu'une largeur d'environ  $3,5 Ry$  ( $3,0$  à  $6,5 Ry$ ), tandis que la courbe théorique s'étend de  $3,0$  à  $12,5 Ry$ .

On peut, par conséquent, affirmer qu'outre la grande différence du point de vue des intensités (théorique et expérimentale), les deux courbes sont assez différentes en ce qui concerne la forme; le maximum de la courbe expérimentale est déplacé du côté des grandes longueurs d'onde de  $3,5 Ry$  par rapport à celui de la courbe théorique (Fig. 1a).

---

(\*) Boursier de l'«Instituto de Alta Cultura».

Dans l'élaboration théorique RICHTMYER et RAMBERG ont admis quelques hypothèses simplificatrices. La principale source d'erreur provient, selon les auteurs, de l'absence du traitement relativiste du problème. Pourtant, malgré ces mêmes simplifications la théorie était en bon accord avec l'expérience en ce qui concerne la bande satellite de la raie  $L\alpha_1$ . On pouvait, par conséquent, se demander si la différence entre les résultats expérimentaux et les prévisions théoriques pour la bande de  $L\beta_2$  ne provenait pas d'un mécanisme différent d'excitation des raies satellites dans les deux cas, tandis que la théorie admettait le même. Pourtant, on avait déjà montré [3,4] que la bande satellite de  $L\beta_2$  disparaît, simultanément avec celle de  $L\alpha_1$ , lorsqu'on n'excite pas le niveau  $L_1$ .

Il paraissait, par conséquent, souhaitable de reprendre les expériences concernant la forme et l'intensité de la bande satellite de  $L\beta_2$  dans des conditions expérimentales différentes, vu que la méthode expérimentale suivie est susceptible de plusieurs causes d'erreur (erreurs commis dans le réglage de l'appareil, la petite précision dont on peut déterminer les angles de réflexion, etc.). En outre, la chambre d'ionisation est un détecteur peu sensible aux raies ou bandes de faible intensité et qui exige un fonctionnement rigoureusement constant du tube à rayons X, pendant l'enregistrement.

Ces conclusions nous ont fait reprendre cet étude, en nous servant d'une méthode expérimentale assez différente (méthode du cristal courbé, Cauchois).

Cette méthode avait déjà donné de très bons résultats dans l'étude de la bande satellite qui accompagne la raie  $L\alpha_1$ , étude réalisée au Laboratoire de Physique de la Faculté des Sciences de Lisbonne par José Sarmiento [5]. Le même auteur a montré encore qu'on peut se servir de la méthode du cristal courbé, de préférence à la méthode du spectromètre à double cristal, dont le réglage est bien plus difficile; la méthode photographique n'exige pas un régime de fonctionnement constant du tube à rayons X, ce qui facilite beaucoup l'expérience.

L'étude expérimentale de la bande satellite qui accompagne la raie  $L\beta_2$  présente quelques difficultés qui ne se posent pas dans l'étude de la raie  $L\alpha_1$ . Ces difficultés proviennent du fait que les raies  $L\beta_1$ ,  $L\beta_3$  et  $L\beta_{15}$ , ont des longueurs d'onde très voisines ( $L\beta_2 \rightarrow 1068 \text{ U. X.}$ ;  $L\beta_3 \rightarrow 1065,7 \text{ U. X.}$ ;  $L\beta_{15} \rightarrow 1069,9 \text{ U. X.}$ ).

La séparation de ces raies est donc très difficile et même irréalisable, car on avait besoin, pour l'accomplir, d'un spectrographe de pouvoir séparateur très élevé ce qui augmenterait considérablement les temps d'exposition, les rendant même prohibitifs.

Nous avons employé une installation à rayons X déjà décrite [4] et le tube était muni d'une anticathode d'or.

Les spectrogrammes ont été obtenus sous la tension de  $35 kV$  et le courant de  $1,0 mA$  (Fig. 2), conditions dans lesquelles le régime de fonctionnement du tube était le plus stable.

Nous avons utilisé un spectrographe de  $50 cm$  de rayon muni d'un cristal de quartz (plans de distance réticulaire  $1749 U. X.$ ); la dispersion était de  $6,6 U. X./mm$ . Nous avons employé film Ilfex à Rayons X, sans écran renforçateur.

Pour étudier la forme et l'intensité de la bande satellite qui accompagne la raie  $L\beta_2$  il fallait d'abord construire la courbe correspondante à la bande satellite.

Sur le même microphotogramme nous avons fait l'enregistrement correspondant aux raies  $L\beta_2$  et satellites,  $L\beta_3$ ,  $L\beta_{15}$  et au coin microphotométrique, dans les limites de noircissement nécessaires aux déterminations (Fig. 3).

Nous avons obtenu les courbes de variation de la densité optique en fonction de la longueur d'onde.

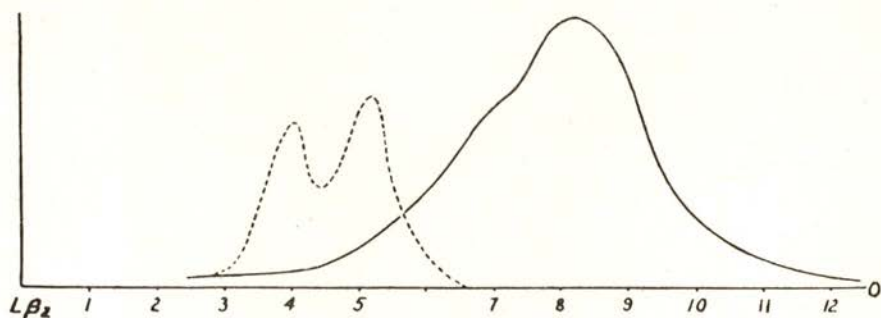
Dans une expérience antérieure on a conclu que les doses sont proportionnelles aux densités; ainsi les courbes cités sont aussi les courbes des intensités en fonction des longueurs d'onde.

Le sommet de la courbe des intensités correspond à la longueur d'onde  $1068 U. X.$  (raie  $L\beta_2$ ). La courbe des intensités correspondante à la raie  $L\beta_2$  présente une nette assymétrie par rapport à l'axe des ordonnées, qui provient des raies  $L\beta_3$ ,  $L\beta_{15}$  et satellites. La raie  $L\beta_{15}$  produit une déformation au delà de  $1068 U. X.$  et les raies  $L\beta_3$  et satellites vers les longueurs d'onde au dessous de  $1068 U. X.$

A partir de  $-3,96 Ry$  par rapport au sommet de la raie  $L\beta_2$  la déformation produite par la raie  $L\beta_{15}$  est innappréciable. La largeur de la raie  $L\beta_3$  est un peu supérieure à celle de la raie  $L\beta_{15}$ ; cependant de la comparaison des longueurs d'onde des raies  $L\beta_2$ ,  $L\beta_3$  et  $L\beta_{15}$ , on peut admettre que la raie  $L\beta_3$  ne produit pas une déformation appréciable au dessous de  $+3,96 Ry$  par rapport au sommet de la raie  $L\beta_2$ .

Par conséquent, on peut tracer la branche au dessous de  $3,96 Ry$  symétrique de la branche au dessus de  $-3,96 Ry$  par rapport à l'axe des ordonnées correspondant au sommet de la raie  $L\beta_2$ . Nous avons ainsi obtenu la courbe des intensités ( $a$ ) rapportée aux raies  $L\beta_2$ ,  $L\beta_3$  et  $L\beta_{15}$  parce que l'influence de la bande satellite ne se manifeste qu'à partir de  $3,0 Ry$ .

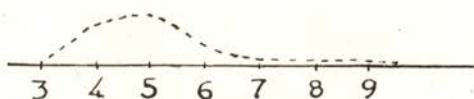
La différence entre les ordonnées de la courbe totale et de la



$$\frac{\Delta \nu}{R} (Ry) \text{ par rapport à } L\beta_2$$

Fig. 1a

Courbes théorique et expérimentale (pointillée) obtenues par R. B. R.



$$\frac{\Delta \nu}{R} (Ry) \text{ par rapport à } L\beta_2$$

Fig. 1b

courbe (a) nous a permis de tracer la courbe des intensités de la bande satellite (Fig. 1b). Dans les figures 1a et 1b les ordonnées (intensités) ne sont pas dans la même échelle.

De la comparaison de cette courbe avec celles de R. B. R., on peut conclure que dans ce qui concerne la forme, l'accord avec la courbe théorique est bien meilleur que l'accord avec la courbe expérimentale indiquée par ces auteurs.

La courbe s'étend de 3,0 Ry à 9,5 Ry et présente un maximum vers les 5,0 Ry c'est-à-dire, le maximum est déplacé par rapport au maximum de la courbe théorique et en bon accord avec le maximum de la courbe expérimentale de R. B. R.

Nous avons déterminé, avec un planimètre, l'aire correspondante à la courbe totale et la valeur obtenue est de 23,86 cm<sup>2</sup>. Pour la courbe correspondante aux raies Lβ<sub>2</sub>, Lβ<sub>3</sub> et Lβ<sub>15</sub> nous avons obtenu 21,99 cm<sup>2</sup>. La surface correspondante à la bande satellite était, par conséquent, 1,87 cm<sup>2</sup>.

Il fallait alors évaluer la partie de la surface  $21,99 \text{ cm}^2$  qui correspondait à la raie  $L\beta_2$ . RICHTMYER, RAMBERG et BARNES ont indiqué la valeur  $45,5/5,56$  comme intensité de  $L\beta_2$  par rapport à  $L\beta_{15}$ . Travaillant sous une tension d'excitation comprise entre  $V_{LI}$  et  $V_{LIII}$ , nous avons réussi à obtenir un spectrogramme des raies  $L\beta_2$  et  $L\beta_{15}$  en absence de la bande satellite et de la raie  $L\beta_3$  (niveau final  $L_{III}$ ). Admettant la symétrie de la raie  $L\beta_2$  en absence de satellites, ce spectrogramme nous a permis de déterminer l'intensité de la raie  $L\beta_2$ , par rapport à la raie  $L\beta_{15}$ , en nous servant du méthode microphotométrique déjà indiqué.

Comme le tracé du microphotogramme n'était pas très fin, on ne pouvait pas faire les déterminations avec une grande précision parce que l'intensité de la raie  $L\beta_{15}$  est très petite par rapport à celle de la raie  $L\beta_2$ .

Cependant, et comme moyenne de plusieurs déterminations, nous croyons pouvoir affirmer que la raison des intensités de  $L\beta_2$  et de  $L\beta_{15}$  ne dépasse pas la valeur  $45,5/3,0$ , valeur supérieure à celui indiqué dans la bibliographie.

D'autre part, J. COOPER [6] a déterminé pour raison des intensités des raies  $L\beta_2$  et  $L\beta_3$  la valeur  $45,5/13$ .

Nous aurons, par conséquent, la valeur  $16,27 \text{ cm}^2$  correspondante à la raie  $L\beta_2$ ; on peut conclure alors :  $\frac{I_{sat.}}{I_{L\beta_2}} = 0,11$ .

D'après un autre microphotogramme nous avons obtenu la valeur  $0,115$  en parfait accord avec l'antérieur. On voit, par conséquent, qu'il y a un meilleur accord entre notre valeur et le résultat théorique. Nous pouvons même affirmer, que dans les limites des erreurs, il y a un accord satisfaisant, en ce qui concerne les intensités prévues et celles observées pour les bandes satellites, soit dans le cas de  $L\alpha_1$ , soit dans celui, maintenant étudié, de  $L\beta_2$ . Remarquons finalement que dans les deux cas les maxima expérimentaux des bandes satellites sont plus rapprochés des raies que ceux prévues par la théorie.





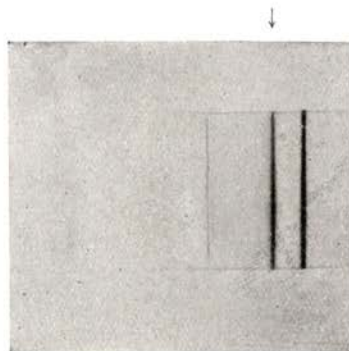


Fig. 2

Spectrogrammes des raies  $L\beta$  de l'or; on signale l'ensemble des raies  $L\beta_2$ ,  $L\beta_3$ ,  $L\beta_{15}$  et bande satellite.

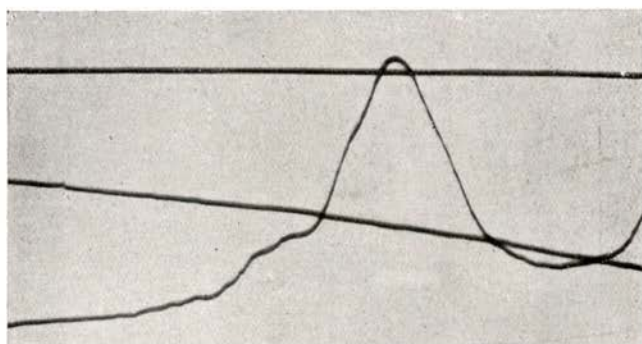


Fig. 3

Microphotogramme des raies  $L\beta_2$ ,  $L\beta_3$ ,  $L\beta_{15}$  et bande satellite de l'or; on peut voir encore l'enregistrement correspondant au coin microphotométrique.



## BIBLIOGRAPHIE

- [1] RICHTMYER, RAMBERG et BARNES, *Phy. Rev.* 46, p. 857, 1934.
- [2] RICHTMYER, RAMBERG, *Phy. Rev.* 51, p. 925, 1937.
- [3] L. SALGUEIRO et M. H. B. SOUSA, *Port. Phys.* v. 3, f. 2, p. 95, 1951.
- [4] M. VALADARES et F. MENDES, *C. R.* 226, p. 1185, 1948.
- [5] JOSÉ SARMENTO, *Thèse*, Porto, 1945.
- [6] J. COOPER, *Phys. Rev.* v. 61, p. 240, 1942.



# PORTUGALIAE MATHEMATICA

REVISTA DE COLABORAÇÃO INTERNACIONAL

Preço dos volumes já publicados

Volume 1—500\$00; Volumes 2 a 10—250\$00 cada

Para os sócios da Sociedade Portuguesa de Matemática

Volume 1—400\$00; cada um dos volumes seguintes: 150\$00

—●—  
Volume 11, assinatura: 150\$00; para os sócios da S. P. M.: 50\$00

Pedidos a *Gezeta de Matemática, Lda.* — Rua Almirante Barroso, 20, r/c—LISBOA-N.

# GAZETA DE FÍSICA

REVISTA DOS ESTUDANTES DE FÍSICA E DOS  
FÍSICOS E TÉCNICOS FÍSICOS PORTUGUESES

**DEFENDE OS INTERESSES PROFISSIONAIS DOS FÍSICOS**

*Publica artigos científicos, de divulgação  
e vulgarização dedicados a estudantes, professores  
e técnicos, e problemas saídos nos exames*

Número avulso . . . . . Esc. 12\$50

Assinatura por um ano (4 números) Esc. 40\$00

Pedidos para:

Laboratório de Física da F. C. L.—R. da Escola Politécnica—LISBOA

# PORTUGALIAE PHYSICA

REVISTA DE COLABORAÇÃO INTERNACIONAL

●  
REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO

**LABORATÓRIO DE FÍSICA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA**

●  
Publicados: Volume 1 (4 fascículos): 300\$00; Vol. 2 (4 fasc.): 150\$00

Assinatura de cada um dos volumes seguintes — 80\$00

PORTUGALIAE PHYSICA se propose de servir simultanément deux buts — le développement des études physiques au Portugal et la collaboration internationale dans ce domaine.

PORTUGALIAE PHYSICA est la seule revue portugaise consacré exclusivement aux sciences physiques.

Les travaux à publier devront être écrits à la machine (les symboles à la main). Les auteurs d'un mémoire ne dépassant pas 30 pages auront droit à 50 tirages-à-part gratuits.

Toute la correspondance concernant la Rédaction de PORTUGALIAE PHYSICA doit être adressée à

**P O R T U G A L I A E   P H Y S I C A**

**Laboratório de Física — Faculdade de Ciências**

**Rua da Escola Politécnica — Lisboa — Portugal**

Prix de l'abonnement: 80 escudos par volume.

Prix des volumes déjà parus: Volume I: 300 escudos; autres volumes: 150 escudos

Prix du fascicule: 40 escudos.

Les Universités, les Laboratoires de Physique, les Académies, les Sociétés Savantes et les Revues de Physique sont invités à recevoir cette revue en échange de leurs publications.

PORTUGALIAE PHYSICA donnera un compte-rendu détaillé de tous les ouvrages soumis à la Redaction en deux exemplaires.

# PORTUGALIAE PHYSICA

VOLUME 3

FASCÍCULOS 3-4 (Págs. 127-174)

1            9            5            4

FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA  
PORTUGAL

# PORTUGALIAE PHYSICA

(Fundador: Prof. A. Cyrillo Soares)

VOLUME 3

1954

FASCÍCULOS 3-4

---

*Comissão de redacção: M. Telles Antunes, A. Marques da Silva e M. Valadares*

*Editor: Amaro Monteiro (Director do Laboratório de Física da Faculdade de Ciências de Lisboa)*

---

## INDICE

(Table des matières)

H. D. PARBROOK ET E. H. RICHARDSON — La propagation des ultrasons dans les gaz sous pression. . . . .	127-138
LÍDIA SALGUEIRO ET J. GOMES FERREIRA — Étude comparative des spectres à rayons X obtenus par bombardement électronique et par fluorescence	139-147
A. ROUMEGOUS — Les amplificateurs à large bande, en physique nucléaire	149-170

Nomes e direcções dos autores deste fascículo

(Noms et adresses des auteurs de ce fascicule)

H. D. PARBROOK e E. G. RICHARDSON — King's College, Newcastle upon Tyne, à l'Université de Durham — Inglaterra

LÍDIA SALGUEIRO e J. GOMES FERREIRA — Faculdade de Ciências de Lisboa — Portugal

A. ROUMEGOUS — Laboratoire Curie — Institut du Radium — Paris — França



## LA PROPAGATION DES ULTRASONS DANS LES GAZ SOUS PRESSION

par H. D. PARBROOK (\*) et E. G. RICHARDSON

*King's College, Newcastle upon Tyne, à l'Université de Durham, Angleterre*

(Reçu le 10 Février 1953)

Introduction. Des mesures de la vitesse de propagation ultrasonore dans des liquides à haute pression étaient faites par SWANSON [1] jusqu'à  $300 \text{ kg/cm}^2$  et BIQUARD [2] jusqu'à  $1000 \text{ kg/cm}^2$ . Le dernier a employé la méthode de la diffraction de la lumière par le liquide, irradié d'un faisceau d'ondes ultrasonores. En ce qui concerne l'état gazeux, HERGET [3] et ensuite NOURY [4] ont étudié la vitesse du son à une seule fréquence dans l'acide carbonique aux pressions et températures qui abordaient l'état critique. Ils ont remarqué le minimum caractéristique dans la vitesse à la transition gaz-liquide. Pendant les dernières années, un nombre d'auteurs ont étudié l'absorption dans ce gaz: SCHNEIDER [5] au point critique même, ANDERSON et DELSASSO [6] dans une région plus étendue mais encore à une seule fréquence.

Le travail actuel se réfère aux conséquences thermodynamiques des résultats obtenus dans deux gaz, l'acide carbonique et l'éthylène à trois fréquences et sous pressions entre 1 et 100 atmosphères.

Ensemble expérimental. Le dispositif d'expérience, dont la figure 1 montre l'ensemble générale, comprend :

- 1) une bombe qui contient le gaz sous pression,
- 2) un interféromètre ultrasonore type Pierce avec un émetteur de quartz en forme de disque monté en face d'un réflecteur d'acier capable d'être mis en marche par moyen d'une manivelle accordée à un moteur électrique qu'on voit au-dessus,
- 3) une deuxième chambre à gaz d'un volume variable qui permet la compensation du volume total quand le piston qui porte le réflecteur descend dans l'interféromètre,

(\*) Maintenant à l'Université de Liverpool.

4) un oscillateur tipe HARTLEY, assuré à 1 c/s pendant une série de mesures, qui alimente le quartz à sa fréquence fondamentale. Cette fréquence, qui change un peu avec la pression, est mesurée grâce à un fréquencemètre vérifié de temps en temps sur les émissions de la B. B. C.,

5) un thermostat qui entoure l'appareil.

Un essai préalable dans lequel le quartz et le réflecteur formaient un interféromètre optique de MICHELSON assure que la location du quartz était juste et perpendiculaire à la face émetteur. Toute variation pendant le mouvement se révéla par l'arrivée des sommets et crevasses «satellites» entre les sommets principaux dans la marche du courant de plaque du circuit alimentaire.

Un autre dispositif (fig. 2) servait à mesurer la viscosité du fluide. Il comprend un cylindre ou une bouteille d'acier contenant le gaz et tenu par un suspension bifilaire dans un vase de verre, qu'on peut évacuer. L'appareil ainsi forme un viscosimètre à cylindre oscillant dont HELMHOLTZ a donné la théorie.

Marche d'une expérience. La bombe est évacuée et, remplie du gaz expérimental, soigneusement séché. Nous étions soucieux de la pureté d'un gaz comme l'acide carbonique au point de vue d'éviter des adultérants comme l'air et l'eau qui pourraient provoquer une dispersion de la vitesse avec la fréquence, différente à celle du gaz pur.

Pendant la marche régulière du réflecteur, les déviations du galvanomètre étaient inscrites, par l'intervention d'un faisceau lumineux, sur papier photographique roulant dans une camera. La figure 3 en donne un exemplaire. Les locations des sommets dans le courant  $I$  donne la longueur d'onde; leurs hauteurs  $\delta I_1$  et  $\delta I_2$  pour deux distances  $l_1$  et  $l_2$  du réflecteur donnent le coefficient d'absorption  $\alpha$  dans la formule:

$$\delta I_1 / \delta I_2 = \exp. 2 \alpha (l_2 - l_1)$$

prenant garde aux conditions de HARDY [7], c'est-à-dire (1)  $\delta I/I$  petit, (2)  $\alpha l$  grand.

Après une série de telles observations, on laisse échapper une quantité de gaz pour reprendre les mesures à une pression plus basse. Pendant tous ce temps on observe la température, assurée contre fluctuations à 0.02 degré par un contrôleur SUNVIC.

Passant maintenant aux mesures de viscosité, on donne au cylindre suspendu une déviation légère par moyen des aimants inté-

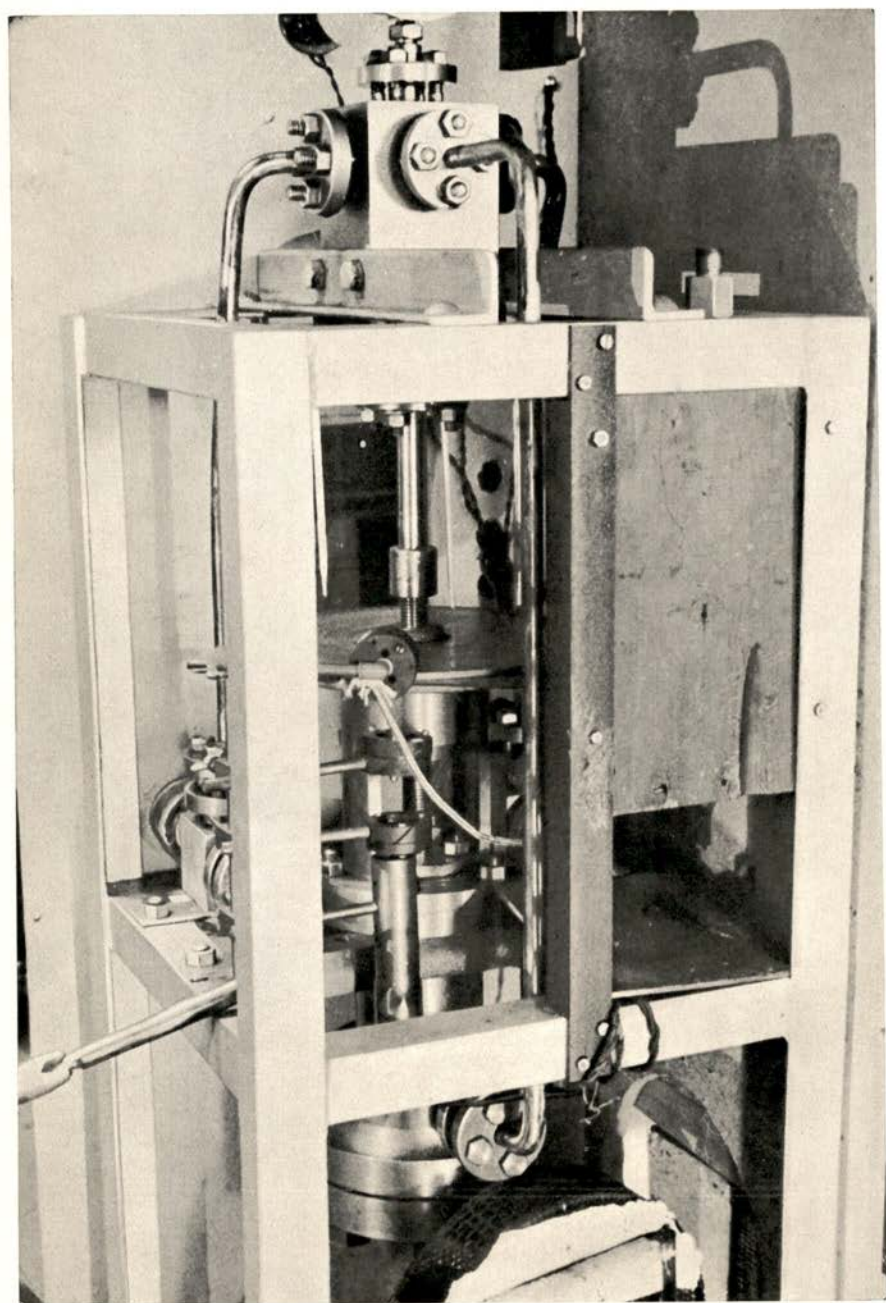


Fig. 1 — Ensemble générale de l'interferomètre.

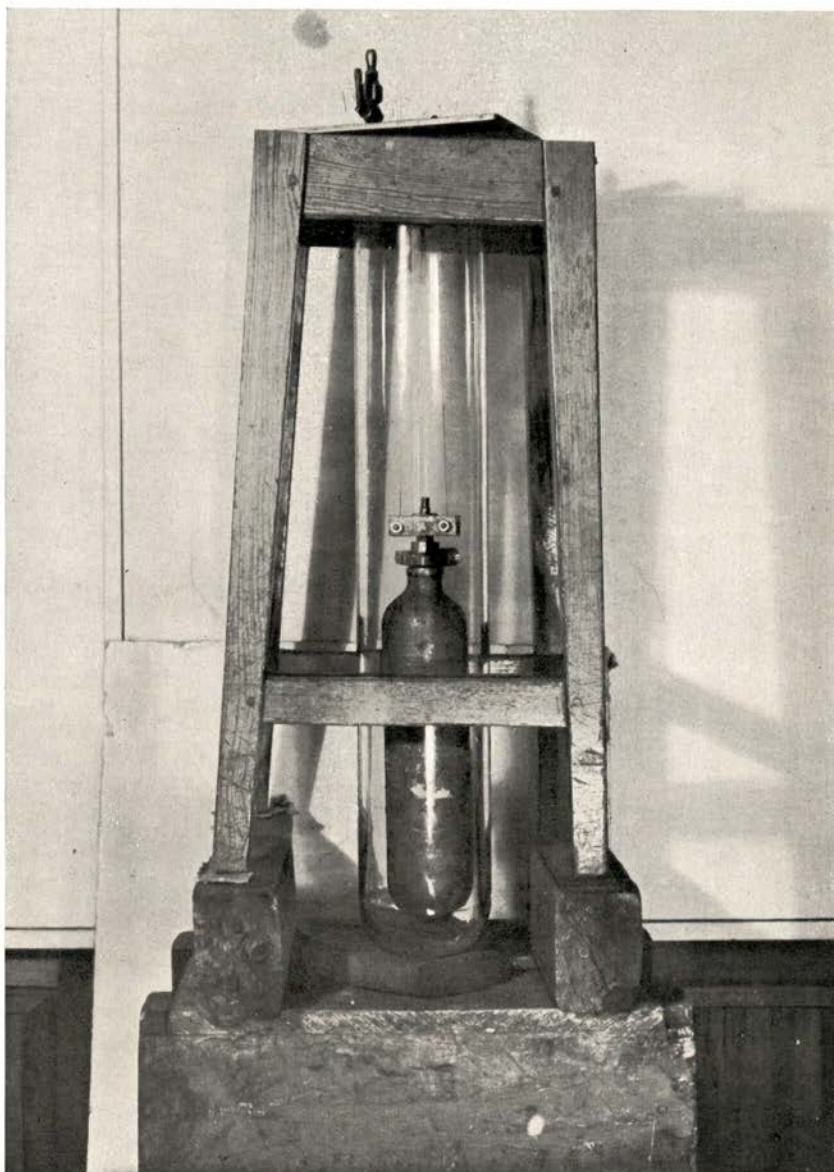


Fig. 2 — Viscosimètre à cylindre oscillant.

rieurs et on laisse osciller le cylindre, regardant les déviations en diminuant sur une échelle (fig. 4). L'étalonnage résulte d'une autre expérience dans laquelle la bouteille était remplie d'huile de densité et viscosité connues.

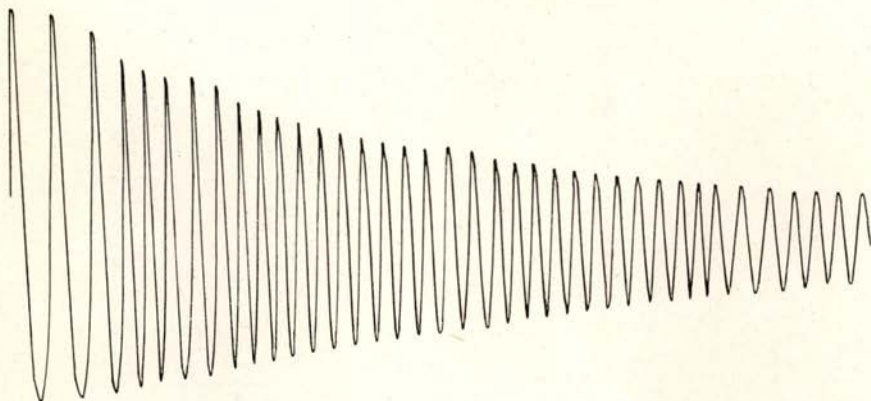


Fig. 3 — Déviations du galvanomètre dans le circuit de l'interferomètre.

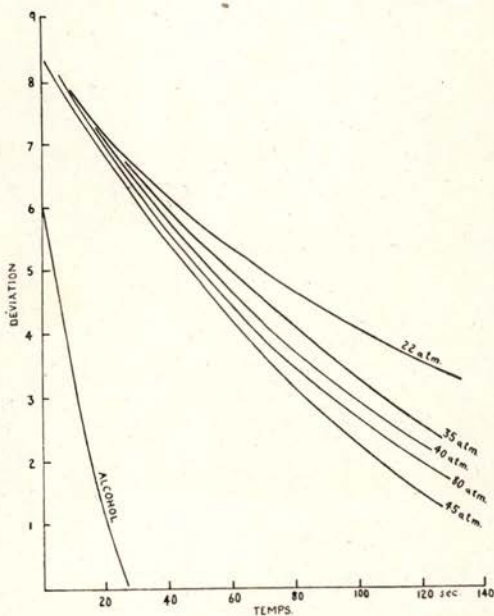


Fig. 4 — Déviations du cylindre oscillant (viscosimètre).

Résultats. D'abord, nous avons obtenu une série de résultats dans l'air dans laquelle la vitesse et l'absorption vont en diminuant régulièrement avec la pression et ne montrent aucune dispersion. Après

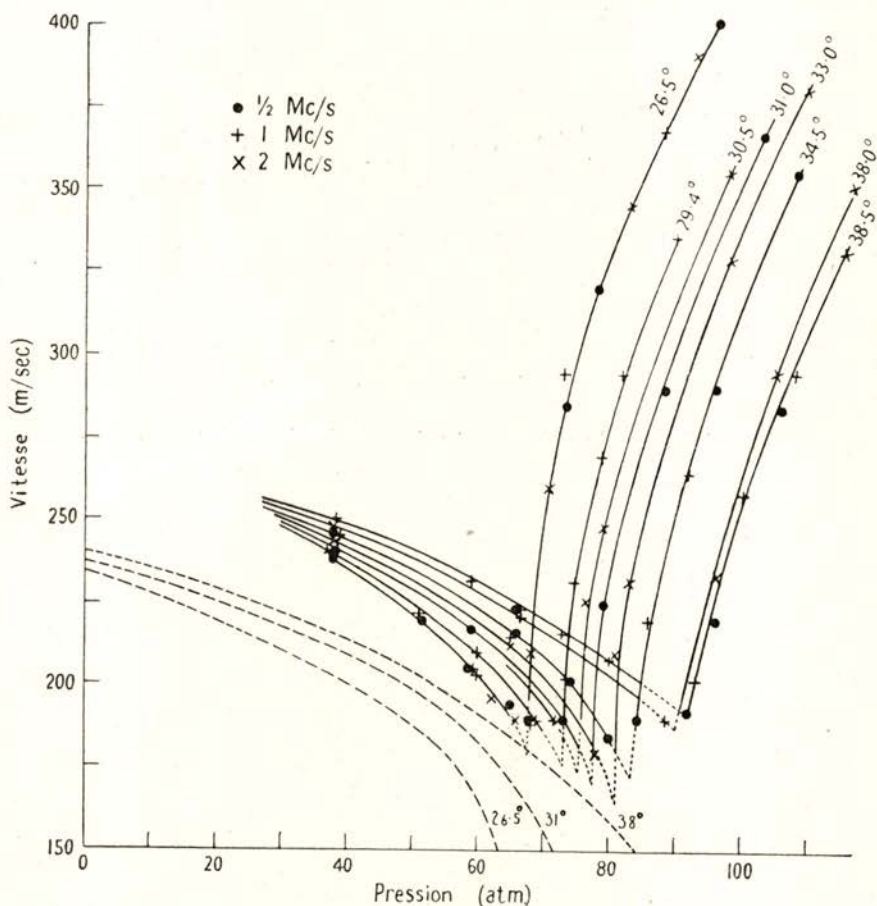


Fig. 5 — Vitesse dans l'acide carbonique en fonction de la pression.

nos tentatives avec l'air, nous avons jusqu'à présent, concentré nos efforts sur l'acide carbonique et l'éthylène qui ont tous les deux des températures critiques près de la température atmosphérique. Il est bien connu que, le premier nommé, manifeste une dispersion de la vitesse qui pour les basses pressions s'exprime en fonction de  $f/p$ , avec une

augmentation au voisinage d'une valeur  $f/p = 2$ ;  $f$  étant en kc./s. et  $p$  en atmosphères. On remarque une dispersion semblable dans ces expériences-ci, avec la fréquence 500 kc./s. entre 1 et 3 atmos. mais à pressions plus hautes ( $f/p$  moins que 1.5) les valeurs pour trois fréquences se confondent et passent en diminuant vers un minimum au point critique pour reprendre ensuite une allure montante (fig. 5); même jeu pour l'éthylène (fig. 6) dans lequel nos résultats

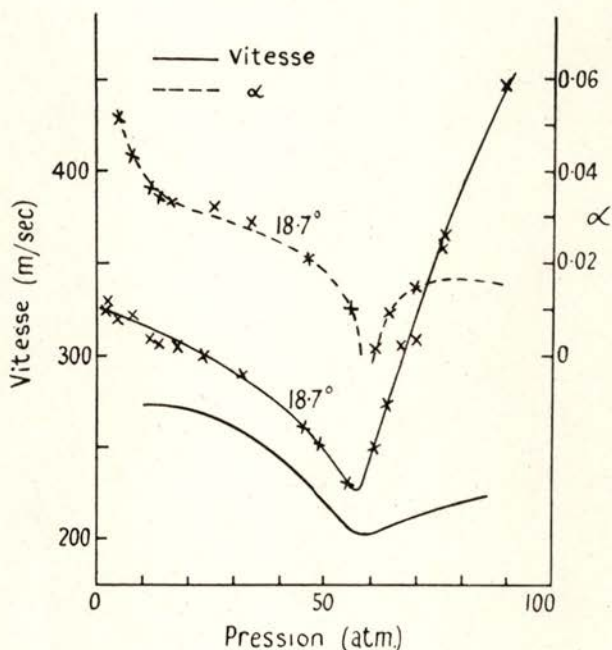


Fig. 6 - Vitesse et absorption dans l'éthylène.

ne touchent pas la région de dispersion signalée par NOMOTO, IKEDA, et KISHIMOTO [8] aux pressions ordinaires.

Pour chaque gaz nous avons calculé le produit  $pv$ , en nous servant des tables inédits de NEWITT, PAI et HUGGILL [9] pour  $\text{CO}_2$  et de DICK et HEDLEY [10] pour  $\text{C}_2\text{H}_4$ , indiquées sur les deux graphiques. Voici nos valeurs des ratios de vitesse adiabatique carré au vitesse isotherme carré calculées ainsi. Pour les pressions basses ces ratios doivent égaier les ratios des chaleurs spécifiques, mais en approchant du transition il faudrait une correction pour déviations de l'état de gaz parfait.

Gaz	Temp.	P	30	40	50	60	70	80 atm.
		1						
CO <sub>2</sub>	38° C.	1.29	1.30	1.32	1.33	1.35	1.45	1.66
CO <sub>2</sub>	31° C.	1.29	1.31	1.32	1.35	1.40	1.68	2.78
CO <sub>2</sub>	26.5° C.	1.29	1.32	1.34	1.37	1.50	2.68	5.45
C <sub>2</sub> H <sub>4</sub>	18.7° C.	1.25	1.30	1.31	1.35	1.43	2.15	3.30

L'absorption diminue rapidement en passant par la transition (fig. 7) mais à l'état même elle est difficile à préciser, comme remarque SCHNEIDER. Du côté gaz on trouve, comme pour la plupart des fluides

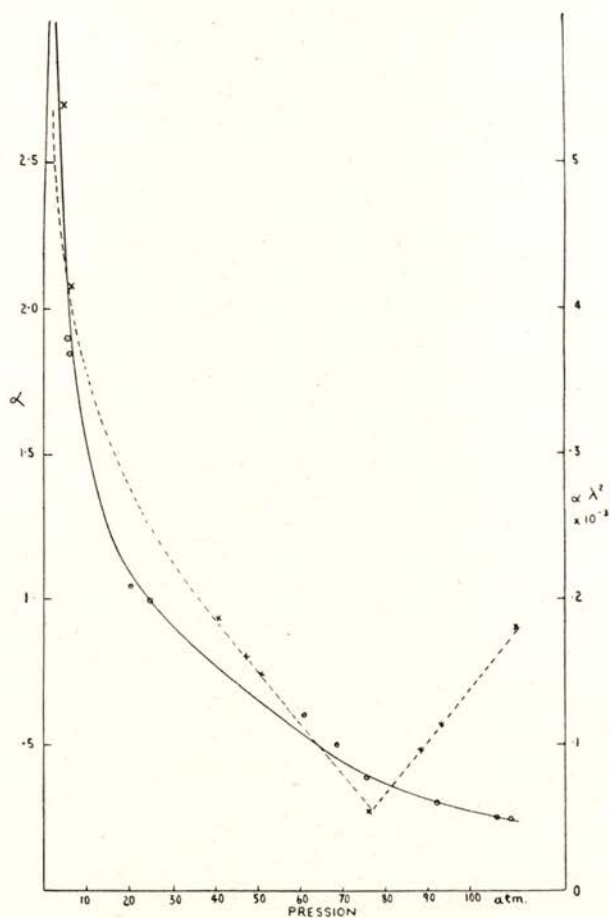


Fig. 7 —  $\alpha$  et  $\alpha\lambda^2$  dans l'acide carbonique en fonction de la pression.



$\alpha/f^2$  constante, mais du côté liquide, plutôt  $\alpha/f$  constante, (fig. 8)(\*). La loi dernière est caractéristique d'un système biphasale, contenant des éléments globales («striations») capables de diffuser l'énergie

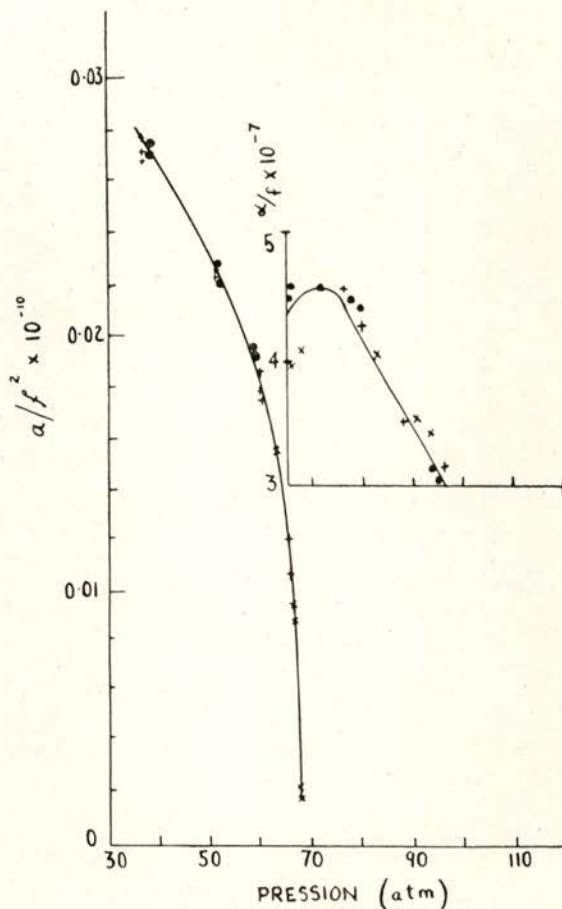


Fig. 8 —  $\alpha/f^2$  dans l'état gazeux et  $\alpha/f$  dans l'état liquide.

sonore, comme ROTH [11] a trouvé dans les alliages d'aluminium, ou des cristallites englobés dans la matrice fonctionnent de la même façon que le fluide troublé qu'on rencontre au point critique. (Aux pressions plus hautes encore, la relation ci-citée doit passer en celle qui carac-

(\*) On note le même jeu en optique (effet Mie) dans la domaine  $0.3 < \pi d/\lambda < 1$  i. e. extinction de lumière proportionnelle à  $\lambda^{-1}$  [12].

tère un liquide homogène; on est en train d'explorer ce domaine dans un autre appareil).

On peut aussi examiner les résultats pour l'absorption des ultrasons au point de vue de viscosité. La théorie de STOKES permet de prévoir le coefficient  $\alpha$  en forme  $2\pi f^2 \nu / 3V^3$ ,  $\nu$  étant le coefficient de viscosité cinématique,  $V$  la vitesse du son et  $f$  la fréquence. (En vérité  $\nu$  contient un terme thermodynamique que nous avons négligé). Nos expériences avec le viscosimètre (fig. 2) nous ont fourni des données numériques pour faire la comparaison entre  $\nu$  ultrasonore, déduit de l'équation de STOKES, et  $\nu$  hydrodynamique. La figure 9 en fait la com-

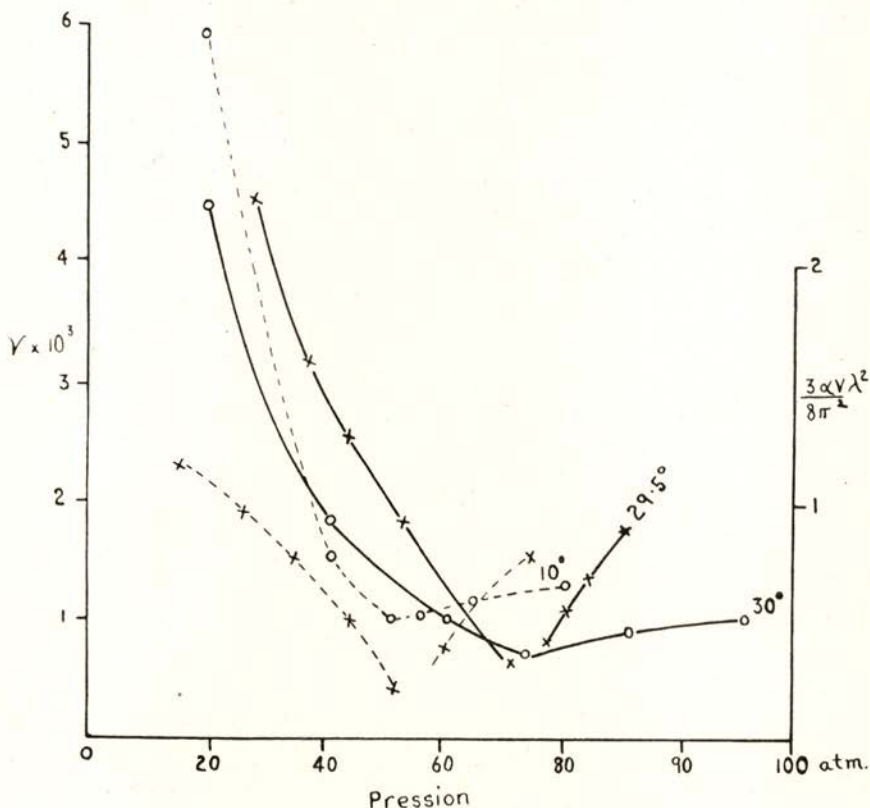


Fig. 9 — Viscosité dynamique (—) et ultrasonore (---).

paraison (sauf pour l'état critique même) d'où l'on dérive une viscosité mille fois plus grande que celle propre à une oscillation lente, quoique les courbes ont à peu près la même allure. Ceci est aussi vrai pour l'éthylène que nous avons étudié dans une recherche plus restreinte.

Touchant l'origine de cette absorption anormale, nous ne pouvons que dire que ce n'est pas question de relaxation thermique, vu qu'à haute pression la vitesse ne dépend pas de la fréquence (fig. 10). C'est

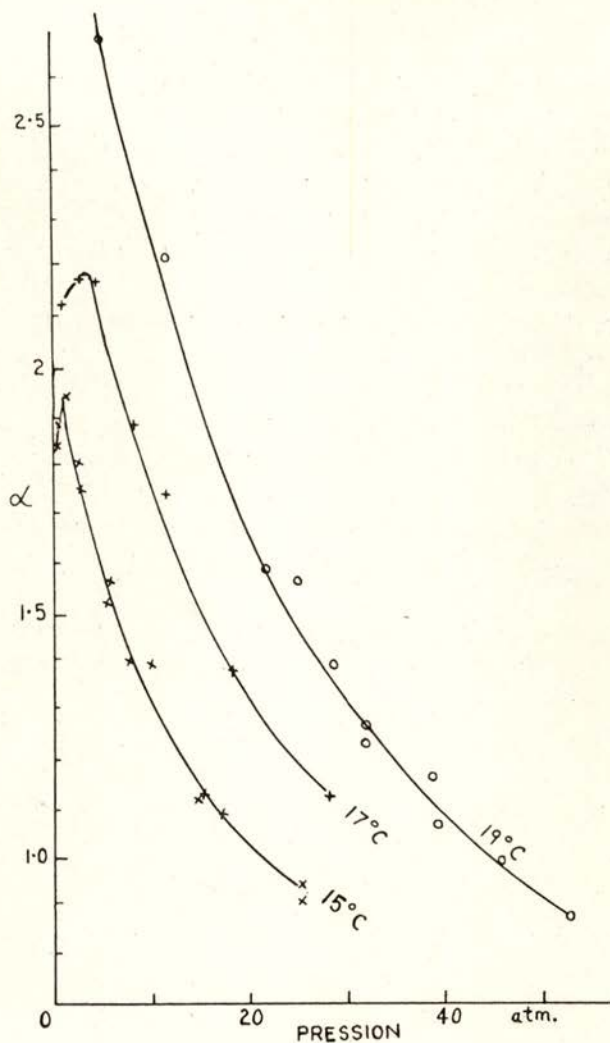


Fig. 10 — Absorption ( $\alpha$ ) dans l'acide carbonique en fonction de la pression.

plutôt une propriété tout-à-fait spéciale d'un fluide au voisinage de sa transition, rappelant un phénomène semblable dans la propagation des ultrasons à la transition entre helium gazeux et liquide qu'ont signalé récemment ATKINS et CHASE [13].

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] SWANSON, J. C., *J. Chem. Phys.* **2**, p. 689, 1934.
- [2] BIQUARD, P., *Rev. d'Acoust.* **8**, p. 130, 1939.
- [3] HERGET, C. M., *J. Chem. Phys.* **11**, p. 37, 1940.
- [4] NOURY, J. O., *C. R. Acad. Sci. Paris.* **223**, p. 377, 1946.
- [5] SCHNEIDER, W. G., *Canad. J. Chem.* **29**, p. 243, 1951.
- [6] ANDERSON, N. S. et DELSASSO, L. P., *J. Acoust. Soc. Amer.* **23**, p. 155, 1951.
- [7] HARDY, H. C., *J. Acoust. Soc. Amer.* **15**, p. 91, 1943.
- [8] NOMOTO, O., IKEDA, T. et KISHIMOTO, T., *Bull. Kobayashi Inst.*, **1**, p. 286, 1951.
- [9] NEWITT, D. M., PAI, M. U. et HUGGILL, J. A. W., *D. S. I. R. Mech. Eng. Res. Brd. Rep.* «*Thermodynamic Properties of Carbon Dioxide*».
- [10] DICK, W. F. L. et HEDLEY, A. G. M., *I. C. I. Alkali Div. Rep.* «*Thermodynamic Properties of Ethylene*».
- [11] ROTH, W., *J. App. Phys.* **19**, p. 901, 1948.
- [12] RICHARDSON, E. G., *Proc. Phys. Soc.* **55**, p. 48, 1943.
- [13] ATKINS, K. R. et CHASE, C. E., *Proc. Phys. Soc.* **A 64**, p. 826, 1951.

## ÉTUDE COMPARATIVE DES SPECTRES À RAYONS X OBTENUS PAR BOMBARDEMENT ÉLECTRONIQUE ET PAR FLUORESCENCE

par LÍDIA SALGUEIRO et J. GOMES FERREIRA (\*)

(Reçu le 19 Décembre 1953)

Introduction. Les spectres à rayons X peuvent être obtenus en bombardant par un faisceau d'ions ou d'électrons un anticathode quelconque (spectre direct), ou en excitant un diffuseur par des photons (spectre de fluorescence).

Le problème des intensités des raies des spectres  $L$  à rayons X obtenus par bombardement cathodique a été déjà abordé par nombreux auteurs [1] à [11]. Par contre, on connaît très peu ce qui concerne les intensités relatives des raies spectrales de fluorescence [12], [13], [14], probablement par le fait que l'obtention des spectres de fluorescence exige des temps d'exposition très longs.

On sait que le rapport des intensités de deux raies de fréquences  $\nu_{ab}$  et  $\nu_{rs}$ , d'un spectre à rayons X, correspondantes aux transitions  $a \rightarrow b$  et  $r \rightarrow s$ , peut être donné par l'expression :

$$\frac{I_{ab}}{I_{rs}} = \frac{\nu_{ab} n_a \Gamma_{ab}^R (\Gamma_r^R + \Gamma_r^A)}{\nu_{rs} n_r \Gamma_{rs}^R (\Gamma_a^R + \Gamma_a^A)}$$

$\Gamma_a^R, \Gamma_r^R$  et  $\Gamma_a^A, \Gamma_r^A$  sont respectivement les largeurs des états  $a$  et  $r$ , pour des transitions radiatives et Auger;  $\Gamma_{ab}^R$  et  $\Gamma_{rs}^R$ , sont les largeurs des raies  $a \rightarrow b$  et  $r \rightarrow s$ ,  $n_a$  et  $n_r$  sont les nombres d'atomes ionisés aux niveaux  $a$  et  $r$ .

D'autre part,

$$\Gamma_{ab}^R = \frac{h}{2\pi} p_{ab}^R \quad \text{et} \quad \Gamma_{rs}^R = \frac{h}{2\pi} p_{rs}^R,$$

où  $p_{ab}^R$  et  $p_{rs}^R$  sont les probabilités des transitions  $a \rightarrow b$  et  $r \rightarrow s$  avec émission de radiation.

\* Boursier de l'«Instituto de Alta Cultura».

Par conséquent, le rapport des intensités de deux raies du même niveau initial est

$$\frac{I_{ab}}{I_{ac}} = \frac{\nu_{ab} p_{ab}^R}{\nu_{ac} p_{ac}^R}$$

Lorsque les fréquences des raies sont peu différentes on a :

$$\frac{I_{ab}}{I_{ac}} = \frac{p_{ab}^R}{p_{ac}^R}$$

On voit, par conséquent, que le rapport des intensités de deux raies de fréquences peu différentes, est indépendant des transitions Auger et dépend exclusivement des probabilités de transition.

On sait que ces probabilités dépendent des facteurs intra-atomiques et extra-atomiques. Les premiers agissent de la même façon dans les deux processus d'excitation mais il n'en est pas ainsi pour les seconds, c'est-à-dire, ils ne sont pas les mêmes lorsqu'on excite un spectre par bombardement cathodique ou par fluorescence. En effet, les atomes d'un anticathode qui se trouvent dans un état métastable, ou, d'une façon générale, dans un état de vie moyenne longue, peuvent être frappés par les électrons du faisceau excitant, avant même de se réaliser la transition électronique correspondante, et alors, celle-ci est irréalisable.

Les électrons obtenus par effet photoélectrique des rayons X dans l'anticathode, agissent d'une façon semblable aux électrons du faisceau cathodique bombardeant.

Or, dans les cas où il n'y a pas d'anticathode mais plutôt diffuseur (spectres de fluorescence) il n'y a pas de faisceau cathodique excitateur et l'effet photoélectrique dans le diffuseur est beaucoup moins intense que dans l'anticathode (cas précédent), parce que la densité de radiation est, en général, beaucoup plus grande dans l'anticathode que dans le diffuseur. Par conséquent, on peut penser, que pendant la vie moyenne d'un état de grande vie moyenne, la probabilité de choc entre électrons et atomes est plus petite dans les spectres de fluorescence.

Enfin, on peut dire, que toutes les conditions physiques agissent de tel façon, qu'on peut s'attendre, que les raies qui correspondent à des transitions de grande vie moyenne seraient plus intenses dans les spectres de fluorescence que dans les spectres de rayons X obtenus par bombardement cathodique.

Comme la vie moyenne d'un niveau dont la largeur est  $\Gamma_a$  est  $\frac{1}{2\pi\Gamma_a}$ , les raies moins larges doivent se présenter dans les spectres

de fluorescence avec une intensité plus grande que dans les spectres de bombardement cathodique.

Il s'agirait, dans le domaine des spectres de rayons X, d'un fait semblable à celui bien connu des nébuleuses [15] où on observe des raies interdites par les principes de sélection, correspondant à des atomes dans des états métastables.

Parmi les travaux expérimentaux réalisés sur les spectres de fluorescence seul HIRST et ALEXANDER ont abordé le problème des intensités des raies appartenant à un même niveau initialement ionisé, dans les spectres de bombardement cathodique et de fluorescence.

Ces auteurs ont déterminé les intensités relatives de deux raies dans les spectres du tungstène, thalium et uranium, pour des valeurs différentes de la tension de fonctionnement du tube à rayons X ou de la fréquence de la radiation excitatrice.

Dans leur travail, les auteurs, ont fait une étude comparative des rapports des intensités des raies de même niveau initialement ionisé  $\alpha_2/\alpha_1$ ,  $\beta_2/\alpha_2$ ,  $\beta_2/\alpha_1$  et ils n'ont pas rencontré des différences, dans les spectres obtenus par les deux processus d'excitation.

Nous nous proposons alors d'étudier les rapports  $\alpha_1 : \alpha_2 : l$  (niveau initial  $L_{III}$ ),  $\beta_5/\beta_6$  (niveau initial  $L_{III}$ ) et  $\beta_3/\beta_4$  (niveau initial  $L_I$ ). Les raies  $\beta_6$  et  $\beta_5$  ont des largeurs très différentes et la raie  $l$  est beaucoup plus large que les raies  $\alpha_1$  et  $\alpha_2$ .

Dispositif expérimental. Pour obtenir les spectres excités par bombardement cathodique (spectres directs), nous avons employé une installation déjà décrite [16], dont le tube à rayons X, du type SHEARER était d'anticathode démontable.

Les spectrogrammes ont été obtenus sous la tension de 35 kV, partiellement rectifiée par une soupape, et le courant de 1,0 mA, conditions dans lesquelles le régime de fonctionnement du tube était le plus stable. Dans ces conditions on obtenait des spectres dans des temps de pose de l'ordre d'une heure. Il aurait été indiqué d'employer un tube à rayons X à très forte intensité (de l'ordre de 1 A et anticathode rotative), mais nous n'avons pas pu disposer d'un tel tube.

Pour obtenir les spectres de fluorescence, nous avons employé une installation à rayons X, Philips, modèle industriel, dont le tube du type COOLIDGE était muni d'un anticathode de cuivre. Ce tube était refroidi par un courant d'eau, contrôlé automatiquement, ce qui nous a permis d'avoir l'installation en marche pendant plusieurs heures, sans avoir besoin de la couper. Ces spectres ont été obtenus sous une tension de 35 kV, rectifiée, et un courant de 15 mA. Un courant de cette intensité

nous a permis de réduire considérablement les temps d'exposition ; ceux-ci furent, au maximum, d'environ 100 h. La radiation excitatrice était celle qui correspondait au spectre continu du cuivre ; en effet, aux raies du spectre K du cuivre, correspondent des énergies inférieures à l'énergie d'extraction des électrons du niveau L, des éléments employés comme diffuseurs (plomb et bismuth).

En outre, la tension employée était toujours insuffisante pour produire effet photoélectrique K dans les diffuseurs. Enfin, nous pouvons dire, que le faisceau heterocromatique excitateur, se composait de radiations de fréquences  $f_i$  tels que :  $W_L < hf_i < W_K$ .

Les positions relatives de la source de rayons X, du diffuseur et du spectrographe, dans le dispositif expérimental pour obtenir les spectres de fluorescence, sont indiquées dans le schéma suivant.

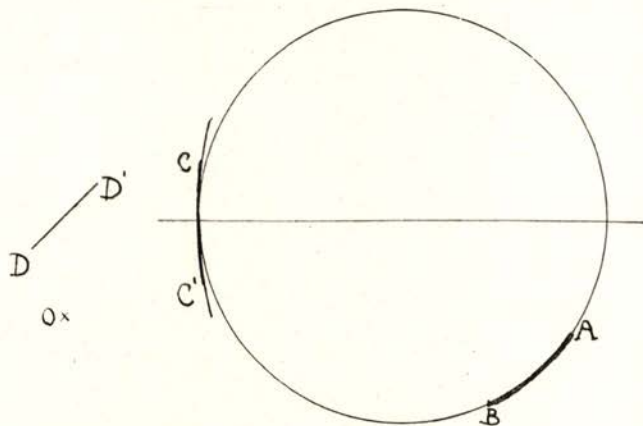


Fig. 1 —  $O \rightarrow$  source à rayons X ;  $DD' \rightarrow$  diffuseur ;  $CC' \rightarrow$  cristal ;  $AB \rightarrow$  chassis

Nous avons utilisé un spectrographe CAUCHOIS (méthode du cristal courbé), de 20 cm de rayon, muni d'un cristal de mica. Comme détecteur nous avons employé film Ilfex à rayons X sans écran renforceur.

Presque tous les clichés ont été développés à une température voisine de  $4^{\circ}\text{C}$  ; on réussit de cette façon, à avoir une plus grande finesse du grain du film et aussi une réduction sensible de son voile général. Les temps de révélation étaient compris entre 45 et 60 minutes selon la température du bain développeur.

Résultats. Les intensités des raies de chaque spectrogramme ont été déterminées utilisant un microphotomètre enregistreur BOUTY, de la «Junta das Missões e Investigações Coloniais» et, pour une plus grande précision, le microdensitomètre enregistreur VASSY, du Laboratoire



Curie. Dans ce dernier microphotomètre on obtient directement l'enregistrement de la courbe de variation de la densité optique du cliché en fonction de la fréquence.

Nous avons vérifié que dans nos clichés il y avait proportionnalité entre les densités et les doses ; ainsi, si nous représentons par  $A$  et  $A'$  les aires des surfaces définies par l'axe des abscisses et les courbes correspondantes à deux raies quelconques, la relation  $A/A'$  nous donne l'intensité relative d'une des raies par rapport à l'autre.

Dans le microphotomètre BOUTY, pour obtenir la courbe de variation de la densité optique en fonction de la fréquence, on a besoin de faire sur le même microphotogramme l'enregistrement correspondant aux raies du spectrogramme et au coin microphotométrique dans les limites de noircissement nécessaires aux déterminations. Ce dernier microphotomètre est donc moins rigoureux que le précédent et ne donne pas une grande précision pour les raies faibles.

Dans les tables I et II nous montrons les résultats obtenus par les deux méthodes d'excitation :

Table I

Raies	Niveau initial	Plomb		Bismuth	
		I	II	I	II
$\alpha_1$	$L_{III}$	100	100	100	100
$\alpha_2$	$L_{III}$	12	9,9	13,5	12
$l$	$L_{III}$	6,8	6,3	6,2	5,7

Table II

Raies	Niveau initial	Plomb		Bismuth	
		I	II	I	II
$\beta_5$	$L_{III}$	4,8	5,5	5,6	5,8
$\beta_3$	$L_I$	6,5	8,1	6,7	7,7
$\beta_4$	$L_I$	5,0	6,5	4,4	5,8
$\beta_6$	$L_{III}$	3,3	4,3	3,5	4,3
$\beta_{1,2}$	$L_{II,III}$	100	100	100	100

I — Intensités correspondantes au spectre excité par bombardement cathodique.

II — Intensités des raies excités par photons.

La dispersion du spectrographe ne nous permettait pas séparer les raies  $\beta_1$  et  $\beta_2$  du bismuth.

Nous indiquons dans la table III les rapports des intensités des raies du même niveau initial obtenus à partir des tables I et II.

Table III

	Plomb		Bismuth	
	I	II	I	II
$\alpha_1/\alpha_2$	8,3	10,0	7,4	8,3
$\alpha_1/l$	14,7	15,8	16,1	17,5
$\beta_3/\beta_4$	1,3	1,2	1,5	1,3
$\beta_5/\beta_6$	1,4	1,3	1,7	1,4

Dans les tables précédentes on peut voir qu'il y a une petite différence dans les rapports des intensités; cependant cette différence ne nous permet pas d'assurer qu'il existe une variation des intensités des raies appartenant à un même niveau initial, dans les deux processus d'excitation. En effet, il y a toujours une certaine incertitude dans la détermination de l'allure de la courbe d'enregistrement microphotométrique d'une raie quelconque, ce qui peut être la cause des différences dans les intensités des raies étudiées. Quoique les probabilités de transition soient sûrement différentes dans les deux processus d'excitation et dans les conditions expérimentales de notre travail, nous n'avons pas observé, aussi, des raies interdites par les principes de sélection, dans nos clichés de fluorescence.

Ceci nous montre que pour détecter une variation dans les intensités des raies on aurait besoin, pour les spectres de fluorescence, des conditions expérimentales, telles que les collisions entre les électrons et les atomes fussent encore moins nombreuses (dans notre dispositif expérimental les temps d'exposition seraient alors prohibitifs), où travailler avec un tube à intensité électronique 100 à 1000 fois supérieure à celle que nous avons utilisé. C'est-à-dire, tandis que le rapport entre les temps de pose pour l'obtention de spectres par les deux méthodes a été de l'ordre de 100 on devrait chercher à augmenter ce rapport jusqu'à  $10^4$  ou  $10^5$ .



Fig. 2 — Spectrogramme des raies  $L$  du bismuth (spectre de fluorescence).

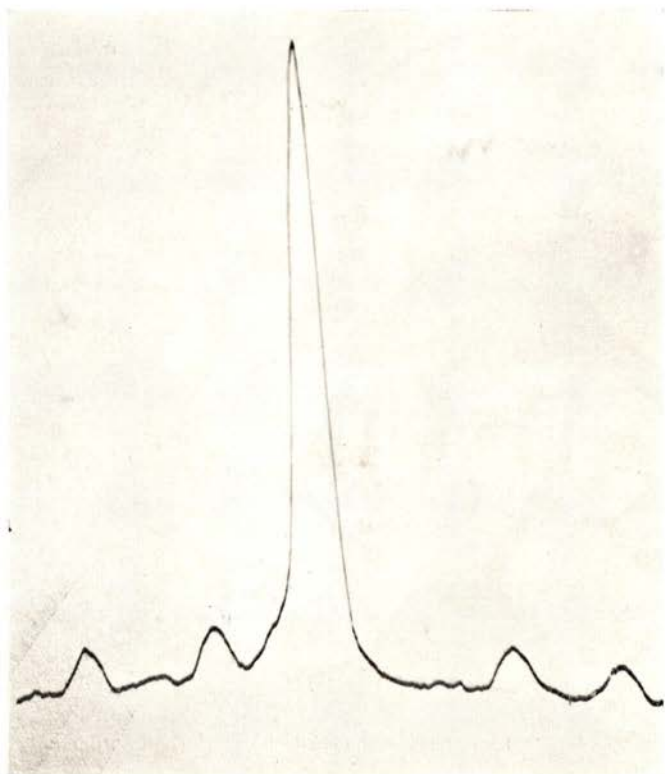


Fig. 3 — Microphotogramme des raies  $L\beta$  du plomb (bombardement cathodique).



Fig. 4 — Spectrogramme des raies  $L$  du bismuth, obtenu par bombardement cathodique.

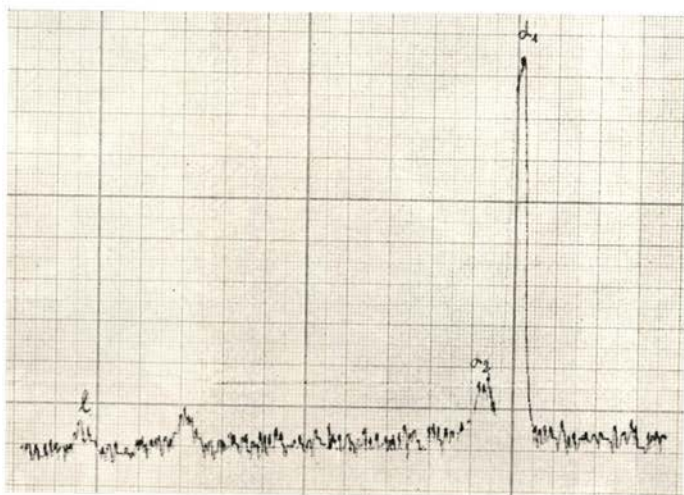


Fig. 5—Microphotogramme des raies  $\alpha_1, \alpha_2, l$  du bismuth (bombardement cathodique).

## BIBLIOGRAPHIE

- [ 1 ] DUANE et R. A. PATTERSON, *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, **6**, 509, 1920.
- [ 2 ] S. K. ALLISON et H. ARMSTRONG, *Phys. Rev. (2)*, **26**, 714, 1925.
- [ 3 ] A. JÖNSON, *Z. Physik*, **36**, 426, 1926.
- [ 4 ] Y. NISHINA et B. B. RAY *Nature*, **117**, 120, 1926.
- [ 5 ] S. K. ALLISON, *Phys. Rev.* **31**, 916, 1928.
- [ 6 ] S. K. ALLISON, *Phys. Rev.* **32**, 1, 1928.
- [ 7 ] V. HICKS, *Phys. Rev.* **36**, 1273, 1930.
- [ 8 ] V. J. ANDREW, *Phys. Rev.* **42**, 591, 1932.
- [ 9 ] T. H. WILLIAMS, *Phys. Rev.* **45**, 71, 1934.
- [ 10 ] K. LAGEN, *Physica*, **6**, 27, 1939.
- [ 11 ] Y. COOPER, *Phys. Rev.* **61**, 234, 1942.
- [ 12 ] H. W. SKINNER, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **22**, 379, 1924.
- [ 13 ] HEVESY and ALEXANDER, *Nature*, **129**, 315, 1932.
- [ 14 ] HIRST and ALEXANDER, *Phil. Mag.* **19**, 918, 1935.
- [ 15 ] H. S. JONES, *Endeavour*, *IV*, **13**, 35, 1945.
- [ 16 ] M. VALADARES et F. MENDES, *C. R. Acad. Sc. Paris*, **226**, 1187, 1948.



## LES AMPLIFICATEURS À LARGE BANDE, EN PHYSIQUE NUCLEAIRE

par A. ROUMEGOUS

*Laboratoire Curie — Institut du Radium — Paris*

(Reçu Mai 1954)

Les impulsions électriques recueillies à la sortie des détecteurs de particules ont en général une amplitude trop faible pour être analysées directement; il est nécessaire de les amplifier, avant de rechercher à utiliser les informations qu'elles transportent: C'est là le rôle des amplificateurs à large bande.

Nous décrirons les amplificateurs ordinaires et les corrections que l'on y apporte, puis les amplificateurs à contre-réaction qui ont une meilleure stabilité du gain, enfin nous donnerons un exemple d'amplificateurs à constantes distribuées, qui feront l'objet d'une publication ultérieure plus détaillée.

Le problème se présente dans toute sa généralité sous la forme suivante:

Si une fonction  $e_i(t)$  (figure 1):

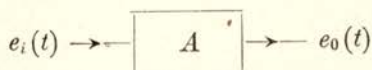


Fig. 1

est introduite à l'entrée de l'amplificateur, comment disposer ses éléments pour avoir, à chaque instant, la relation:

$$\boxed{e_o(t) = A e_i(t)}$$

$e_i(t)$  = Tension entrée  
 $A$  = Fonction de transfert du gain  
 $e_o(t)$  = Tension de sortie

Les fonctions  $e_i(t)$  et  $e_o(t)$  devant être affines,

$$A = \text{constante}$$

Toutefois l'expérience montre que ces conditions idéales ne sont pas réalisables, si bien qu'on est amené à étudier l'amplificateur en fonction des caractéristiques de la tension d'entrée que l'on veut conserver.

### I — Caractéristiques importantes de la fonction d'entrée :

La fonction  $e_i(t)$  dépend de l'énergie de la particule qui l'a créée, et d'autre part du système détecteur lui-même ; mais elle se présente toujours sous la forme d'une impulsion (figure 2). Deux grandeurs sont

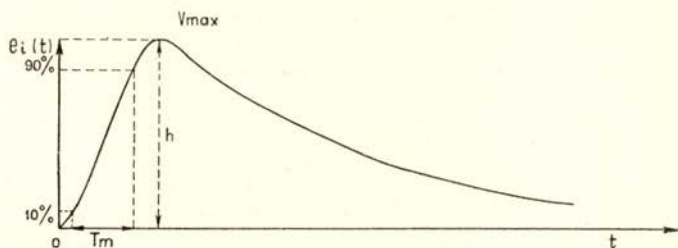


Fig. 2

intéressantes selon que l'on s'attachera à faire de la discrimination d'énergie ou des coïncidences. Ce sont :

a) La grandeur  $h = V_{\max}$ , qui est proportionnelle à l'énergie de la particule. Deux impulsions devant être séparées par un temps  $t$  connu, pour éviter le phénomène « d'empilement », il y a intérêt à diminuer ce temps de descente, comme le montre la figure 3, courbe  $b$ . En effet une 2<sup>e</sup> impulsion, arrivant au temps  $t_1$ , verrait son élévation  $h_1$  complètement faussée : courbe  $c$ .

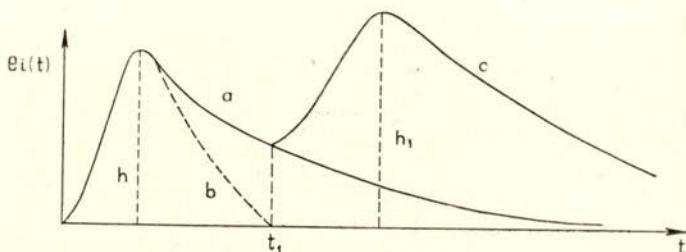


Fig. 3

b) Le temps de montée  $T_m$ , défini comme étant le temps mis par la tension  $e_i(t)$  pour passer de 10% à 90% de sa valeur. Cette grandeur doit être respectée, car après formation triangulaire de l'impulsion, figure 4, sa largeur à la base sera :

$$\tau \neq 2 T_m$$

$\tau$  interviendra dans l'expression du pouvoir de résolution des systèmes à coïncidences.



Si l'on développait en intégrale de FOURIER  $e_i(t)$  on aurait :

$$e_i(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} G(j\omega) e^{j\omega t} d\omega$$

avec

$$G(j\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} e_i(\tau) e^{-j\omega\tau} d\tau.$$

Le spectre de fréquence ainsi obtenu, s'étendrait jusqu'à l'infini.

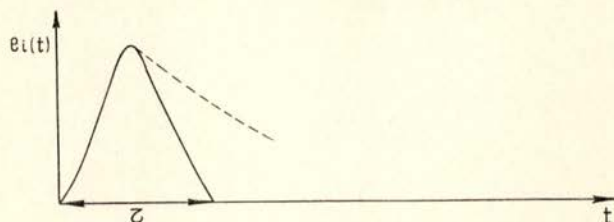


Fig. 4

Nous allons montrer que tout amplificateur est incapable de passer des fréquences supérieures à une fréquence limite  $f_0$ . Ceci signifie qu'à partir de  $f_0$ , on néglige le reste de l'intégrale. Une erreur systématique est ainsi introduite qui doit être rendue négligeable. C'est là le but de l'étude de la fonction de transfert  $A$ .

## II — Connaissance de la fonction de transfert $A$ . (référence [1]).

a) Relation bande passante-fréquence de coupure :

Réalisons le montage électrique suivant : figure 5. Supposons la tension  $e_i(t)$  sinusoïdale

$$e_i(t) = E_i \text{ Sin } \omega t$$

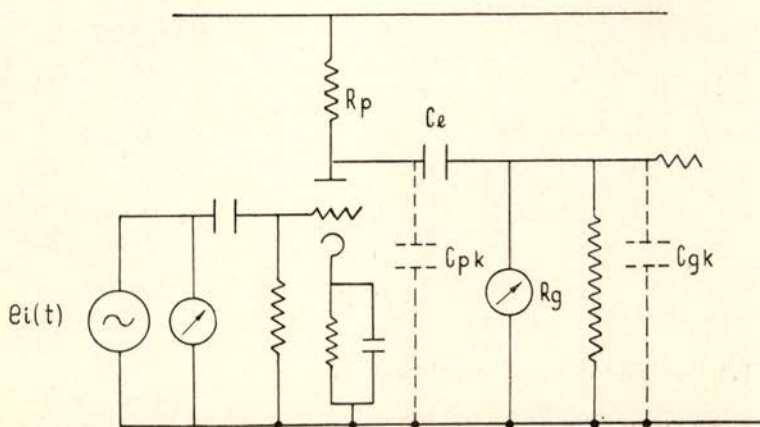


Fig. 5

la tension de sortie aura la forme :

$$e_0(t) = A E_i \text{Sin} (\omega t + \varphi)$$

Faisons varier  $f = \frac{\omega}{2\pi}$  et traçons les courbes

$$A(f) = \left| \frac{e_0(t)}{e_i(t)} \right| \quad \varphi = g(f).$$

Nous obtenons les figures 6 et 7

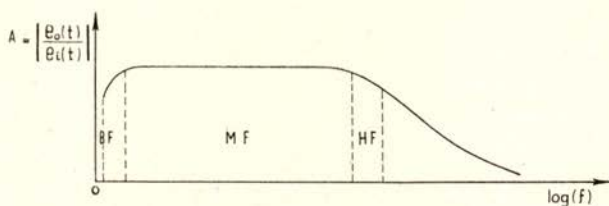


Fig. 6

On constate que la fonction de transfert  $A$  n'est pas constante, de même  $\varphi = g(f)$ . Ces courbes peuvent être séparées en trois régions : région des basses fréquences, des moyennes fréquences, et des hautes fréquences.

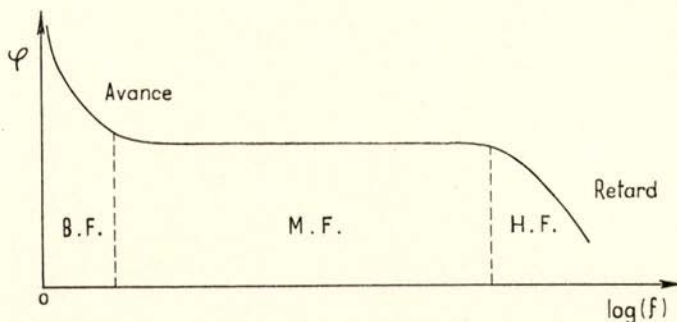


Fig. 7

### 1.°) Région des basses fréquences :

Dans cette région les capacités parasites  $C_g k$  et  $C_p k$  n'ont pas d'influence car elles sont trop faibles ( $C_i \neq 5$  à  $15 \text{ pF}$ ). On est ramené

au schéma ci-dessous (figure 8 a) dont l'équivalent électrique est donné par les figures 8 b et 8 c.

$$A = \left| \frac{e_o(t)}{e_i(t)} \right|$$

$$A = \frac{R_g}{R \left[ 1 + \frac{1}{j C_l \omega R} \right]} = \frac{1}{R \left[ 1 - j \frac{F_0}{F} \right]}$$

avec :

$$\begin{cases} R = R_g + \frac{\rho R_p}{\rho + R_p} \neq R_g \\ F_0 = \frac{1}{2 \pi R C_l} \end{cases}$$

Le module de cette fonction imaginaire représente  $A$  :

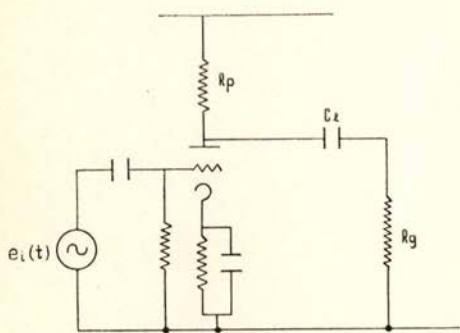


Fig. 8 (a)

Posons  $\frac{F_0}{F} = a$

$$A = \frac{1}{1 - ja} = \frac{1 + ja}{2}$$

$$|A| = \frac{\sqrt{1 + a^2}}{2}$$

Si  $a = 1$ , c'est à dire

$$F = F_0 = \frac{1}{2 \pi R C_l}$$

$$|A_0| = \frac{1}{\sqrt{2}} = 0,7.$$

La valeur  $A_0$  de la fonction de transfert, pour  $F = F_0$ , est égale à 0,7 fois la valeur maximum : soit une atténuation de 3 décibels.

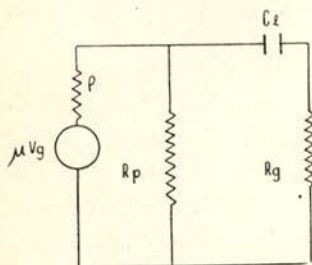


Fig. 8 (b)

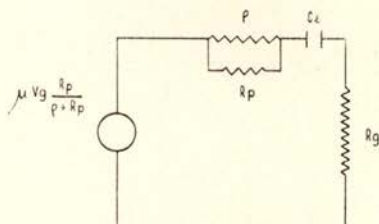


Fig. 8 (c)

DÉFINITION : La fréquence  $F_0 = \frac{1}{2 \pi R C_l}$ , pour laquelle l'atténuation est de 3 db, s'appelle la fréquence de coupure inférieure.

La fonction  $\varphi = g(f)$  devient :  $\text{tg } \varphi = \frac{F_0}{F} = \frac{1}{2 \pi R C_l}$ .

On voit qu'il existe une avance de phase  $\varphi$  aux basses fréquences.

2.°) *Région des moyennes fréquences :*

Les capacités parasites  $C_{gk}$  et  $C_{pk}$  sont encore négligeables et la capacité de liaison  $C_l$  le devient aussi. Le schéma devient (figures 9 a et 9 b):

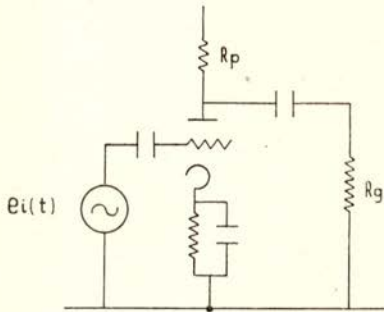


Fig. 9 (a)

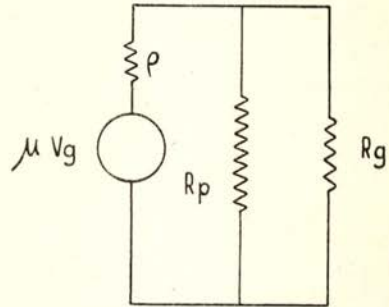


Fig. 9 (b)

Posons

$$R = \frac{R_p R_g}{R_p + R_g}$$

il vient :

$$|A| = \frac{\mu R}{\varphi + R}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{X}{R} = 0.$$

L'impédance de transfert et la fonction phase sont constantes.

3.°) *Région des hautes fréquences :*

Les capacités parasites  $C_{gk}$  et  $C_{pk}$  interviennent,  $C_l$  est négligeable. Nous avons le schéma ci-contre (figure 10(a) dont l'équivalent électrique est donné par les figures 10(b) et 10(c).

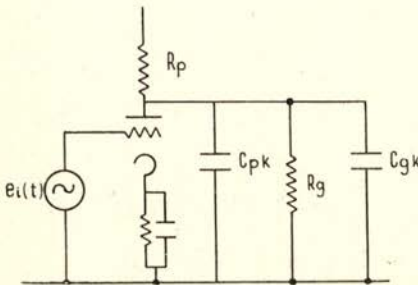


Fig. 10 (a)

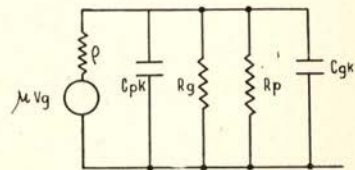


Fig. 10 (b)

$$R = \frac{\varphi R_p R_g}{\varphi R_p + \varphi R_g + R_p R_g} \quad C_t = C = C_g k + C_p k.$$

Posons :

$$F_1 = \frac{1}{2\pi RC}$$

et calculons  $A(f)$  et  $\varphi = g(f)$

$$A = \frac{SR}{1 + jRC\omega} = \frac{SR}{j \times 2\pi FRC} \quad S = \text{pente du tube.}$$

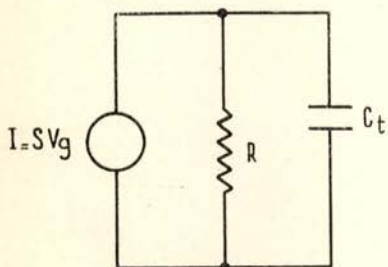


Fig. 10 (c)

$$A = SR \times \frac{1}{1 + j \frac{F}{F_1}}$$

Si  $\frac{F}{F_1} = a$

$$A = A_{MF} \times \frac{1}{1 + ja}$$

car :  $A_{MF} = SR.$

Si  $A = A_{MF} \times \frac{1}{\sqrt{2}}$

$a = 1$  c'est à dire  $F = F_1.$

DÉFINITION : la fréquence  $F_1$  pour laquelle l'atténuation est de 3 décibels s'appelle la fréquence de coupure supérieure.

DÉFINITION : La gamme de fréquences comprises entre  $F_1$  et  $F_0$  s'appelle la bande passante :

$$\Delta F = F_1 - F_0$$

Calculons  $\varphi = g(f)$  :

$$\text{tg } \varphi = -RC\omega$$

On voit qu'il existe un retard de phase pour les hautes fréquences.

La relation essentielle existant entre le gain  $A$  et la fréquence de coupure  $F_1$  est la suivante :

$$\begin{aligned} A_{MF} &= SR & S &= \text{pente} \\ 2\pi F_1 RC &= 1 & R &= \text{charge} \end{aligned}$$

d'où

$$F_1 \times A = \frac{S}{2\pi C}$$

a)  $\frac{S}{C}$  se nomme «Facteur de mérite de la lampe»

b) Pour  $A = 1$ ,  $F_1 = \frac{S}{2\pi C}$  c'est la fréquence limite au-dessus

de laquelle la lampe n'amplifie plus. En unités pratiques la formule devient

$$F = 160 \frac{S}{C} \quad \begin{cases} F \text{ en } MC \\ S \text{ en milli/Volt} \\ C \text{ en } pF \end{cases}$$

Exemple :

$I$ (milliamp)	$S$ (milli/Volt.)	$C_p k$ (pF)	$C_p k$ (pF)	$T_m$ ( $10^{-9}$ sec.)	$F_1$ (MC)	
7	5,1	4	2,8	3,75	93	6 A K 5
10	9,4	9,5	4,5	3,4	102	E F 4 2

Exemple :

$$F_1 = 3,3 MC ; S = 5 \text{ milli/volt} ; C_i = 7 pF$$

$$G \neq 40$$

Remarque : On voit qu'il existe un compromis entre  $A$  et  $F_1$  :

a) Grand gain et faible bande passante

b) Petit gain et grande » »

b) Relation temps de montée-fréquence de coupure :

Supposons que nous appliquons à l'entrée du montage précédent (figure 5) la fonction marche unité :

$$e_i(t) = \gamma(t) \quad \begin{cases} \gamma(t) = 1 & \text{pour } t \geq 0 \\ \gamma(t) = 0 & \text{» } t \leq 0 \end{cases}$$

On peut l'écrire sous la forme :

$$e_i(t) = \gamma(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega t}{\omega} d\omega$$

L'expérience montre :

- 1.°) que l'amplificateur ne laisse passer les fréquences que jusqu'à  $F_0$  ;
- 2.°) qu'il répond avec un temps fini  $\tau$  .

La tension de sortie s'exprimera par :

$$e_0(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_1} \frac{\text{Sin } \omega(t - \tau)}{\omega} d\omega$$

La courbe  $e_0(t)$  (fig. 11) présente un point d'inflexion au point  $t = \tau$

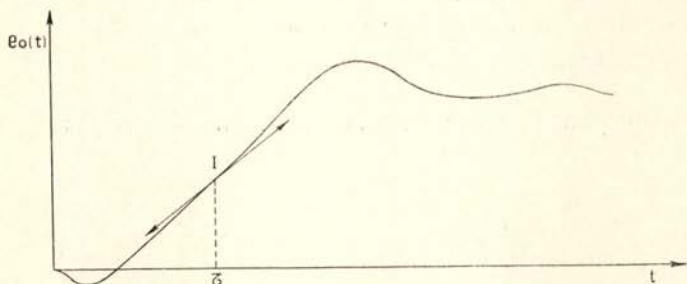


Fig. 11

$$\frac{d[e_0(t)]}{dt} = \frac{1}{\pi} \int_0^{\omega_1} \text{Cos } \omega(t - \tau) d\omega = \frac{1}{\pi} \left[ \frac{\text{Sin } \omega(t - \tau)}{t - \tau} \right]_0^{\omega_1}$$

$$\left[ \frac{d e_0(t)}{d t} \right]_{t=\tau} = \frac{\omega_1}{\pi}$$

Le temps de montée peut être défini comme l'inverse de la tangente au point  $I$

$$T_m = \frac{\pi}{\omega_1} = \frac{1}{2 F_1}$$

$$T_m = \frac{1}{2 F_1}$$

En pratique on emploie la formule

$$T_m = \frac{1}{3 F_1}$$

car la coupure dans le spectre de fréquences n'est pas brusque.

*Exemple :* Pour respecter le temps de montée d'une impulsion qui passe de 10 à 90%<sub>0</sub> de son amplitude en  $10^{-8}$  seconde, on devra

introduire un amplificateur qui ne coupe que les fréquences supérieures à :

$$F_1 = \frac{1}{3 \times 10^{-8}} = 33 \text{ MC.}$$

c) Corrections hautes [fréquences améliorant la bande passante (référence [4])]

Pour un gain donné, on cherche en général à obtenir la fréquence de coupure la plus élevée possible.

Introduisons une self en série avec la résistance de plaque : on forme ainsi un circuit oscillant figure 12(a) dont l'équivalent électrique est donné par la figure 12(b).

En employant la transformation de LAPLACE il vient :

$$e_0(p) = \frac{I(p)}{p} \times \frac{1}{Cp + \frac{1}{\frac{R}{L}p + \frac{1}{LC}}} = \frac{I(p)}{L C p \left( p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC} \right)}$$

Soient  $p_1$  et  $p_2$  les racines de  $p^2 + \frac{R}{L} p + \frac{1}{LC}$

données par

$$p = -\frac{R}{2L} \pm \sqrt{\frac{R^2}{4L^2} - \frac{1}{LC}}$$

il vient :

$$e_0(p) = \frac{I(p)}{p L C (p - p_1)(p - p_2)}$$

posons  $\alpha = \frac{L}{R^2 C}$

sera

$$p = -\frac{1}{2\alpha CR} (1 \pm \sqrt{1 - 4\alpha})$$

et en revenant à la fonction  $e_0(t)$  on a : figure (13)

$$e_0(t) = e_i(t) \left[ 1 + \frac{1}{p_1 - p_2} e^{p_1 t} e^{p_2 t} + p_2 e^{p_1 t} - p_1 e^{p_2 t} \right]$$

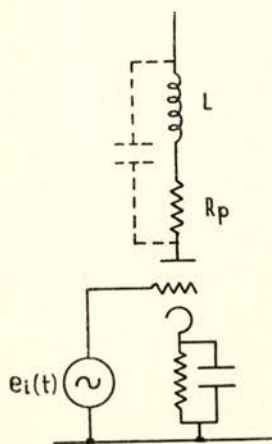


Fig. 12 (a)

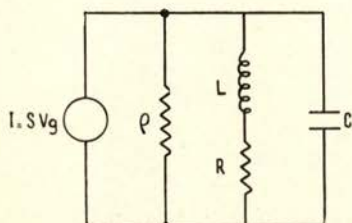


Fig. 12 (b)



La correction permise sans apparition « d'overshoot » correspond a :

$$\alpha = 0,25.$$

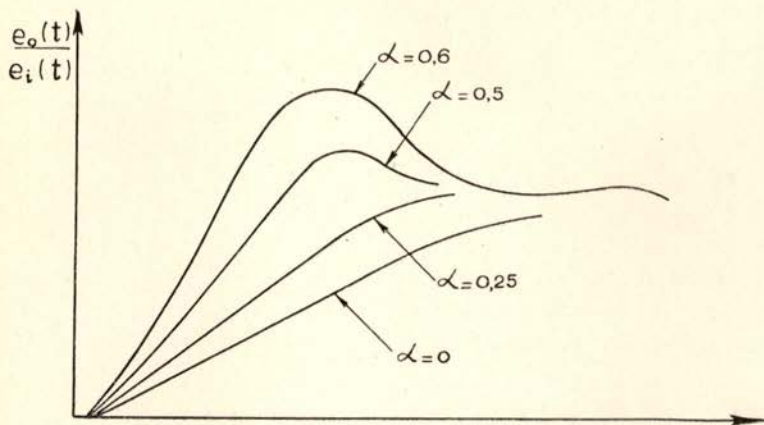


Fig. 13

Le temps de montée  $T_m$  de l'amplificateur ordinaire qui, exprimé en fonction de  $RC$ , est :

$$T_{m_0} = 2,2 RC \text{ devient } T_m = 1,65 RC$$

$$T_m = T_{m_0} \times 0,75$$

Le temps de montée est amélioré, la bande passante élargie. On peut se représenter cette correction sous la forme suivante.

Le circuit possède sa fréquence de résonance dans la zone de l'atténuation et la renforce : figure (14)

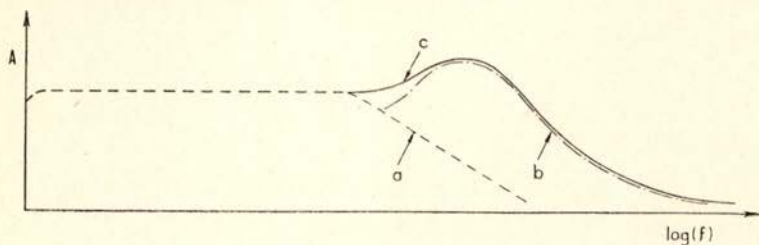


Fig. 14

- a - Réponse sans correction
- b - » du circuit oscillant
- c - » totale

d) Correction basses [réquences évitant l'overshoot (référence [6])

La réponse de  $n$  circuits différentiateurs (Vacuum tubes Amplifier) à une fonction marche unité  $\gamma(t)$  est:

$$e_0(t) = \sum_1^n A_i e^{-\frac{t}{\tau_i}}$$

avec

$$\frac{1}{A_1} = \prod_{i=1}^n \left[ 1 - \frac{\tau_i}{\tau_n} \right]$$

Supposons  $\tau_1 < \tau_2 < \tau_3 \dots < \tau_n$ .

La réponse est une somme exponentielle dont les coefficients  $A_i$  sont de signe inverse: figure (15) (Deux exponentielles seulement sont représentées).

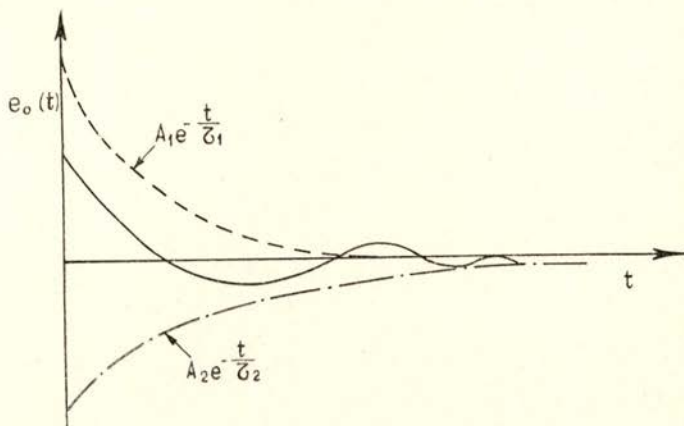


Fig. 15

On voit que  $e_0(t)$  présente des oscillations qui sont indésirables.

Prenons une des constantes de temps, soit  $\tau_{n+1}$ , beaucoup plus petite que les autres  $\tau_{n+1} \ll \tau_1 < \tau_2 \dots < \tau_n$ .

$$A_{n+1} = A_i \frac{\tau_{n+1}}{\tau_i}$$

Si  $\tau_1$  est la plus courte des  $N$  constantes de temps tous les coefficients  $A$ , seront multipliés par un nombre  $< \frac{\tau_{n+1}}{\tau_i}$  et les overshoots réduits dans le rapport  $\frac{\tau_{n+1}}{\tau_i}$ .

e) Amplificateurs à plusieurs étages : (référence [3]).

La formule donnant  $A$  aux hautes fréquences s'écrit :

$$A_{HF} = SR \times \frac{1}{1 + jRC\omega} = |A_{MF}| \times \frac{1}{1 + ja} \quad \text{avec } a = RC\omega.$$

Si nous avons  $n$  étages identiques

d'où 
$$A \text{ total} = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n$$

$$A \text{ total} = |A_{MF}|^n \times \left( \frac{1}{1 + ja} \right)^n$$

$$\boxed{|A| \text{ total} = |A_{MF}|^n \times \left( \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \right)^n}$$

La nouvelle bande passante sera définie pour  $a$  donnant :

$$|A| \text{ total} = \frac{|A_{MF}|^n}{\sqrt{2}}$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{(\sqrt{1 + a^2})^n}$$

$$2^{\frac{1}{2n}} = (1 + a^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$a = \sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1}$$

$$\boxed{\Delta F \text{ total} = \frac{\sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1}}{2\pi R_p C_t}}$$

Nous voyons que dans le cas d'un étage  $a_1 = 1$

pour  $n$  étages  $\rightarrow a_n = \sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1}$

$$\frac{\Delta F_n}{\Delta F_1} = \frac{1}{\sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1}}$$

$$\boxed{\Delta F_n = \Delta F_1 \times \frac{1}{\sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1}}}$$

La fréquence de coupure est multipliée par  $\frac{1}{\sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1}}$

$n$	$\sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1}$
1	1
2	0,64
3	0,51
4	0,43
5	0,38

Influence sur le temps de montée :

Nous allons donner la règle sans la démontrer :

$$T_m \text{ (total)} = \sqrt{T_{m_1}^2 + T_{m_2}^2 + \dots + T_{m_n}^2}$$

$$T_m \text{ (total)} = T\sqrt{n} \quad \text{si les } n \text{ étages sont identiques.}$$

Le temps de montée total est égal à la racine carrée de  $n$  fois le carré du temps de montée d'un étage.

*Exemple :* Une impulsion a son temps de montée égal à  $T_m = 4 \times 10^{-8}$ . Si un étage a  $1 \times 10^{-8}$  secondes de temps de montée propre

$$T_m = 10^{-8} \sqrt{16 + 1}$$

$$\text{Soit une erreur de } \frac{0,12}{4} = 3\%.$$

*Résumé :* Voici les formules essentielles ainsi qu'un exemple :

$$(1) \quad F_1 \times A = \frac{S}{2 \pi C_t} \quad (2) \quad F_1 = \frac{1}{2 \pi R C_t} \quad (3) \quad T_m = \frac{1}{3 F_1}$$

$$(4) \quad \Delta F \text{ total} = \Delta F_1 \times \frac{1}{\sqrt{2^{\frac{1}{n}} - 1}} \quad (5) \quad T_m \text{ total} = \sqrt{n} T^2 = T\sqrt{n}$$

$$(6) \quad \frac{L}{R^2 C} = \alpha$$

$F_0$  = Fréquence de coupure ;

$A$  = Fonction transfert ;

$S$  = Pente ;

$T_m$  = Temps de montée ;

$n$  = nombre d'étages.

Reprenons l'exemple ci-dessus : une impulsion a un  $T_m = 4 \times 10^{-8}$  nous voulons un gain de 6. La lampe est une 6AK5;  $C_l = 7 \text{ pF}$ ;  $S = 5,1 \times 10^{-3}$ . Avec une erreur de 3%

$$T_m = 4,12 \times 10^{-8} \text{ sec.}$$

de (2) on tire

$$R = 1260 \Omega.$$

de (5) on tire

$$L = 1,7 \mu \text{ Henry.}$$

Le gain est alors :

$$A = 5,1 \times 1,2 \neq 6$$

et le montage est représenté figure (16)

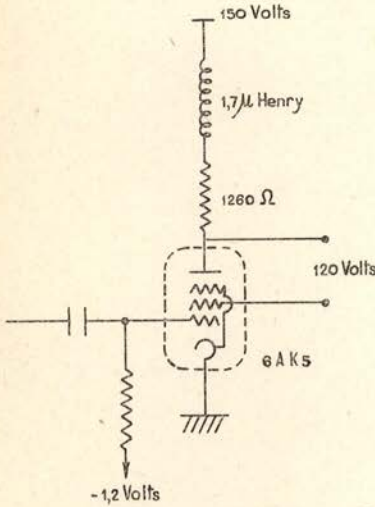


Fig. 16

### Les amplificateurs à reactions

Lorsqu'on s'attache à transmettre des impulsions dont on veut conserver rigoureusement les rapports d'amplitude (discriminateur d'énergie),

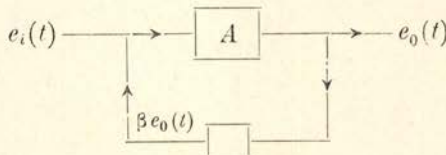
la fonction de transfert  $A$  doit présenter une grande stabilité. En effet une variation de  $A$  se répercute immédiatement sur  $e_0(t)$

$$e_0(t) = A e_i(t)$$

$$d e_0(t) = e_i(t) d A(t)$$

Les variations de  $A$  viennent de ce que les lampes vieillissent, les résistances chauffent. Afin d'éliminer ces variations on emploie la contre réaction.

*Rappel du principe:* Une fraction  $\beta e_0(t)$  de la tension de sortie est ramenée en opposition de phase à l'entrée :



Soit  $e_0(t)$  la tension de sortie ; la nouvelle tension d'entrée est :

$$e_i(t) - \beta e_0(t)$$

la fonction de transfert étant  $A$  en chaîne ouverte, nous avons :

$$[e_i(t) - \beta e_o(t)] A = e_o(t)$$

d'où la fonction de transfert  $G$  en chaîne fermée :

$$(I) \quad G = \frac{e_o(t)}{e_i(t)} = \frac{A}{1 + \beta A}$$

Remarque Si  $A \gg 1$  il vient :

$$G = \frac{1}{\beta}$$

Le gain est indépendant de l'amplificateur, il ne dépend que du réseau passif de contre réaction. La stabilité d'un réseau étant bien supérieure à celle des lampes, on obtient une stabilité meilleure. Chiffrons cette stabilité :

$$\frac{dG}{G} = \frac{dA}{A} \times \frac{1}{1 + \beta A}$$

La réaction améliore la stabilité du gain dans le rapport  $\frac{1}{1 + \beta A}$ .

Exemple :  $\frac{dA}{A} = \frac{5}{100}$  si  $\frac{1}{\beta} = 20$   $A = 10^3$

$$\frac{dG}{G} = \frac{5}{100} \times \frac{1}{1 + \frac{1}{20} \times 10^3}$$

$$\frac{dG}{G} = \frac{5}{100} \times 10^{-3}$$

On a gagné un facteur  $10^3$ .

Corrections apportées en HF par la réaction. (référence [2])

En portant dans l'équation (I) la valeur de  $A_{HF}$

$$A_{HF} = SR \times \frac{1}{1 + jRC_i\omega}$$

il vient

$$G_{HF} = \frac{SR}{1 + \beta SR} \times \frac{1}{1 + \frac{jRC_i\omega}{1 + \beta SR}} = G_{MF} \times \frac{1}{1 + jR\omega \frac{C_i}{1 + \beta SR}}$$

On voit que la capacité parasite  $C_i$  a été diminuée dans le rapport  $\frac{1}{1 + \beta S R}$ ; la bande passante va donc se trouver améliorée; en effet:

$$\frac{|G_{MF}|}{\sqrt{2}} = G_{MF} \times \frac{1}{1 + j R C_i \omega} \quad C_i = \frac{C_i}{1 + \beta S R}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + a^2}} \quad a = \frac{F}{F_1}$$

Pour  $a=1$ ,  $F_1 = \frac{1}{2 \pi R \frac{C_i}{1 + \beta S R}} = F$

$F_1 = F_1(1 + \beta S R)$	$F_1$ : fréquence de coupure sans contre réaction
----------------------------	---

La fréquence de coupure est repoussée vers les hautes fréquences, de la même manière que par la self correction dans les amplificateurs ordinaires.

Corrections apportées sur la distorsion non linéaire  
(Variations de  $P. S. \mu$ )

Considérons par exemple, l'harmonique de rang 2. Soit  $e_0(t) 2 \omega$  la valeur de la tension de sortie; nous avons:

$$A[e_i(t) - \beta e_0(t) 2 \omega] = e_0(t) 2 \omega$$

$e_0(t) 2 \omega = \frac{A e_i(t)}{1 + \beta A}$
--

Règle: La tension de l'harmonique se trouve réduite dans le même rapport que l'amplification, soit:  $\frac{1}{1 + \beta A}$ .

Ex. Si sans contre réaction le taux de distorsion est 5% il deviendra 5‰ si la contre réaction abaisse  $A$  dans le rapport 1 à 10.

Précautions à prendre avec la contre réaction. (référence [2])

a) Rotation de phase aux basses fréquences.

Nous avons trouvé pour les amplificateurs ordinaires l'expression du gain:

$$A_{BF} = \frac{1}{1 - j \frac{F_1}{F}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{j R C \omega}}$$

Posons

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{RC\omega}$$

Il vient

$$A_{BF} = \frac{\operatorname{Cos} \theta}{\operatorname{Cos} \theta - j \operatorname{Sin} \theta}$$

$$e_0(t) = e_i(t) \operatorname{Cos} \theta e^{j\theta}$$

L'amplitude de  $e_0(t)$  est  $e_i(t) \operatorname{Cos} \theta$

La phase de  $e_0(t)$  est  $\theta$ .

Nous retrouvons ainsi la rotation de phase. Si l'amplificateur comprend, par exemple, 3 étages nous aurons :

$$e_0(t) = e_i(t) A_{MF} \operatorname{Cos} \theta_1 \operatorname{Cos} \theta_2 \operatorname{Cos} \theta_3$$

La rotation de phase est :

$$\varphi = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$$

La contre réaction introduit un déphasage de  $\pi$ . Si

$$\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 = \pi$$

Il y aura réaction et naissance d'oscillations : Car le déphasage sera  $2\pi$ .

*Exemple :* Si

$$\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$$

$$3\theta = \pi \quad \theta = \frac{\pi}{3} = 60^\circ$$

$$\operatorname{Cos} \theta = \frac{1}{2}$$

$$\operatorname{Cos}^3 \theta = \frac{1}{8}$$

La formule de gain avec contre réaction est :

$$G = \frac{A}{1 + \beta A}$$

Si  $\beta A \geq 1$  il y a oscillation : Donc, avec l'exemple ci-dessus

$$\beta A \operatorname{Cos}^3 \theta \geq 1 \quad \beta A \times \frac{1}{8} \geq 1$$

$$\beta A \geq 8$$



Si  $\beta A \geq 8$  des oscillations prendrons naissance: on peut améliorer de la façon suivante :

Choisissons une constante de temps  $CR \ll C_1 R = C_2 R$ .

*Exemple :*

$$(CR)_1 = (CR)_2 = 100 (CR)_3 .$$

Lorsque  $\theta_1 = \theta_2 = \frac{\pi}{4} \quad tg \theta_3 = 100$

d'où  $\theta_3 \neq \frac{\pi}{2}$

et  $\text{Cos } \theta_1 \text{ Cos } \theta_2 \text{ Cos } \theta_3 = \frac{1}{200}$

La valeur supérieure de  $\beta A$  est ainsi 200.

b) Rotation de phase aux hautes fréquences.

On démontre de la même manière que ci-dessus que :

$$e_0(t) = e_i(t) \text{Cos } \theta e^{-j\theta} .$$

La rotation de phase est  $-\theta$  et le résultat est identique: des oscillations peuvent prendre naissance.

**Résumé:** la contre réaction introduit une perte de gain, mais améliore la bande passante et la stabilité. Les formules à retenir sont les suivantes :

$$\boxed{G = \frac{A}{1 + \beta A}} \quad \text{si } A \gg 1 \quad \boxed{G = \frac{1}{\beta}}$$

$$\boxed{e_0(t) = e_i(t) \text{Cos } \theta e^{+j\theta}}$$

$$\boxed{\beta A_{BF} = \beta A_{MF} \text{Cos } \theta_1 \text{ Cos } \theta_2 \text{ Cos } \theta_3 = 1}$$

Voici un exemple d'amplificateur à contre réaction, figure (17)

Bande passante = 20 MC

Gain  $\neq 17$

$T_m = 2 \times 10^{-8}$

Lampe = 4 c 4 A

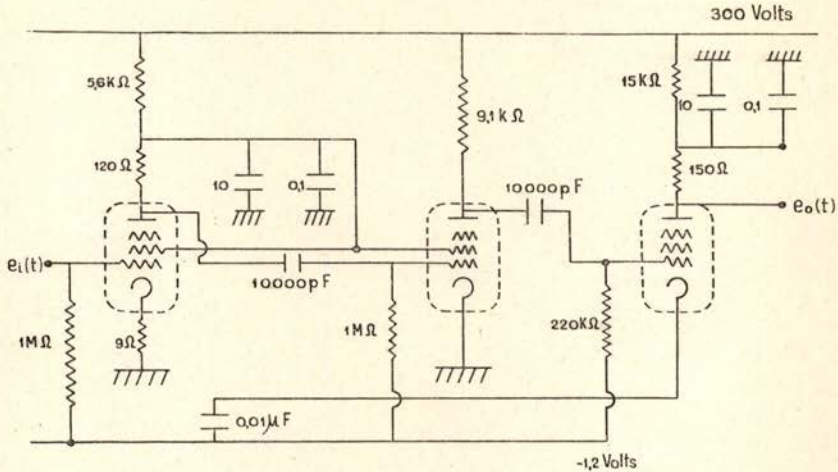


Fig. 17

### Les amplificateurs distribués

Nous venons de voir que les limitations apportées aux caractéristiques des amplificateurs compensés, au à contre réaction étaient dues aux capacités parasites des lampes. L'introduction de la notion de « tubes à ondes progressives » par PIERCE et FIELD ainsi que Percival a permis de tourner cette difficulté d'une manière très élégante.

Une suite de cellules peut, dans une certaine bande de fréquences se comporter comme une ligne. C'est ainsi que  $N$  cellules en  $T$ , fermées sur leur impédance caractéristique  $Z_0$ , laisseront une onde se propager avec une vitesse  $v$ , et auront une fréquence de coupure  $F_0$ . Ceci provient de la démonstration classique de l'équation des « télégraphistes » en supposant l'atténuation nulle (figure 18).

$$\frac{\partial v}{\partial x} = l \frac{\partial I}{\partial t} \quad \frac{\partial I}{\partial x} = c \frac{\partial v}{\partial t} \quad l = \text{self par unité de longueur.}$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = l c \frac{\partial^2 v}{\partial t^2}}$$

$c = \text{capacité par unité de longueur.}$

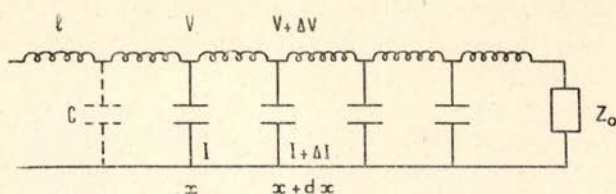


Fig. 18

Si les capacités parasites sont introduites dans deux suites de cellules simulant une ligne, leur effet néfaste ne se produira plus, et l'on obtiendra ainsi le schéma suivant : figure 19.

Les vitesses de propagation dans les lignes de plaques et de grilles sont égales rendues  $v_1 = v_2$ .

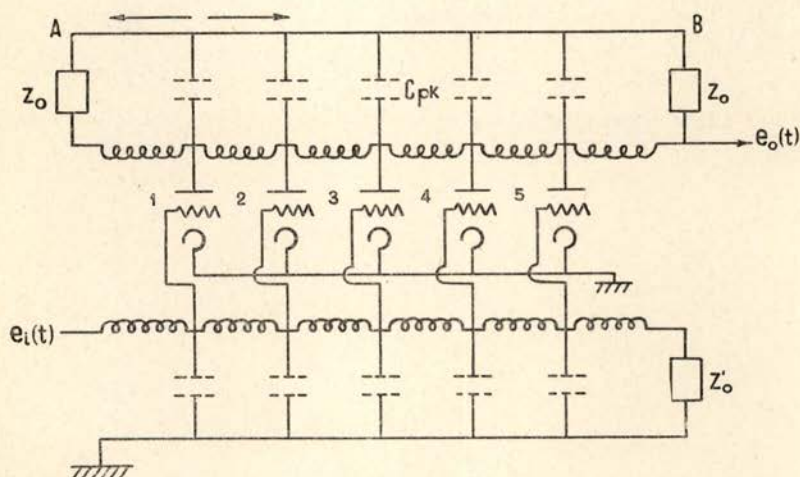


Fig. 19

Une impulsion arrivant sur la grille 1 est amplifiée par la lampe (1).

Deux chemins s'ouvrent à elle dans la ligne de plaque. Une partie se dirige vers  $A$  où elle est absorbée par  $Z_0$  (onde progressive), une autre partie se dirige vers la lampe 2 avec la vitesse  $v$ .

Comme l'impulsion d'entrée voyage sur la ligne de grille avec la même vitesse, ces deux impulsions se trouvent simultanément sur la lampe 2, qui amplifie, et le même processus se répète  $n$  fois si bien que :

$$e_o(t) = n e_i(t)$$

Nous avons construit un amplificateur de ce type, ayant 220 *MC.* de bande passante et un gain  $A = 10$ . La théorie plus détaillée sera donnée par la suite.

Je remercie Mme JOLIOT-CURIE, Directeur de l'Institut du Radium, ainsi que MM. VALADARES et J. TEILLAC pour l'intérêt qu'ils ont porté à ce travail. Je remercie aussi le Directeur du Centre National de la Recherche Scientifique qui m'a donné l'autorisation de publier ce travail.

#### AUTEURS CONSULTÉS:

- [1] Calcul et Construction des émetteurs. Cours E. S. E. (FAGOT).
- [2] Electrical Counting (LEWIS).
- [3] Principles of Radar (M. I. T.).
- [4] Pulse techniques (MOSKOWITZ).
- [5] Théorie des Radiocommunications (Cours de transmissions militaires).
- [6] Vacuum tubes amplifiers: WALLY et WALMAN (M. I. T.).
- [7] A transient Analysis of the cathode feedback loop: by DEAN WATKINS and L. FISHBINE.

REVISTAS QUE PERMUTAM COM A «PORTUGALIAE PHYSICA»,  
POR ORDEM ALFABÉTICA DOS PAÍSES

- ALEMANHA — Abhandlungen der deutschen Akademie der Wissenschaften Zu Berlin.  
— Berichte über die Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften.  
— Physikalische Berichte.  
— Sitzungsberichte der Deutschen Akademie der Wissenschaften Zu Berlin.
- ARGENTINA — Anales de la Sociedad Científica Argentina.  
— Mathematicae Notae.  
— Revista de la Facultad de Ciencias Fisicomatematicas de la Plata.  
— Revista de la Union Matematica Argentina.  
— Revista de la Universidad Nacional de Cordoba.
- AUSTRALIA — Journal and Proceedings of the Royal Society of New South Wales.  
— Proceedings of the Royal Society of New South Wales.
- BELGICA — Annuaire de l'Académie Royale de Belgique.  
— Bulletin de la Classe des Sciences de l'Académie Royale de Belgique.  
— Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liège.  
— Mededeelingen mit Het Natuurkundig Laboratorium der Universiteit te Genb.  
— Recueil de Travaux du Laboratoire de Physique (Luovain).
- BRASIL — Matemática, Técnica e Ciência.  
— Revista científica.
- CANADÁ — Canadian Journal of Research.  
— Proceedings of the Royal Canadian Institute.  
— Transactions of the Royal Canadian Institute.
- CHECOSLOVÁQUIA — Društvo Matematicara, I Fizicara.
- EQUADOR — Anales (Universidad Central del Ecuador).
- ESPAÑA — Anales de Física y Química.  
— Boletín de Radiactividad.  
— Memorias de la Real Academia de Ciencias y Artes de Barcelona.  
— Revista de Geofísica.
- ESTADOS UNIDOS — American Journal of Science.  
— Journal of the Franklin Institute.  
— Journal of Mathematics and Physics.  
— Journal of Research of the National Bureau of Standards.  
— Nuclear Science Abstracts.  
— Quartely Review.  
— Studies of the Institutum Divi Thomae.
- FINLANDIA — Annales Academiae Scientiarum Fennicae.
- FRANÇA — Annales de l'Institut de Physique du Globe de l'Université de Paris.  
— Annales de Physique  
— Annales de l'Université de Grenoble.  
— Annales de l'Université de Lyon.  
— Bulletin Astronomique.  
— Bulletin de la Société Scientifique de Bretagne.  
— Cahiers Rhodaniens.  
— Ens Physique.
- HOLANDA — Communications from the Kamerling Onnes Laboratorium.  
— Physica.  
— Revue Technique Philips.

- INDIA — Journal of the Indian Institute of Science.  
 — Proceedings of the Indian Academy of Sciences.  
 — Proceedings of the National Institute of Sciences of India.  
 — Quaterly Journal of the Indian Institute of Science.
- INGLATERRA — The Advancement of Science.  
 — Electrical Review.  
 — Electrical Times.  
 — The English Electric Journal.  
 — Monthly Notices of the Royal Astronomical Society.  
 — Monthly Notices of the Royal Astronomical Society Geophysical Supplement.  
 — Royal Astronomical Society — Occasional Notes.  
 — Proceedings of the Cambridge Philosophical Society.  
 — The Proceedings of the Physical Society.  
 — Proceedings of the Royal Society.  
 — Proceedings of the University of Durham Philosophical Society.  
 The School Science Review.
- IRLANDA — Economic Proceedings of the Royal Dublin Society.  
 — Proceedings of the Royal Irish Academy.  
 — The Scientific Proceedings of the Royal Dublin Society.
- ITÁLIA — Annali di Geofisica.  
 — Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa.  
 — Il Nuovo Cimento.  
 — Rendiconti del Seminario della Facolta di Scienze di Cagliari.  
 — Ricerca Scientifica e Ricostruzione.  
 — La Rivista del Nuovo Cimento.
- JUGOSLÁVIA — Hrvatsko Prirodoslovno Društvo.
- JAPÃO — Journal of the Institute of Polytechnics.
- MÉXICO — Quimica
- PERÚ — Actas de la Academia Nacional de Ciencias Exactas Físicas y Naturales de Lima.
- PORTUGAL — Agronomia Lusitana.  
 — Boletim da Sociedade Portuguesa de Matemática.  
 — Gazeta de Física.  
 — Gazeta de Matemática  
 — O Instituto.  
 — Portugaliae Mathematica.  
 — Memórias da ordem dos engenheiros.  
 — Revista da Faculdade de Ciências de Coimbra.  
 — Revista Portuguesa de Filosofia.
- SUÉCIA — Arkiv für Fysik.  
 — Arkiv für Geofysik.  
 — Kungl Fysiografiska Sällskapets i Lund Förhandlingar.
- SUISSA — Archives des Sciences Physiques et Naturelles de Genève.  
 — Comptes Rendus des Séances de la Société de Physique et de Sciences Naturelles de Genève.
- TURQUIA — Communications de la Faculté des Sciences d'Ankara.  
 — Istanbul Universitesi Fen Fakultesi Mecmuasi.

## OBRAS RECEBIDAS

Recebemos dos editores as seguintes obras que agradecemos

- HARLEY HOWE — *Introduction to Physics* — Mc. Graw-Hill, Book Company, Inc. 1948.
- ALPHEUS W. SMITH — *The elements of Physics* — Mc. Graw-Hill, Book Company, Inc. 1948.
- CARL VOEGTLIN AND HAROLD C. HODGE — *Pharmacology and toxicology of uranium compounds* — Mc. Graw-Hill, Book Company, Inc. 1949.
- F. SEITZ, PH. D. — *Théorie Moderne des solides* — Manan et Cie. — Paris, 1949.
- I. M. FREEMAN — *Modern Introductory Physics* — Mc. Graw-Hill, Book Company, 1949.
- O. C. DE BEAUREGARD — *La théorie de la Relativité restreinte* — Masson et Cie. Editeurs 1949.
- OTTO OLDENBERG — *Introduction to Atomic Physics* — Mc. Graw-Hill, Book Company Inc. 1949.
- G. DUSINBERRE — *Numerical Analysis of heat flow* — Mc. Graw-Hill, Book Company Inc. 1949.
- L. I. SCHIFF — *Quantum mechanics* — Mc. Graw-Hill, Book Company, Inc. 1949.
- E. LATRIN — *Calcul opérationnel* — Masson Cie. — Paris, 1949.
- Y. ROCARD — *Électricité* — Massie Cie. — Paris, 1951.
- F. CAHEN — *Problems of power transmission at voltages above 225 kV* — British Electrical and allied Manufaturs Association, 1952.
- Y. ROTBLAT — *Atomic energy* — Taylor e Francis, Ltd — London.





# PORTUGALIAE MATHEMATICA

REVISTA DE COLABORAÇÃO INTERNACIONAL

Preço dos volumes já publicados

Volume 1 — 600\$00; Volume 2 a 13 — 250\$00 cada

Para os sócios da Sociedade Portuguesa de Matemática

Volume 1 — 400\$00; cada um dos volumes seguintes: 150\$00

Volume 14, assinatura: 150\$00; para os sócios da S. P. M.: 50\$00

Pedidos a *Gezeta de Matemática, Lda.* — Av. João Crisóstomo, 4, 7.º-D.—LISBOA-N.

# GAZETA DE FÍSICA

REVISTA DOS ESTUDANTES DE FÍSICA E DOS  
FÍSICOS E TÉCNICOS FÍSICOS PORTUGUESES

**DEFENDE OS INTERESSES PROFISSIONAIS DOS FÍSICOS**

*Publica artigos científicos, de divulgação  
e vulgarização dedicadas a estudantes, professores  
e técnicos, e problemas saídos nos exames*

Número avulso ..... Esc. 12\$50

Assinatura por um ano (4 números) Esc. 40\$00

Pedidos para:

Laboratório de Física da F. C. L. — R. da Escola Politécnica — LISBOA

# PORTUGALIAE PHISICA

REVISTA DE COLABORAÇÃO INTERNACIONAL

REDACÇÃO E ADMINISTRAÇÃO

LABORATÓRIO DE FÍSICA DA FACULDADE DE CIÊNCIAS DE LISBOA

Publicados: Volume 1 (4 fascículos): 300\$00; Vol. 2 (4 fasc.): 150\$00

Assinatura de cada um dos volumes seguintes — 100\$00

PORTUGALIAE PHYSICA se propose de servir simultanément deux buts — le développement des études physiques au Portugal et la collaboration internationale dans ce domaine.

PORTUGALIAE PHYSICA est la seule revue portugaise consacré exclusivement aux sciences physiques.

Les travaux à publier devront être écrits à la machine (les symboles à la main). Les auteurs d'un mémoire ne dépassant pas 30 pages auront droit à 50 tirages-à-part gratuits.

Toute la correspondance concernant la Rédaction de PORTUGALIAE PHYSICA doit être adressée à

**P O R T U G A L I A E   P H Y S I C A**  
**Laboratório de Física — Faculdade de Ciências**  
**Rua da Escola Politécnica — Lisboa — Portugal**

Prix de l'abonnement: 100 escudos par volume.

Prix des volumes déjà parus: Volume I: 300 escudos; autres volumes: 150 escudos.

Prix du fascicule: 50 escudos.

Les Universités, les Laboratoires de Physique, les Académies, les Sociétés Savantes et les Revues de Physique sont invités à recevoir cette revue en échange de leurs publications.

PORTUGALIAE PHYSICA donnera un compte-rendu détaillé de tous les ouvrages soumis à la Redaction en deux exemplaires.