PEUT-ON CONNAÎTRE SIMULTANÉMENT ET AVEC PRÉCISION LA POSITION ET LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT D'UNE PARTICULE ? (*)

J. ANDRADE E SILVA

(Laboratoire de Théories Physiques. Institut Henri Poincaré — 11, rue Pierre Curie, Paris 5e)

RÉSUMÉ — On examine dans un cas simple sous quelles hypothèses sont énoncées les relations d'Heisenberg. On vérifie qu'à moins d'introduire le postulat du caractère instantané des transitions quantiques, on peut connaître à la fois et avec précision la position et la quantité de mouvement d'un corpuscule. Il s'ensuit notamment que la formulation causale de la Mécanique ondulatoire n'est pas nécessairement une théorie à paramètres cachés.

1. *INTRODUCTION*

Il est bien connu que les relations d'Heisenberg s'introduisent en Physique quantique au moins de deux façons différentes [1].

D'abord, on les déduit de l'analyse d'un certain nombre d'expériences idéales de mesure, dont la plus connue est probablement le «microscope d'Heisenberg»: compte tenu du double aspect corpusculaire et ondulatoire de la lumière et de la matière, et grâce aux relations d'Einstein-de Broglie

$$E = h\nu \qquad \lambda = h/p, \tag{1}$$

on vérifie que le produit des incertitudes sur la position et la quantité de mouvement d'une particule satisfait à tout instant aux relations

$$\Delta p_i \Delta q_i \geqslant h \tag{2}$$

(*) Reçu le 11 mai 1967.

Cette conclusion étant présentée comme la conséquence inéluctable du dualisme onde-corpuscule et des équations (1) qui en rendent compte, les inégalités (2) acquièrent une importance conceptuelle considérable et sont censées définir une sorte de limite à nos connaissances possibles en Microphysique.

Mais, d'autre part, la description du comportement de toute particule par un certain paquet d'ondes Ψ et les postulats statistiques qui s'y rattachent permettent de retrouver un résultat semblable en Mécanique ondulatoire, en conséquence des relations classiques de Fourier

$$\Delta\nu \, \Delta t \geqslant 1 \ . \tag{3}$$

Il est évident que cette seconde demonstration est bien plus éloignée des faits d'expérience que la première. À vrai dire, et malgré la fameuse tentative de VON NEUMANN [2], rien ne prouve que la description de la particule contenue dans la théorie de l'onde Ψ soit «complète»: si l'École de Copenhague a pu le soutenir, c'est finalement en s'appuyant sur le premier type de raisonnement. En effet, en supposant que le dualisme onde-corpuscule suffit à démontrer la validité de (2) à tout instant et en toutes circonstances, l'interprétation purement probabiliste va aussi loin que l'autorisent nos possibilités d'observation et peut donc, *en un certain sens*, être considérée comme complète [3]. De ce point de vue, il est certain qu'on doit extrapoler le contenu des relations d'Heisenberg, en les considérant non comme des simples relations d'*incertitude* mais, plus radicalement, comme des relations d'*indétermination*.

Or, depuis quelques années, M. L. DE BROGLIE et un certain nombre d'autres physiciens développent une formulation différente de la Mécanique ondulatoire, dont l'hypothèse physique essentielle est le rétablissement d'une localisation permanente des corpuscules [4]. Basée sur l'utilisation de solutions des équations d'évolution qui sont des «ondes à bosse», cette nouvelle conception du dualisme onde-corpuscule permet notamment de retrouver les prévisions habituelles des résultats des mesures quantiques [5]. Jusqu'à maintenant, cette Mécanique a été regardée comme une théorie à «paramètres cachés», parce qu'on a admis implicitement que la position et la quantité de mouvement attribuées constamment à tout corpuscule ne pourraient jamais être connues simultanément avec précision. Cela revenait à admettre que l'énoncé habituel des relations d'incertitude était effectivement la conséquence du dualisme onde-corpuscule et devait donc rester valable dans n'importe quelle formulation de la

Mécanique quantique. Il semblerait d'ailleurs qu'il doive en être ainsi pour que l'interprétation de l'École de Copenhague ne soit pas d'évidence incomplète.

Ce travail vise à démontrer que la situation est en fait plus complexe. L'analyse de la plus simple des expériences de mesure montre qu'à moins d'introduire une hypothèse *ad hoc* et sans la moindre base expérimentale possible, on peut déterminer à la fois et avec une précision incompatible avec (2) la position et la quantité de mouvement d'un corpuscule. Il s'ensuit que, dans son propre système, la formulation causale de la Mécanique ondulatoire n'est nullement une théorie à paramètres cachés. Cependant, cela ne prouve pas le caractère incomplet de l'interprétation de l'École de Copenhague, ni ne remet en cause une certaine façon d'énoncer les relations d'Heisenberg.

2. *UNE EXPÉRIENCE DE MESURE DE LA QUANTITÉ DE MOUVEMENT*

Soit un train d'ondes Ψ que, pour simplifier, nous supposons correspondre à une seule particule dont on se propose de mesurer la quantité de mouvement. La façon la plus simple de le faire est de placer sur le parcours de ce train d'ondes un dispositif analyseur (prisme, réseau, etc.) capable de le décomposer physiquement en ondes presque planes et monochromatiques. Ensuite, une fois que ces ondes sont disjointes dans l'espace, on détermine par des appareils adéquats sur laquelle de ses ondes se trouve la particule.

Si le détecteur correspondant à la composante presque monochromatique de longueur d'onde λ_i (à $\Delta\lambda_i$ près) est déclenché, on aura alors le droit d'attribuer à la particule une quantité de mouvement

$$p_i = \frac{\lambda_i}{h} \tag{4}$$

avec une incertitude de l'ordre de

$$\Delta\, p_i \simeq \frac{\Delta\lambda_i}{h\lambda_i^2} \tag{5}$$

On voit que ce procédé de mesure a une valeur pratique réelle et illustre la remarque de M. L. DE BROGLIE [6] que la détermination de n'importe quelle grandeur en Microphysique a *toujours* lieu par l'intermédiaire de l'observation d'un phénomène macroscopique provoqué par une *localisation*.

Cette mesure de la quantité de mouvement par l'entremise de la localisation présente une propriété remarquable: ce n'est pas de la finesse de l'observation elle-même que dépend l'exactitude de la mesure de p. En effet, c'est l'identification de la composante de l'onde sur laquelle se trouve le corpuscule et non la localisation exacte de celui-ci qui permet de lui attribuer avec certitude une quantité de mouvement qui, le cas écheant, est très bien définie. D'après (5), c'est la puissance de résolution du dispositif analyseur qui détermine la précision de la mesure de p, et on peut même remarquer que la localisation pourra être d'autant plus grossière que l'analyseur est plus puissant et, donc, que la mesure de la quantité de mouvement sera plus exacte.

On nous dira que ce fait n'est pas fortuit, puisqu'il traduit justement la validité des relations d'Heisenberg. Nous y reviendrons bientôt, mais, pour l'instant, nous ne voulons retenir que la conclusion que l'exactitude de la mesure de p ne dépend pas de la précision de l'observation elle-même, mais d'un processus physique qui a lieu nécessairement *avant* la mesure.

Supposons alors qu'on utilise un analyseur très puissant, de façon que la décomposition qu'il provoque soit très fine; en principe, une telle «préparation» du train d'ondes n'introduit aucune limite à la précision de la détermination ultérieure de p. Supposons en outre qu'on procède par la suite à une localisation très exacte du corpuscule [7], ce qui ne peut porter aucun préjudice à la finesse de la décomposition. On obtiendra ainsi, directement, une connaissance très précise de la position du corpuscule et, indirectement, puisqu'il a été localisé sur une onde presque monochromatique, une connaissance très précise de sa quantité de mouvement. *Ne doit-on pas en conclure qu'on peut connaître à la fois et avec précision la position et la quantité de mouvement d'un corpuscule*?

3. *ANALYSE DE L'EXPÉRIENCE EN THÉORIE CAUSALE*

Il ne fait pas de doute que la réponse à cette question donnée par la formulation causale de la Mécanique ondulatoire est affirmative. Qui plus est, nous allons montrer que les mesures effectuées couramment au laboratoire selon ce procédé peuvent apporter, de ce point de vue, une connaissance des valeurs de p et de q au même instant qui viole les relations d'Heisenbreg.

L'hypothèse fondamentale de la théorie causale consiste dans la description de la particule par une solution u des équations d'évolution, qui comprend une étroite région singulière u_0 où l'amplitude prend des valeurs beaucoup plus grandes que partout ailleurs; la densité d'énergie étant proportionnelle au carré de l'amplitude, la presque totalité de cette énergie sera donc concentrée dans la région fortement localisée u_0, qu'on peut appeler le «corpuscule». Le corpuscule ainsi défini se déplace sur l'onde régulière v qui l'entoure et, sous des hypothèses précises (principe de l'accord des phases), on démontre que son mouvement y est rigoureusement déterminé [8]; par exemple, pour une particule sans spin, la vitesse $\vec{v}$ d'un corpuscule qui se trouverait au point $\vec{R}$ d'une onde dont la phase est $\varphi\,(\vec{r}, t)$ s'exprime sous la forme

$$\vec{v} = -\,c^2 \left[\frac{\nabla\varphi}{\frac{\partial\varphi}{\partial t}} \right]_{\vec{r} = \vec{R}} \tag{6}$$

Mais, comme on suppose par ailleurs que toute particule est constamment soumise à de très nombreuses et faibles fluctuations de nature aléatoire, on ne peut pas prévoir le point de l'onde où se trouve le corpuscule, et on se borne à lui attribuer une probabilité de présence qui a la valeur habituelle $\Psi\Psi^* d\tau$. Il en résulte, d'après (6) une méconnaissance correspondante de la vitesse, et il est aisé de voir que les incertitudes sur les valeurs de la position et de la quantité de mouvement satisfont en général aux inégalités d'Heisenberg.

Ces principes étant rappelés, examinons ce qui se passe dans le cas de l'expérience de mesure envisagée plus haut. Avant la traversée de l'analyseur, le produit des incertitudes Δp et Δq peut effectivement être de l'ordre de h, mais cette valeur ne fait qu'augmenter avec la décomposition, car celle-ci n'apporte aucun renseignement sur p pendant que l'incertitude sur q s'aggrave nécessairement. L'analyse spectrale ainsi réalisée place le corpuscule sur une onde presque monochromatique, mais, tant qu'on ne sait pas sur quelle onde il se trouve, l'incertitude Δp ne diminue pas pour autant, tandis que l'incertitude Δq devient de l'ordre de grandeur des dimensions de l'ensemble de toutes ces ondes presque planes Bref, en elle-même, l'action de l'analyseur ne fait que diminuer la néguentropie du système.

Par la suite, quand on localisera le corpuscule, la situation sera complètement renversée. Vu que la localisation ne doit avoir lieu qu'une fois que les ondes presque monochromatiques ne se superposent plus, elle permettra d'identifier la composante sur laquelle se déplaçait le corpuscule et, dès lors, l'incertitude Δp sur ce qui était sa quantité de mouvement ne dépend plus que de la largeur spectrale $\Delta\lambda_i$ de cette onde. Mais, en même temps, la localisation détermine la position du corpuscule avec une incertitude Δq qui est, en général, bien inférieure à la dimension correspondante Δl_i de cette onde. Compte tenu des relations de Fourier et des équations d'Einstein-de Broglie, on a dans le cas le plus favorable

$$\Delta p \ \Delta l_i \sim h \tag{7}$$

mais, puisqu'il se peut que $\Delta q \ll \Delta l_i$, il vient

$$\Delta q \ \Delta p < h \tag{8}$$

en contradiction avec les relations d'Heisenberg.

On voit que ce résultat n'exige même pas un analyseur très puissant ni une détermination particulièrement précise de la position. Ainsi, si l'état initial de la particule a été soigneusement défini (ce que veut dire qu'on a $\Delta p . \Delta q \sim h$), toute localisation du corpuscule sur l'une des ondes produites par n'importe quel analyseur définira des incertitudes satisfaisant à la relation (8), pourvu que la localisation soit simplement plus précise que l'extension de cette onde.

Enfin, remarquons qu'un tel résultat ne signifie nullement que la formulation causale de la Mécanique ondulatoire sache *prévoir* les valeurs ultérieures de p et de q avec une précision incompatible avec les relations d'Heisenberg. L'hypothèse des fluctuations aléatoires conduit à dire, au contraire, que l'incertitude sur la position du corpuscule redeviendra très rapidement de l'ordre de grandeur des dimensions de l'onde v correspondante, ce qui suffit pour que les relations d'Heisenberg redeviennent valables.

4. *ANALYSE DE L'EXPÉRIENCE EN THÉORIE PUREMENT PROBABILISTE*

L'interprétation purement probabiliste de Bohr, Heisenberg et Von Neumann se doit naturellement de refuser ces conclusions, opposées à ses propres conceptions de base. Nous allons donc rappeler brièvement la description qu'elle propose pour ce processus de mesure, afin de montrer sous quelles hypothèses elle peut enlever toute signification à l'inégalité (8).

D'après l'École de Copenhague, l'état initial de la particule qui correspond à la fonction Ψ est censé exprimer des indéterminations sur l'état de la particule, celle-ci ne possédant donc ni position, ni quantité de mouvement bien déterminées, mais tout un ensemble de valeurs de p et de q «potentiellement présentes». L'action de l'analyseur transforme ce «cas pur» initial en un «mélange»: la particule sera alors décrite par une onde presque monochromatique, mais, puisqu'on ne sait pas l'identifier, une incertitude plus large se superpose à la nouvelle indétermination fondamentale. Plus précisément, l'indétermination Δp est définie par l'intervalle spectral $\Delta\lambda_i$ de l'une de ces ondes et l'indétermination $\Delta q'$ par la dimension Δl_i de la même onde, mais les incertitudes de notre connaissance s'expriment respectivement en fonction de l'ensemble de toutes les largeurs spectrales $\Delta\lambda_i$ et par la somme de tous les intervalles Δl_i. La localisation ultérieure faisant disparaître cette incertitude, la description de ce qu'*était* la particule redevient un cas pur; on peut alors lui attribuer *a posteriori* une indétermination Δp maintenant connue avec certitude (c'est pourquoi l'expérience constitue un procédé de mesure de p) et l'indétermination $\Delta q' \sim \Delta l_i$ correspondante, avec $\Delta p . \Delta q' \sim h$.

On sait néanmoins que la position peut toujours être mesurée avec une précision Δq bien supérieure à Δl_i, ce qui nous conduisait plus haut à la relation (8). Pourquoi n'en serait-il de même ici? La réponse est qu'on *postule* maintenant que ces valeurs ne correspondent pas à un même état dynamique de la particule, parce qu'à l'instant même où l'indétermination sur la position cesse d'être $\Delta q'$ pour devenir Δq, l'indétermination sur la quantité de mouvement cesse d'être Δp pour prendre la nouvelle valeur $\Delta p'$ (avec $\Delta q . \Delta p' \geqslant h$). Nous avons ici un exemple typique de la célèbre «réduction du paquet de probabilités par la mesure» et on voit bien que c'est ce changement de forme de la fonction d'onde en un temps rigoureusement nul, cette coupure radicale dans l'évolution du Ψ, qui permet à la théorie purement probabiliste d'écarter la relation (8).

Pour regarder la question de plus près, supposons que le dispositif de mesure de la position soit une simple émulsion photographique. L'observation d'une petite tache noire sur cette émulsion signifie alors qu'une réaction chimique y a été déclenchée par l'ionisation d'une molécule, attestant ainsi l'arrivée à cet endroit (déterminé avec une précision Δq de l'ordre des dimensions de la tache) d'un quantum d'énergie.

La théorie causale interprète aisément le phénomène en admettant que la trajectoire du corpuscule (supposé constamment localisé) s'est trouvée passer par ce point; puisqu'elle n'a pu y parvenir que sur une onde presque monochromatique bien déterminée, on en déduit que le corpuscule est arrivé en se point (défini avec l'incertitude Δq) avec une quantité de mouvement p, définie à Δp près. Une fois la molécule ionisée, on connaît donc la position et la quantité de mouvement qu'avait le corpuscule à l'instant où le processus d'ionisation se déclenche, et cette connaissance peut être trop précise pour satisfaire aux relations d'Heisenberg.

En théorie purement probabiliste, la particule n'a pas de localisation permanente, et Δp et Δq ne sont que des indéterminations. Mais il est certain que Δp est l'indétermination de la quantité de mouvement juste avant l'ionisation, comme Δq est l'indétermination de la position à l'instant où cette ionisation a eu lieu. La réduction du paquet de probabilités qui est censée accompagner le passage d'un état à l'autre correspond alors au processus physique de l'ionisation et, puisque ce passage doit s'effectuer en un temps nul, l'ionisation elle-même doit être supposée avoir lieu en un temps nul. Plus généralement, le changement instantané et discontinu de la fonction d'état qui permet à l'École de Copenhague de rejeter la relation (8) suppose nécessairement le caractère instantané des transitions quantiques.

Il ne fait pas de doute que cette propriété soit parfaitement cohérente avec l'ensemble des résultats de la théorie purement probabiliste, mais il n'en reste pas moins qu'il s'agit d'une hypothèse n'ayant pas la moindre base expérimentale. Toute mesure réelle étant nécessairement affectée d'une erreur, on peut même dire que l'interprétation habituelle de la Mécanique ondulatoire se fonde sur une hypothèse qui se place d'elle-même en dehors de toute possibilité de vérification.

5. *CONCLUSIONS*

Les relations d'Heisenberg sont couramment énoncées comme exprimant soit l'impossibilité de *prévoir*, soit l'impossibilité de *connaître* l'état d'un système avec une précision telle que le produit $\Delta p . \Delta q$ soit inférieur à h. Il s'agit de deux formulations différentes, la première étant en fait plus exigeante que la seconde.

L'interprétation purement probabiliste développée par BOHR et HEISENBERG exige la validité du premier de ces énoncés comme celle du second, car, pour que Δp et Δq puissent être regardés comme exprimant des indéterminations, il faut qu'on ne puisse jamais attribuer à la particule, de quelque façon que ce soit, à la fois une position et une quantité de mouvement bien définies. Nous avons vu que cette conclusion n'est pas la conséquence du dualisme onde-corpuscule, comme on le dit souvent, mais qu'elle suppose l'introduction d'une hypothèse *a priori*, le caractère instantané des transitions quantiques. Que cette hypothèse se retrouve par la suite dans le développement de cette théorie montre simplement que celle-ci n'est pas contradictoire, mais ne démontre nullement le caractère nécessaire d'une telle hypothèse.

Par contre, dans l'interprétation causale soutenue par DE BROGLIE, le corpuscule est un être constamment localisé et l'existence de processus physiques ayant lieu dans un temps rigoureusement nul est exclue. Il s'ensuit la possibilité de *connaître* dans certaines conditions les valeurs de p et de q avec une précision plus grande que celle que les relations d'Heisenberg autoriseraient, et il ne reste qu'un principe d'incertitude valable pour ce qui est des *prévisions* de l'état ultérieur du système.

Que l'interprétation causale de la Mécanique ondulatoire soit une théorie à paramètres cachés n'est donc pas la conséquence inéluctable du dualisme onde-corpuscule: elle ne l'est à vrai dire que si l'on admet préalablement une autre interprétation du formalisme quantique. De son propre point de vue, l'interprétation causale n'est pas une théorie à paramètres cachés et, d'une façon en quelque sorte symétrique, elle conduit à regarder l'interprétation de BOHR et HEISENBERG comme une théorie incomplète.

Remarquons, pour terminer, que l'analyse ici présentée à propos de la mesure de la quantité de mouvement pourrait être reprise dans un contexte bien plus large. Pour ne donner qu'un exemple, un dispositif du type de celui utilisé par STERN et GERLACH permettrait de retrouver des conclusions analogues pour la détermination précise et simultanée de la position et du moment cinétique.

Je voudrais remercier M. L. DE BROGLIE pour les conseils et les encouragements qu'il accorde à mes recherches sur la théorie de la mesure. Je remercie aussi MM. G. LOCHAK et M. THIOUNN pour nos fructueux échanges de vues.

BIBLIOGRAPHIE

[1] HEISENBERG, W., — *Les principes physiques de la théorie des quanta*, Paris, Gauthier-Villars, 1923.

[2] NEUMANN, J. VON — *Les fondements mathématiques de la Mécanique quantique*, Paris, P. U. F., 1947; BROGLIE, L. DE — *La théorie de la mesure en Mécanique ondulatoire*, Paris, Gauthier-Villars, 1957; MUGUR-SCHACHTER, M. — *Etude du caractère complet de la théorie quantique*, *ibid.*, 1964; JAUCH, J. M., et PIRON, C. — *Helv. Phys. Acta*, **36**: 827, 1963; BELL, J. S. — *Rev. Mod. Phys.*, **38**: 447, 1966; BOHM, D., et BUB, J. — *Rev. Mod. Phys.*, **38**: 470, 1966.

[3] Sur ce problème voir notamment, EINSTEIN, A., PODOLSKY, B., et ROSEN, N. — *Phys. Rev.*, **47**: 777, 1935; BOHR, N. — *Phys. Rev.*, **48**: 696, 1935; FURRY, W. H. — *Phys. Rev.*, **49**: 476, 1936, discussion reprise *in Albert Einstein philosopherrand scientist*, P. A. Schlip ed., Evanston, Ill., 1949.

[4] BROGLIE, L. DE — *Une tentative d'interprétation causale et non-linéaire de la Mécanique ondulatoire*, Paris, Gauthier-Villars, 1956.

[5] BROGLIE, L. DE, et ANDRADE E SILVA, J. — *C. R. Ac. Sc.*, **263**: 645, 1966; ANDRADE E SILVA, J. — *C. R. Ac. Sc.*, **264**: 909 et 1045, 1967.

[6] BROGLIE, L. DE — *La théorie de la mesure en Mécanique ondulatoire*, Paris, Gauthier-Villars, 1957, pp. 81-83.

[7] D'après LANDAU, L., et PEIERLS, P. — *Z. Physik*, **69**: 56, 1931, il y aurait une limitation intrinsèque à la précision de la mesure de q, s'exprimant sous la forme $\Delta q \geqslant h/\mathrm{mc}$. Quoi qu'il en soit, il deviendra évident par la suite que nous n'avons pas à en tenir compte ici.

[8] Voir la reférence [4] et FER, F. — *Les solutions singulières des équations d'onde et la théorie de la double solution* (thèse), Paris, 1956; THIOUNN, M. — *Cahier de Physique* n.º 174, 1965; *Portgal. Phys.*, **4**: 185, 1966.