CONTRIBUTION A LA MECANIQUE ONDULATOIRE DE LA PARTICULE DE SPIN MAXIMUM 1 (*)

José Vassalo Pereira

ABSTRACT — A generalization of the theory of the spin maximum 1 particle is proposed which enables the theory to describe a charged particle moving in an electromagnetic field.

The general problem of passing from the relativistic theories to the corresponding non-relativistic ones is then discussed, in which we stress the importance of the «β-approximation».

One then calculates the non relativistic approximation of the foregoing generalized theory of the particle of spin maximum 1, which brings to light the validity of the so-called «method of the fusion» within the frame of non relativistic Wave Mechanics. As a particular case of the preceding results, we are led to the approximation of the Maxwell-de Broglie equations. describing the non relativistic bahaviour of the photon.

RESUME — On présente d'abord une généralisation de la théorie de la particule de spin maximum 1 au cas des particules se déplaçant dans un champ électromagnétique.

Le problème général du passage des théories rélativistes aux théories non rélativistes correspondantes est ensuite étudié, ce qui nous permet de mettre en relief l'importance de l'«approximation en β».

Nous calculons l'approximation non relativiste de la théorie généralisée de la particule de spin maximum 1 pour en conclure que la «méthode de fusion» reste aussi valable au niveau non relativiste. Comme un cas particulier de ces résultats, on est conduit à l'approximation des équations de Maxwell-de Broglie, décrivant le comportement non relativiste du photon.

(*) Thèse présentée à l'Université de Paris VI pour obtenir le grade de Docteur ès Sciences Physiques.

Reçu le 1er Juillet 1971.

INTRODUCTION

Les résultats exposés dans notre travail sont une contribution à la théorie de la particule de spin maximum 1, théorie proposée par M. de Broglie en 1934 et développée surtout dans le but de constituer une Mecanique Ondulatoire du Photon. Dans cette thèse nous présentons notamment une généralisation de la théorie au cas des particules chargées se déplaçant dans un champ électromagnétique et étudions en détail le problème de l'approximation non relativiste.

Dans le Chapitre I nous présentons un bref rappel des idées et des résultats fondamentaux obtenus par M. de Broglie et ses collaborateurs. On commence par présenter la méthode de fusion et la forme spinorielle des équations fondamentales, pour en déduire ensuite la forme tensorielle équivalente de ces équations. Celles-ci se séparent en deux groupes indépendants, celui des «équations maxwelliennes», décrivant le comportement de la particule de spin 1, et celui des «équations non maxwelliennes», ayant trait à la particule de spin 0. On expose ensuite le sens physique des grandeurs tensorielles de champ associées à chaque type de particule.

Au Chapitre II nous proposons une généralisation de la théorie au cas des particules chargées. Nous y exposons d'abord les difficultés soulevées par la généralisation formelle des équations spinorielles fondamentales, pour ensuite résoudre le problème en introduisant le Lagrangien et les équations spinorielles de la particule de spin maximum 1 et charge q. Ces résultats permettent de développer le formalisme de la théorie généralisée, ce qui nous amène à étudier le quadrivecteur densité-flux de probabilité s_μ et le tenseur densité d'énergie-impulsion $T_{\mu\nu}$. Enfin, nous comparons quelques uns de nos résultats avec des résultats correspondantes dûs à A. Proca.

Avant d'entreprendre au Chapitre IV un calcul aboutissant à l'approximation non relativiste des équations généralisées, nous examinons au Chapitre III le problème général du passage des théories relativistes aux théories non relativistes correspondantes. L'étude des relations entre le groupe de Lorentz et celui de Galilée nous conduira ainsi à prendre l'approximation en $\beta = v/c$ comme étant celle qui assure le passage correct au niveau non relativiste. L'approximation non relativiste de l'impulsion et de l'énergie appuie cette hypothèse et, une fois que l'on a exposé le procédé général d'approximation non relativiste en Mécanique Ondulatoire, la même hypotèse sera confirmée lors du passage de l'équation de Klein-Gordon à l'équation de Schrödinger et dans le passage des équations de Dirac aux équations de Pauli. Dans cette dernière partie on traitera, plus généralement, du raccord entre le formalisme de la théorie de Dirac et celui de la théorie de Pauli.

La première partie du Chapitre IV est entièrement occupée par le calcul de l'approximation non relativiste des équations spinorielles généralisées, conduisant aux équations non relativistes de la particule de spin maximum 1 et charge q se déplaçant dans un champ électromagnétique. Ces équations montrent clairement que la méthode de fusion reste valable à l'approximation non relativiste ou, plus précisément, que par le même procédé formel la fusion de deux corpuscules de Pauli permet d'obtenir les équations non relativistes de la particule de spin maximum 1. Le formalisme découlant de ces nouvelles équations est étudié, de même que la forme vectorielle des équations.

Le Chapitre V s'occupe spécialement de l'étude du photon à l'approximation non relativiste. On en présente d'abord les équations, après quoi on discute la signification physique des grandeurs électromagnétiques non relativistes. On compare la forme finale des équations non relativistes de la particule de spin maximum 1 avec les équations maxwelliennes et non maxwelliennes présentées au Chapitre II, la dernière partie étant consacrée à l'étude non relativiste des solutions du type onde plane monochromatique.

Que M. de Broglie veuille bien trouver ici l'expression de ma respectueuse reconnaissance par l'intérêt qu'il n'a cessé de porter à ce travail. Ses suggestions m'ont toujours été très profitables, de même que la fréquentation de son Séminaire à l'Académie des Sciences.

Je remercie M.^me M.-A. TONNELAT, Professeur à l'Institut HENRI POINCARÉ, qui a bien voulu accepter d'être présente dans le jury de thèse.

Je tiens à exprimer toute ma gratitude à M. J. ANDRADE E SILVA, Maître de Recherches au C. N. R. S., qui me proposa le sujet de cette thèse et qui, par ses conseils, son expérience et son aide amicale, m'initia à la recherche scientifique.

Je remercie aussi M. GEORGES LOCHAK des nombreuses discussions que nous avons eues, de ses remarques au sujet de ce travail et de son amicale bienveillance.

Enfin, je ne saurais oublier que c'est grâce à l'appui matériel de l'Instituto de Alta Cultura (Lisbonne) que j'ai pu mener à bien les recherches qui font l'objet de ce travail.

CHAPITRE 1

Rappel de la théorie de la particule de spin maximum 1

§ 1. La méthode de la fusion et la forme spinorielle des équations fondamentales.

Comme nous l'avons rappelé dans l'Introduction, la théorie de la particule de spin maximum 1 est due à M. de Broglie [1] et a été dévéloppée par lui-même et ses collaborateurs, notamment M.[me] Tonnelat [2] et MM. Géhéniau [3] et Pétiau [4]. La méthode de fusion, dont M. de Broglie s'inspira pour parvenir aux équations de la particule de spin maximum 1, conduisit, par la suite, à une théorie générale des particules de spin quelconque [5]. Cette théorie se trouvant en dehors du cadre de notre travail, on se bornera ici à exposer les aspects essentiels de la seule théorie de la particule de spin maximum 1.

La méthode de fusion s'appuie sur l'idée que la particule de spin maximum 1 peut être considérée comme étant due à la «fusion» de deux corpuscules de spin 1/2, laquelle peut donner lieu soit à une particule de spin 0 soit à une particule spin 1. Dans ce contexte, les équations de Dirac jouent un rôle fondamental, car le procédé formel qui traduit mathématiquement la fusion des corpuscules composants consiste, en particulier, à fusionner les matrices α_μ qui apparaissent dans les équations de Dirac.

Pour préciser ce concept de fusion de matrices, donnons-nous une matrice $n \times n$ α; on définit alors les matrices fusionnées de α comme étant deux matrices $n \times n$, a et b, obtenues en prenant le produit extérieur de α par I (matrice identité $n \times n$) et de I par α:

$$\text{I. 1} \qquad a = \alpha \times I \qquad b = I \times \alpha .$$

Rappelons que le produit extérieur de deux matrices $n \times n$ A et B est une matrice $n \times n$, $A \times B$, qui s'obtient en remplaçant chaque élément a_{ik} de A par $a_{ik} B$. En conséquence, si $\alpha = [a_{ik}]$ $(i, k = 1, 2, \cdots, n)$, on a

$$\text{I. 2} \qquad a = \alpha \times I = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & a_{1n} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{11} & 0 & \cdots & 0 & a_{1n} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_{11} & \cdots & 0 & 0 & a_{1n} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & & \ddots \\ & & & & & & & \\ a_{n1} & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & a_{n1} & 0 & \cdots & 0 & a_{nn} & 0 & \cdots \\ 0 & 0 & a_{n1} & \cdots & 0 & 0 & a_{nn} & \cdots \\ \vdots & & & \ddots & \vdots & & & \ddots \end{bmatrix}$$

$$b = I \times \alpha = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} & 0 & 0 \cdots & & & \\ a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} & 0 & 0 \cdots & & & \\ \vdots & & \vdots & & & & & \\ & & & & & & & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{nn} & 0 & 0 \cdots & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & & & & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & & & & \\ & & & & & a_{11} & a_{12} & \cdots a_{1n} \\ & & & & & a_{21} & a_{22} & \cdots a_{2n} \\ & & & & & \vdots & & \\ & & & & & a_{n1} & a_{n2} & \cdots a_{nn} \end{bmatrix}$$

A partir de ces définitions on vérifie aisément les relations qui nous seront utiles par la suite

$$\text{I. 3} \qquad \begin{gathered} A \times (B + C) = (A \times B) + (A \times C) ; \\ (A \times B)(C \times D) = (A\, C) \times (B\, D) . \end{gathered}$$

Chaque corpuscule de spin $1/2$ et de masse propre $m_0/2$ étant traduit par un système d'équations de Dirac, tant que les deux corpuscules demeurent sans interaction leur description est donnée par un ensemble de deux équations de Dirac,

$$\text{I. 4} \qquad \begin{aligned} &\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\alpha_1-\frac{\partial}{\partial y}\alpha_2-\frac{\partial}{\partial z}\alpha_3-i\frac{m_0 c}{2\hbar}\alpha_4\right]\psi_1=0 \\ &\left[\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}-\frac{\partial}{\partial x}\alpha_1-\frac{\partial}{\partial y}\alpha_2-\frac{\partial}{\partial z}\alpha_3-i\frac{m_0 c}{2\hbar}\alpha_4\right]\psi_2=0 . \end{aligned}$$

D'après la méthode de fusion, pour obtenir les équations de la particule de spin maximum 1 on doit procéder dans I. 4 aux trois substitutions suivantes: 1) les matrices α_μ sont remplacées par leurs matrices fusionnées

$$\text{I. 5} \qquad a_\mu=\alpha_\mu\times I , \qquad b_\mu=I\times\alpha_\mu \qquad (\mu=1,2,3,4) ;$$

2) la masse $m_0/2$ de chaque corpuscule composant fait place dans les équations finales à la masse m_0 de la particule résultante de la fusion; 3) les fonctions d'onde ψ_1 et ψ_2 à quatre composantes, décrivant séparément chaque corpuscule, sont remplacées par une seule fonction ψ à $4\times4=16$ composantes traduisant le comportement de la particule de spin maximum 1 résultante. Le système d'équations de cette particule de vient ainsi (*):

$$\text{I. 6} \qquad \begin{aligned} &\left[\frac{1}{c}\,\partial_t-\partial_x a_1-\partial_y a_2-\partial_z a_3-\frac{i\,m_0 c}{\hbar}a_4\right]\psi=0 \\ &\left[\frac{1}{c}\,\partial_t-\partial_x b_1-\partial_y b_2-\partial_z b_3-\frac{i\,m_0 c}{\hbar}b_4\right]\psi=0 . \end{aligned}$$

Dans la matrice colonne ψ, chaque élément est identifié au moyen de deux indices, ik, les seize élément ψ_{ik} étant ordonnés de la façon suivante (**): $\psi_{11}\psi_{12}\psi_{13}\psi_{14}\psi_{21}\psi_{22}\psi_{23}\cdots\psi_{42}\psi_{43}\psi_{44}$. En conséquence, les éléments de chaque matrice 16×16 a_μ et b_μ sont identifiés au moyen de quatre indices, ik, lm; plus précisément, $(a_\mu)_{ik,lm}$ est l'élément qui se trouve dans la ligne ik et la colonne lm de la matrice a_μ, chaque paire d'indices ik

(*) Les dérivées $\frac{\partial}{\partial x}\,\frac{\partial}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial z}\,\frac{\partial}{\partial t}$ sont désignées, d'une façon abrégée, par $\partial_x\,\partial_y\,\partial_z\,\partial_t$.

(**) Signalons que la variance de ψ_{ik} est celle d'un produit $\psi_i\psi_k$ de deux composantes d'un spineur de Dirac.

et lm étant ordonnée comme les composantes ψ_{ik} dans ψ. En tenant compte de ce qui précède, on peut donner aux définitions I. 5 la forme équivalente

$$\text{I. 7} \qquad (a_\mu)_{ik\,,\,lm} = \alpha_{il}\,\delta_{km}\,, \quad (b_\mu)_{ik\,,\,lm} = \alpha_{km}\,\delta_{il}\,,$$

δ_{ik} désignant le symbole de Kronecker. Avec ces notations, il est clair que l'expression $a_\mu \psi$, par exemple, désigne la matrice colonne $(a_\mu \psi)_{ik} = \sum_{lm} (a_\mu)_{ik\,,\,lm}\,\psi_{lm}$. Signalons aussi que, les matrices α_μ étant hermitiques, a_μ et b_μ le sont également car on a, par I. 7,

$$\text{I. 8} \qquad (a_\mu)^*_{ik\,,\,lm} = (a_\mu)_{lm\,,\,ik}\,, \quad (b_\mu)^*_{ik\,,\,lm} = (b_\mu)_{lm\,,\,ik}\,.$$

En outre, les huit matrices a_μ et b_μ obéissent à des relations de commutation identiques à celles de Dirac pour les α_μ. En effet, on tire de I. 3 et I. 5 que

$$a_\mu a_\nu + a_\nu a_\mu = ((\alpha_\mu \alpha_\nu) \times I) + ((\alpha_\nu \alpha_\mu) \times I) = (\alpha_\mu \alpha_\nu + \alpha_\nu \alpha_\mu) \times I\,,$$

une relation analogue ayant lieu pour les b_μ. On a donc

$$\left.\begin{aligned} &\text{I. 9} \qquad a_\mu a_\nu + a_\nu a_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu} I \\ &\text{I. 10} \qquad b_\mu b_\nu + b_\nu b_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu} I \end{aligned}\right\} \quad (\mu\,,\nu = 1\,,2\,,3\,,4).$$

On démontre de la même façon la relation suivante

$$\text{I. 11} \qquad a_\mu b_\nu - b_\nu a_\mu = 0 \qquad (\mu\,,\nu = 1\,,2\,,3\,,4)\,.$$

Retournons maintenant aux équations spinorielles fondamentales I. 6. La question qui se pose d'emblée dans leur étude est celle de la compatibilité du système car il contient 32 équations, les composantes ψ_{ik} de la fonction d'onde ψ étant au nombre de 16. En omettant la démonstration [6], nous devons néanmoins rappeler ici que le système I. 6 demeure effectivement compatible au cours du temps.

Signalons encore que, à l'instar de ce qui arrive pour toutes les équations d'évolution de la Mécanique Ondulatoire, les équations I. 6 permettent d'établir aisément une relation de continuité,

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0\,,$$

les expressions de ρ et $\vec{j}$ étant les suivantes:

I. 12
$$\rho = \psi^* \frac{a_4 + b_4}{2} \psi$$

I. 13
$$\vec{j} = -c\psi^* \frac{a_4 \vec{b} + \vec{a} b_4}{2} \psi .$$

On considère I. 12 et I. 13 comme fournissant l'expression de la densité de probabilité et du flux de probabilité de la particule de spin maximum 1.

§ 2. La forme tensorielle des équations fondamentales.

Les équations I. 6 traduisent le comportement de la particule obtenue par la fusion de deux corpuscules de Dirac et, par là même, décrivent deux particules de valeur de spin différente, 0 ou 1. On doit donc pouvoir écrire ces équations sous une forme équivalente où apparaissent séparées les équations ayant trait à la particule de spin 0 et celles concernant la particule de spin 1. Aussi va-t-on rappeler brièvement dans ce qui suit le procédé qui permet d'obtenir un système équivalent à I. 6 et dans lequel la description de la particule de spin 0 est donnée indépendamment de celle de spin 1.

Pour cela, multiplions à gauche la première équation de I. 6 par $-i a_4$ et la deuxième par $-i b_4$. En tenant compte de I. 9 et I. 10, on obtient

I. 14
$$\left(\left[\frac{1}{ic}\partial_t \alpha_4 + \vec{\nabla}\cdot(i\alpha_4\vec{\alpha}) - k_0\right]\times I\right)\psi = 0$$
$$\left(I \times \left[\frac{1}{ic}\partial_t \alpha_4 + \vec{\nabla}\cdot(i\alpha_4\vec{\alpha}) - k_0\right]\right)\psi = 0,$$

k_0 désignant la constante

I. 15
$$k_0 = \frac{m_0 c}{\hbar}.$$

Introduisons ici les coordonnées relativistes $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$, et employons aussi les matrices γ_μ de von Neumann

($\mu = 1, 2, 3, 4$), définies à partir des matrices α_μ de Dirac de la façon suivante,

I. 16 $$\gamma_k = i\,\alpha_4\,\alpha_k \qquad (k = 1, 2, 3); \qquad \gamma_4 = \alpha_4 .$$

Le système I. 14 s'écrit alors

$$[(\Sigma\,\partial_\mu\,\gamma_\mu - k_0) \times I]\,\psi = 0$$

$$[I \times (\Sigma\,\partial_\mu\,\gamma_\mu - k_0)]\,\psi = 0 .$$

En utilisant, au lieu de la matrice colonne ψ, la matrice 4×4

I. 17 $$\Psi = \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{bmatrix},$$

on vérifie aisément, compte tenu de I. 7, que le système peut se mettre sous la forme équivalente

I. 18 $$\begin{aligned} &\Sigma\,\partial_\mu\,\gamma_\mu\,\Psi - k_0\,\Psi = 0 \\ &\Sigma\,\partial_\mu\,\Psi\,\gamma_\mu^T - k_0\,\Psi = 0 , \end{aligned}$$

le symbole T désignant la matrice transposée. Arrêtons-nous maintenant sur le choix des matrices α_μ de Dirac. Comme il est bien connu, on a toute liberté de fixer leurs valeurs pour autant que celles-ci obéissent aux relations $\alpha_\mu\,\alpha_\nu + \alpha_\nu\,\alpha_\mu = 2\,\delta_{\mu\nu}$. Or on peut voir que les matrices

I. 19 $$\alpha_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \alpha_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & +i \\ 0 & 0 & -i & 0 \\ 0 & +i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

$$\alpha_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \alpha_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

remplissent les conditions exigées et, dans tout notre travail, nous allons adopter ce choix por les α_μ. Partant de I. 19 on peut construire les quatre γ_μ définis en I. 16. Construisons aussi la matrice

I. 20 $$\Gamma = i\,\gamma_2\,\gamma_4\,.$$

On peut ainsi vérifier que l'on a les égalités

I. 21 $$\gamma_\mu^T\,\Gamma = -\Gamma\,\gamma_\mu \qquad (\mu = 1\,,2\,,3\,,4)\,.$$

Retournons alors aux équations I. 18 et multiplions-les à droite par Γ. En tenant compte de I. 21, on obtient

$$\Sigma\,\partial_\mu\,\gamma_\mu\,\Psi\,\Gamma - k_0\,\Psi\,\Gamma = 0$$

$$\Sigma\,\partial_\mu\,\Psi\,\Gamma\,\gamma_\mu + k_0\,\Psi\,\Gamma = 0\,,$$

c'est à dire, en ajoutant et retranchant,

I. 22 $$\begin{aligned}&\Sigma\,\partial_\mu\,\gamma_\mu\,\Psi\,\Gamma + \Sigma\,\partial_\mu\,\Psi\,\Gamma\,\gamma_\mu = 0\\ &\Sigma\,\partial_\mu\,\gamma_\mu\,\Psi\,\Gamma - \Sigma\,\partial_\mu\,\Psi\,\Gamma\,\gamma_\mu = 2\,k_0\,\Psi\,\Gamma\,.\end{aligned}$$

Considérons maintenant le système complet engendré par les quatre matrices γ_μ. Ce système, désigné d'une façon abrégée par γ_a, comprendra:

I. 23 *a*) les cinq matrices $\gamma_0 = \mathrm{I}$, $\gamma_k = i\,\alpha_4\,\alpha_k\,(k = 1\,,2\,,3)$, $\gamma_4 = \alpha_4$;

b) les six matrices $\gamma_{\mu\nu} = i\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,(\mu\,,\nu = 1\,,2\,,3\,,4\,;\,\mu < \nu)$, c'est à dire, $\gamma_{12} = i\,\gamma_1\,\gamma_2$, $\gamma_{13} = i\,\gamma_1\,\gamma_3$, $\gamma_{14} = i\,\gamma_1\,\gamma_4$, $\gamma_{23} = i\,\gamma_2\,\gamma_3$, $\gamma_{24} = i\,\gamma_2\,\gamma_4$ et $\gamma_{34} = i\,\gamma_3\,\gamma_4$;

c) les quatre matrices $\gamma_{\mu\nu\rho} = i\,\gamma_\mu\,\gamma_\nu\,\gamma_\rho\,(\mu\,,\nu\,,\rho = 1\,,2\,,3\,,4\,;\,\mu < \nu < \rho)$, c'est à dire, $\gamma_{123} = i\,\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3$, $\gamma_{124} = i\,\gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_4$ $\gamma_{134} = i\,\gamma_1\,\gamma_3\,\gamma_4$ et $\gamma_{234} = i\,\gamma_2\,\gamma_3\,\gamma_4$;

d) la matrice $\gamma_{1234} = \gamma_1\,\gamma_2\,\gamma_3\,\gamma_4$.

En partant du choix adopté pour les α_μ (I. 19), on peut vérifier que les seize γ_a précédemment définies sont toutes hermitiques. En plus, cet ensemble de seize matrices étant complet, toute matrice 4×4 peut être écrite comme combinaison linéaire des γ_a. En particulier, ce sera le cas pour la matrice 4×4 $\Psi \Gamma$ qui intervient dans I. 22, laquelle peut donc s'écrire sous la forme d'un développement

I. 24
$$\Psi \Gamma = \sum_{a=1}^{16} \varphi_a \gamma_a .$$

Les coefficientes φ_a sont des fonctions linéaires bien déterminées des ψ_{ik} et possèdent des propriétés de variance bien précises qui ont été données en [7]. Nous nous bornerons ici à les rappeler φ_0 est un scalaire, φ_{1234} est un pseudo-scalaire, et $\varphi_\mu (\mu = 1, 2, 3, 4)$ est un vecteur d'Univers; pour ce qui est des six fonctions $\varphi_{\mu\nu} (\mu, \nu = 1, 2, 3, 4; \mu < \nu)$ et des quatre fonctions $\varphi_{\mu\nu\rho} (\mu, \nu, \rho = = 1, 2, 3, 4; \mu < \nu < \rho)$ elles sont, respectivement, les composantes distinctes d'un tenseur de rang 2 antisymétrique et d'un tenseur de rang 3 complètement antisymétrique.

En introduisant maintenant le développement I. 24 dans les équations I. 22, celles-ci prennent la forme

I. 25
$$\sum_{\mu=1}^{4} \partial_\mu \gamma_\mu \left(\sum_a^{16} \varphi_a \gamma_a \right) + \sum_\mu^4 \partial_\mu \left(\sum_a^{16} \varphi_a \gamma_a \right) \gamma_\mu = 0$$
$$\sum_\mu \partial_\mu \gamma_\mu \left(\sum_a^{16} \varphi_a \gamma_a \right) - \sum_\mu \partial_\mu \left(\sum_a \varphi_a \gamma_a \right) \gamma_\mu - 2\, k_0 \sum_a^{16} \varphi_a \gamma_a = 0$$

Les définition set les propriétés de commutation des γ_a permettent alors d'écrire les premiers membres de ces équations comme des combinaisons linéaires des seize γ_a. On est ainsi conduit à des équations de la forme

$$\sum_a^{16} f_a \gamma_a = 0 \qquad \sum_a^{16} g_a \gamma_a = 0 ,$$

où les f_a et g_a sont des fonctions bien déterminées des φ_a et de leurs dérivées premières. Les γ_a étant linéairement indépendantes, il en découle que chaque coefficient f_a et g_a doit être nul, ce qui permet d'obtenir les 32 équations

$$f_a = 0 \qquad g_a = 0 .$$

D'une façon plus précise, et en omettant les calculs, le système I. 25 conduit aux équations suivantes,

$$\text{I. 26} \qquad \begin{array}{ll} \partial_\mu \varphi_\mu = 0 & \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu = i k_0 \varphi_{\mu\nu} \\ \partial_\mu \varphi_{\mu\nu} = -i k_0 \varphi_\nu & \partial_\mu \varphi_{\nu\rho} + \partial_\rho \varphi_{\mu\nu} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} = 0 \end{array}$$

$$\text{I. 27} \qquad \begin{array}{ll} \varphi_0 = 0 & \\ \partial_\nu \varphi_0 = 0 & \partial_\mu \varphi_{\mu\nu\rho\sigma} = i k_0 \varphi_{\nu\rho\sigma} \\ \partial_\mu \varphi_{\mu\nu\rho} = 0 & \partial_\mu \varphi_{\nu\rho\sigma} - \partial_\nu \varphi_{\rho\sigma\mu} + \partial_\rho \varphi_{\sigma\mu\nu} - \partial_\sigma \varphi_{\mu\nu\rho} = -i k_0 \varphi_{\mu\nu\rho\sigma} . \end{array}$$

Ces équations sont équivalentes aux équations spinorielles I. 6 et, ainsi qu'on l'avait annoncé plus haut, elles se séparent en deux groupes bien distincts: l'un est formé par les équations I. 26 et ne fait intervenir que les grandeurs φ_μ et $\varphi_{\mu\nu}$, l'autre contient les équations I. 27 et concerne seulement les fonctions φ_0, $\varphi_{\mu\nu\rho}$ et φ_{1234}. Le premier groupe d'équations se rapporte à la particule de spin 1 dont le comportement est ainsi décrit par un tenseur antisymétrique du second rang et par un vecteur d'Univers; étant donnée l'étroite parenté de I. 26 avec les équations classiques de l'électromagnétisme, M. de Broglie les a dénommées «équations maxwelliennes» [1]. Le second groupe, formé par les «équations non maxwelliennes» I. 27, a trait à la particule de spin 0 qui apparait ainsi décrite par deux invariants et un tenseur de rang 3 complètement antisymétrique.

§ 3. Les équations maxwelliennes et non maxwelliennes.

La signification physique des grandeurs de champ $\varphi_\mu, \varphi_{\mu\nu}$ associées à la particule de spin 1 a été donnée par M. de Broglie au moyen de l'identification suivante avec les grandeurs électro-

[1] La raison de cette désignation deviendra plus claire au paragraphe suivant lorsqu'on écrira les équations I. 26, I. 27 sous la forme I. 30, I. 31.

magnétiques $\vec{A}, V, \vec{E}, \vec{H}$ (1):

I. 28
$$\begin{bmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{bmatrix} = K k_0 \begin{bmatrix} 0 & \varphi_{12} & \varphi_{13} & \varphi_{14} \\ \varphi_{21} & 0 & \varphi_{23} & \varphi_{24} \\ \varphi_{31} & \varphi_{32} & 0 & \varphi_{34} \\ \varphi_{41} & \varphi_{42} & \varphi_{43} & 0 \end{bmatrix}$$
$$[A_x A_y A_z ; iV] = -iK[\varphi_1 \varphi_2 \varphi_3 ; \varphi_4],$$

avec $K = \hbar/2\sqrt{m_0}$. D'une façon analogue, on définit pour la particule de spin 0:

I. 29
$$\varphi_0 = I_1 \qquad\qquad \varphi_{1234} = i I_2$$
$$\varphi_{234} = i\sigma_1 \qquad \varphi_{134} = -i\sigma_2 \qquad \varphi_{124} = i\sigma_{\bar{3}} \qquad \varphi_{123} = \sigma_4 .$$

Avec ces définitions, les équations I. 26 et I. 27 prennent la forme suivante,

équations maxwelliennes

I. 30
$$\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\partial_t V = 0 \qquad \vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c}\partial_t \vec{A}$$
$$\frac{1}{c}\partial_t \vec{E} - \operatorname{rot}\vec{H} = k_0^2 \vec{A} \qquad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}$$
$$\operatorname{div}\vec{E} = -k_0^2 \qquad -\frac{1}{c}\partial_t \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{E}$$
$$\operatorname{div} H = 0$$

équations non maxwelliennes

I. 31
$$I_1 = 0 \qquad \frac{1}{c}\partial_t \vec{\sigma} + \operatorname{grad}\sigma_4 = 0$$
$$\operatorname{grad} I_1 = 0 \qquad i k_0 \sigma_4 = -\frac{1}{c}\partial_t I_2$$
$$\partial_t I_1 = 0 \qquad \operatorname{grad} I_2 = i k_0 \vec{\sigma}$$
$$\operatorname{rot}\vec{\sigma} = 0 \qquad \frac{1}{c}\partial_t \sigma_4 + \operatorname{div}\vec{\sigma} = i k_0 I_2 .$$

En laissant de côté les équations non maxwelliennes dont la signification ne parait pas très claire, nous nous occuperons des

(1) C'est à dire, le potentiel vecteur, le potentiel scalaire, le champ électrique et le champ magnétique, respectivement.

équations de la particule de spin 1. Ces équations appellent de nombreuses remarques et nous voulons en relever quelques unes, touchant à l'ordre de grandeur de k_0 ou, ce qui revient au même, de la masse propre $m_0 = \frac{\hbar}{c} k_0$.

Signalons, avant tout, que sans l'hypothèse $m_0 \neq 0$ on ne saurait obtenir les équations I. 6 par le procédé décrit en I. § 1, ne serait-ce parce que les équations de Dirac ne sont pas à même de décrire correctement des corpuscules de spin 1/2 et de masse nulle. En plus, la valeur non nulle de k_0 introduit des différences entre les équations maxwelliennes et les équations de l'électromagnétisme habituel, notamment que les potentiels électromagnetiques $\vec{A}$ et V ne sont plus ici des fonctions auxiliaires de calcul, mais de véritables grandeurs de champ. C'est ce que montrent les équations I. 30 qui assignent des valeurs bien déterminées pour $\vec{A}$ et V en partant des valeurs assumées par $\vec{E}$ et $\vec{H}$. L'ambiguité laissée par la théorie de Maxwel aux valeurs de $\vec{A}$ et V disparait ainsi, les potentiels électromagnétiques devenant des variables de champ à part entière (*).

Pourtant, si la masse propre du photon n'est pas nulle, elle doit certainement posséder une valeur extrêmement petite, dont la borne supérieure est située par M. de Broglie aux environs de 10^{-45} grammes, la petitesse même de cette valeur lui ayant permis d'écarter toutes les objections soulevées par l'hypothèse $m_0 \neq 0$ [8].

En conséquence, les termes en m_0^2 des équations I. 30 sont, eux aussi, extrêmement petits et dans une étude moins précise on peut raisonnablement les négliger. Faisant ainsi, on retrouve exactement les équations habituelles de l'électromagnétisme de Maxwell. On peut donc penser que pour la description quantique--et donc plus approfondie — du photon, les équations de Maxwell doivent être remplacées par les équations maxwelliennes I. 30, les deux théories s'identifiant à un niveau moins poussé toutes fois que l'on prend $k_0^2 \simeq 0$.

Avant de finir ce chapitre nous voulons souligner une différence fondamentale entre la nature des variables de champ telles que nous les définissons en Mécanique Ondulatoire du Photon

(*) Signalons que les expériences de Boersch et ses collaborateurs [9], faisant suite à une analyse théorique de Bohm et Aharonov [10], appuyent l'hypothèse de la réalité physique des potentiels.

et telles qu'eles sont considérées en théorie de Maxwell. En théorie du photon, comme d'ailleurs dans toute la Mécanique Ondulatoire, les composantes ψ_{ik} de la fonction d'onde sont des fonctions complexes et, par suite de I. 24 et I. 28, les variables $\vec{A}$, V, $\vec{E}$ et $\vec{H}$ le sont également. On doit opposer cela à ce qui a lieu dans l'électromagnétisme usuel où ces mêmes grandeurs de champ sont évidemment réelles. Rappelons, en effet, que si on est parfois amené à les considérér comme des grandeurs complexes, il n'en reste pas moins que c'est là un expédient mathématique utile pour mener à bien certains calculs et qui ne doit jamais nous faire oublier la nature réelle que la théorie de Maxwell assigne aux fonctions de champ [11].

CHAPITRE II

Généralisation de la théorie au cas des particules chargées

§ 1. Sur l'incompatibilité du système obtenu par la généralisation formelle de I. 6.

Le but du présent chapitre est de chercher à généraliser la théorie de la particule de spin maximum 1 de façon à lui permettre de décrire le comportement des particules de charge q se déplaçant dans un champ électromagnétique défini par les potentiels $\vec{A}$ et V [12]. Ce sera notamment le cas d'une particule α en cours d'accélération dans une machine à haute énergie. Soulignons avant tout que dans la plupart des équations de la Mécanique Ondulatoire des généralisations de ce type ne soulèvent aucune difficulté. En effet, une équation d'évolution de la Mécanique Ondulatoire peut toujours se représenter formellement par

$$\text{II. 1} \qquad f(-i\hbar\,\partial_t,\ i\hbar\,\partial_x,\ i\hbar\,\partial_y,\ i\hbar\,\partial_z)\psi = 0,$$

où f désigne une certaine fonction des opérateurs $-i\hbar\,\partial_t$ et $i\hbar\vec{\nabla}$ (et éventuellement de certaines matrices à éléments constants) appliquée à la fonction d'onde ψ pouvant posséder plusieurs composantes. Or la Mécanique Ondulatoire, en faisant correspondre un opérateur linéaire hermitique à chaque grandeur physique, définit les opérateurs d'énergie et d'impulsion comme étant $-i\hbar\,\partial_t$ et $i\hbar\vec{\nabla}$, respectivement:

$$\text{II. 2} \qquad \begin{aligned} E &\longleftrightarrow E_{op} = -i\hbar\,\partial_t \\ \vec{p} &\longleftrightarrow \vec{p}_{op} = \ \ i\hbar\vec{\nabla}. \end{aligned}$$

On doit remarquer que cette correspondance demeure la même dans le cas relativiste que dans le cas non relativiste, les opérateurs associés à l'énergie totale et à l'impulsion demeurant les mêmes (*). C'est pour cette raison que le schéma que nous décrivons ici contient les deux cas, l'équation II. 1 pouvant représenter une équation d'évolution aussi bien relativiste que non relativiste.

En vertu de II. 2, l'équation II. 1 peut s'écrire alors

II. 3 $$[f(E, p_x, p_y, p_z)]_{op}\,\psi = 0\,.$$

La généralisation au cas des particules chargées se fait en employant un procédé qui est suggéré par la Mécanique Analytique et qui consiste à substituer dans les équations d'évolution E et $\vec{p}$ par $E - qV$ et $\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}$, respectivement. Ceci revient à dire, en tenant compte de II. 2, que dans l'équation II. 3 les opérateurs doivent être remplacés comme suit:

II. 4 $$\begin{aligned} E_{op} &= -i\hbar\,\partial_t \longrightarrow (E - qV)_{op} = -i\hbar\,\partial_t - qV \\ \vec{p}_{op} &= i\hbar\vec{\nabla} \longrightarrow \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)_{op} = i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\,, \end{aligned}$$

l'équation généralisée devenant ainsi,

$$f\left(-i\hbar\,\partial_t - qV, i\hbar\,\partial_x - \frac{q}{c}A_x, i\hbar\,\partial_y - \frac{q}{c}A_y, i\hbar\,\partial_z - \frac{q}{c}A_z\right)\psi = 0\,.$$

C'est ce procédé que nous venons de rappeler qui nous donne par exemple, la généralisation de l'équation de Schrödinger, $[E - \vec{p}^2/2m]_{op} = 0$, qui devient $\left[E - qV - \frac{1}{2m}\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2\right]_{op} = 0$. Parallèlement, l'équation de Dirac, $\left[\frac{E}{c} + \vec{p}\cdot\vec{\alpha} - m_0 c\,\alpha_4\right]_{op} = 0$, se transforme en l'équation généralisée $\left[\frac{E - qV}{c} + \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\alpha} - \right.$ $\left. - m_0 c\,\alpha_4\right]_{op} = 0\,.$

(*) Nous reviendrons sur cette question au Chapitre III.

Le problème se pose alors d'obtenir une généralisation analogue pour les équations relativistes I. 6 de la particule de spin maximum 1,

II. 5
$$\left[\frac{1}{c}\partial_t - \partial_x a_1 - \partial_y a_2 - \partial_z a_3 - i k_0 a_4\right]\psi = 0$$
$$\left[\frac{1}{c}\partial_t - \partial_x b_1 - \partial_y b_2 - \partial_z b_3 - i k_0 b_4\right]\psi = 0.$$

Ce système, en faisant intervenir les définitions II. 2, peut s'écrire sous la forme

II. 6
$$[E/c + p_x a_1 + p_y a_2 + p_z a_3 - m_0 c a_4]_{op}\,\psi = 0$$
$$[E/c + p_x b_1 + p_y b_2 + p_z b_3 - m_0 c b_4]_{op}\,\psi = 0.$$

Si l'on veut maintenant obtenir la généralisation de II. 6 pour le cas des particules chargées, une difficulté apparait alors, à savoir, que si l'on y procède à la substitution habituelle II. 4, le système obtenu,

II. 7
$$\left[\frac{1}{c}(E - qV) + \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{a} - m_0 c a_4\right]_{op}\psi = 0$$
$$\left[\frac{1}{c}(E - qV) + \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{b} - m_0 c b_4\right]_{op}\psi = 0,$$

est incompatible. La raison en est que, à l'encontre de ce qui arrive en théorie de Klein-Gordon et en théorie de Dirac, nous avons affaire ici á un système contenant, outre les 16 équations d'évolution pour les 16 inconnues ψ_{ik}, 16 équations de condition. Dans le cas non généralisé le système est compatible parce que les équations d'évolution assurent la validité des équations de condition au cours du temps, une fois qu'elles sont supposées être respectées à un instant initial. Il n'en est plus de même ici comme nous allons le démontrer.

Commençons par ajouter et retrancher les équations de II. 7,

II. 8 a)
$$\left[\left(\frac{-i\hbar\,\partial_t - qV}{c}\right) + \left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2} - \right.$$
$$\left. - m_0 c\,\frac{a_4 + b_4}{2}\right]\psi = 0$$

$$b)\quad \left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}-m_0 c\,\frac{a_4-b_4}{2}\right]\psi=0,$$

de façon à séparer les 16 équations de condition II. 8b des 16 équations d'évolution II. 8a. Il s'agit donc de montrer que les équations d'évolution a) ne suffisent pas à assurer la validité des équations de condition b) au cours du temps ou, ce qui revient au même, que

$$\partial_t\left\{\left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}-m_0 c\,\frac{a_4-b_4}{2}\right]\psi\right\}\neq 0.$$

En effet, cette dérivée vient égale à

$$-\frac{q}{c}\left(\partial_t\vec{A}\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)\psi+\left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}-m_0 c\,\frac{a_4-b_4}{2}\right]\partial_t\psi,$$

et en y introduisant l'expression de $\partial_t\psi$ tirée de II. 8a, on obtient

$$\begin{aligned}
&-\frac{q}{c}\left(\partial_t\vec{A}\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)\psi-\\
&-\frac{q}{i\hbar}\left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}-m_0 c\,\frac{a_4-b_4}{2}\right]V\psi+\\
&+\frac{c}{i\hbar}\left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}-m_0 c\,\frac{a_4-b_4}{2}\right]\cdot\\
&\cdot\left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}-m_0 c\,\frac{a_4+b_4}{2}\right]\psi,
\end{aligned}$$

ce qui revient à écrire

$$\text{II. 9}\qquad\begin{aligned}
&-\frac{q}{c}\left(\partial_t\vec{A}\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)\psi-\\
&-\frac{q}{i\hbar}\left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}-m_0 c\,\frac{a_4-b_4}{2}\right]V\psi+\\
&+\frac{c}{i\hbar}\left[\sum_{k=1}^{3}\left(i\hbar\,\partial_k-\frac{q}{c}A_k\right)^2\frac{a_k-b_k}{2}\;\frac{a_k+b_k}{2}+\right.
\end{aligned}$$

$$+\sum_{k\neq l}^{3}\left(i\hbar\,\partial_l-\frac{q}{c}A_l\right)\left(i\hbar\,\partial_k-\frac{q}{c}A_k\right)\frac{a_l-b_l}{2}\,\frac{a_k+b_k}{2}-$$

$$-m_0 c\sum_k\left(i\hbar\,\partial_k-\frac{q}{c}A_k\right)\left(\frac{a_k-b_k}{2}\,\frac{a_4+b_4}{2}+\frac{a_4-b_4}{2}\,\frac{a_k+b_k}{2}\right)+$$

$$+m_0^2c^2\frac{a_4-b_4}{2}\,\frac{a_4+b_4}{2}\Bigg]\psi.$$

Or, en tenant compte de I. 9, I. 10, I. 11, on peut démontrer l'égalité suivante,

$$(a_\mu-b_\mu)(a_\nu+b_\nu)+(a_\nu-b_\nu)(a_\mu+b_\mu)=$$
$$=(a_\mu a_\nu+a_\nu a_\mu)-(b_\mu b_\nu+b_\nu b_\mu)=0,$$

et, cette relation étant valable pour $\mu,\nu=1,2,3,4$, on obtient en particulier

$$(a_k-b_k)(a_k+b_k)=0$$
$$(a_4-b_4)(a_4+b_4)=0$$
$$(a_k-b_k)(a_i+b_i)+(a_i-b_i)(a_k+b_k)=0$$
$$(a_k-b_k)(a_4+b_4)+(a_4-b_4)(a_k+b_k)=0 \qquad (i,k=1,2,3;i\neq k).$$

En outre, on reconnait aisément que l'on a aussi

$$\left(i\hbar\,\partial_l-\frac{q}{c}A_l\right)\left(i\hbar\,\partial_k-\frac{q}{c}A_k\right)-\left(i\hbar\,\partial_k-\frac{q}{c}A_k\right)\left(i\hbar\,\partial_l-\frac{q}{c}A_l\right)=$$
$$=i\hbar\frac{q}{c}\left(\text{rot}\,\vec{A}\right)_m,$$

l,k,m désignant une permutation circulaire de $1,2,3$.

La substitution en II. 9 des résultats précédents conduit alors à écrire

$$-\frac{q}{c}\left(\partial_t\vec{A}\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}\right)\psi-$$

$$-\frac{q}{i\hbar}\left[\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}-m_0c\frac{a_4-b_4}{2}\right]V\psi-$$

$$-q\left[\sum_{k,l,m}(a_l-b_l)(a_k+b_k)(\text{rot}\,\vec{A})_m\right]\psi.$$

Telle est donc l'expression de la dérivée par rapport au temps des équations de condition II. 8*b*. On voit que pour qu'elle soit toujours nulle il faut que $\partial_t \vec{A} = \text{rot}\, \vec{A} = V = 0$, ce qui équivaut à dire que les champs électromagnétiques extérieurs $\vec{E} = -\frac{1}{c}\, \partial_t \vec{A} - \text{grad}\, V$ et $\vec{H} = \text{rot}\, \vec{A}$ doivent être nuls, et l'on retombe ainsi sur les équations non généralisées du début.

La conclusion à en tirer est que l'on ne peut pas entreprendre la généralisation habituelle II. 4 sur les équations de la particule de spin maximum 1 — du moins sous leur forme II. 5 — sans arriver à un système qui ne soit incompatible.

§ 2. Les équations spinorielles de la particule de charge q et spin maximum 1.

Pour surmonter la difficulté signalée au paragraphe précédent nous remarquerons qu'il est possible d'écrire I. 6 sous la forme équivalente d'un système ne contenant que les 16 équations

$$\text{II. 10} \qquad \left[\frac{1}{c}\,\partial_t \frac{a_4 + b_4}{2} - \sum_{k=1}^{3} \partial_k \frac{a_4 b_k + a_k b_4}{2} - i\, k_0\, a_4\, b_4\right] \psi = 0 .$$

En effet, on démontre [6] que l'on peut déduire de ce système un autre ensemble de 16 équations, savoir,

$$\text{II. 11} \qquad \left[\frac{1}{c}\,\partial_t \frac{a_4 - b_4}{2} - \sum_{k=1}^{3} \partial_k \frac{a_4 b_k - a_k b_4}{2}\right] \psi = 0 .$$

Il suffit, pour cela, de multiplier II. 10 à gauche par $\frac{1}{c}\,\partial_t \frac{a_4 - b_4}{2}$ et de tenir compte de I. 9, I. 10, I. 11. On arrive ainsi aux équations

$$\frac{i\, k_0}{c}\,\partial_t \frac{a_4 - b_4}{2}\,\psi = \left(\sum_{k}^{3} \partial_k \frac{a_4 a_k - b_4 b_k}{2}\right) \frac{1}{c}\,\partial_t \frac{a_4 + b_4}{2}\,\psi .$$

Si l'on introduit dans ces équations l'expression de $\frac{1}{c}\,\partial_t \frac{a_4 + b_4}{2}\,\psi$ tirée de II. 10, un calcul sans difficulté conduit alors aux équations II. 11. Une fois II. 11 obtenu, on voit que II. 10, II. 11 est équivalent à II. 5. Effectivement, en ajoutant et retranchant II. 10 et II. 11, on obtient

$$\left[\frac{1}{c}\,\partial_t\,b_4-\sum_{k=1}^{3}\partial_k\,a_k\,b_4-i\,k_0\,a_4\,b_4\right]\psi=0$$

$$\left[\frac{1}{c}\,\partial_t\,a_4-\sum_{k}\partial_k\,a_4\,b_k-i\,k_0\,a_4\,b_4\right]\psi=0,$$

et en multipliant à gauche la première équation par b_4 et la deuxième par a_4, on retrouve le système II. 5.

On voit ainsi apparaitre l'importance du système de 16 équations II. 10, à partir duquel on pourrait tout aussi bien développer la théorie. Or, et c'est là un point très important, les équations II. 10 sont précisément les équations de Lagrange de la particule de spin maximum 1 (non chargée), et ce fait amène à penser que le formalisme lagrangien peut être utile pour venir à bout des difficultés signalées plus haut. D'ailleurs, étant donné que l'on va non seulement introduire les équations généralisées mais aussi refaire toute la théorie de la particule de spin maximum 1 supposée avoir maintenant une charge q et se déplacer dans un champ électromagnétique, nous allons rappeler rapidement quelques points de ce formalisme lagrangien qui seront utiles par la suite [8].

Ainsi peut-on voir, en prenant le Lagrangien

$$\text{II. 12}\quad \mathcal{L}_0=\frac{\hbar c}{2i}\psi^*\left[\frac{1}{c}\,\partial_t\,\frac{a_4+b_4}{2}-\vec{\nabla}\cdot\frac{a_4\,\vec{b}+\vec{a}\,b_4}{2}-i\,k_0 a_4 b_4\right]\psi+\text{conj},$$

que les équations de Lagrange

$$\text{II. 13}\qquad \partial_t\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi_{\mu\nu}}{\partial_t}\right)}+\partial_x\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi_{\mu\nu}}{\partial_x}\right)}+\partial_y\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi_{\mu\nu}}{\partial_y}\right)}+$$

$$+\,\partial_z\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\left(\dfrac{\partial\psi_{\mu\nu}}{\partial_z}\right)}=\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\psi_{\mu\nu}}\qquad(\mu,\nu=1,2,3,4),$$

donnent les équations II. 10 de la particule de spin maximum 1 (non chargée) ou, ce qui revient au même, les équations II. 5 car les deux systèmes sont équivalents.

Parallèlement, dans le cas de la théorie de Dirac, le même formalisme nous apprend que, étant donné le Lagrangien

$$\mathcal{L}_0^D = \frac{\hbar c}{2i} \psi^* \left[\frac{1}{c} \partial_t - \vec{\nabla} \cdot \vec{\alpha} - i k_0 \alpha_4 \right] \psi \,\mathrm{conj}\,,$$

les équations de Lagrange

$$\text{II. 14} \qquad \partial_t \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial_t} \right)} + \partial_x \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial_x} \right)} + \partial_y \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial_y} \right)} + \partial_z \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial_z} \right)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, 3, 4),$$

conduisent aux équations de Dirac. Nous n'avons considéré jusqu'à présent que le cas simple de la particule en absence de champs électromagnétiques extérieurs, mais on vérifie aisément que si l'on ajoute à $\mathcal{L}_0^D$ le le terme réel $\mathcal{L}_I^D = -q\,\psi^* [\vec{A} \cdot \vec{\alpha} + V]\,\psi$, alors, en faisant intervenir le Lagrangien $\mathcal{L}_0^D + \mathcal{L}_I^D$ dans les équations II. 14, on obtient les équations de Dirac généralisées pour la particule de charge q en présence d'un champ électromagnétique de potentiels $\vec{A}$ et V.

Or on sait qu'en théorie de la particule de spin maximum 1 plusieurs expressions — et c'est notamment le cas de $\mathcal{L}_0$ et $\mathcal{L}_0^D$ — peuvent s'obtenir formellement d'expressions correspondantes de la théorie de Dirac par la seule substitution de matrices

$$\text{II. 15} \qquad \begin{aligned} I &\longrightarrow \frac{a_4 + b_4}{2} \\ \alpha_\mu &\longrightarrow \frac{a_\mu b_4 + a_4 b_\mu}{2} \qquad (\mu = 1, 2, 3, 4), \end{aligned}$$

où $\alpha_\mu (\mu = 1, 2, 3, 4)$ sont les matrices de Dirac et I la matrice identité 4×4. Il y a donc lieu de penser que le Lagrangien $\mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I$, avec $\mathcal{L}_I$ obtenu de $\mathcal{L}_I^D$ par la substitution II. 15, sera le Lagrangien de la particule de spin maximum 1 et charge q en présence d'un champ électromagnétique de potentiels $\vec{A}$ et V.

Ce Lagrangien s'écrit alors

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \mathcal{L}_I = \mathcal{L}_0 - q\,\psi^* \left[\vec{A} \cdot \frac{a_4 \vec{b} + \vec{a}\, b_4}{2} + \frac{a_4 + b_4}{2} V \right] \psi,$$

c'est à dire, en tenant compte de II. 12,

II. 16 $$\mathcal{L} = \frac{\hbar c}{2i} \psi^*_{\sigma\tau} \left[\left(\frac{1}{c} \partial_t - \frac{iq}{\hbar c} V \right) \left(\frac{a_4 + b_4}{2} \right)_{\sigma\tau,\mu\nu} - \right.$$

$$\left. - \sum_k^3 \left(\partial_k + \frac{iq}{\hbar c} A_k \right) \left(\frac{a_4 b_k + a_k b_4}{2} \right)_{\sigma\tau,\mu\nu} - i k_0 (a_4 b_4)_{\sigma\tau,\mu\nu} \right] \psi_{\mu\nu} + \text{conj}$$

Pour en déduire les équations de Lagrange calculons les dérivées suivantes,

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_k \psi_{\mu\nu})} = - \frac{\hbar c}{2i} \left(\frac{a_k b_4 + a_4 b_k}{2} \right)_{\sigma\tau,\mu\nu} \psi^*_{\sigma\tau};$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_t \psi_{\mu\nu})} = \frac{\hbar}{2i} \left(\frac{a_4 + b_4}{2} \right)_{\sigma\tau,\mu\nu} \psi^*_{\sigma\tau};$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \psi_{\mu\nu}} = - \frac{\hbar c}{2i} \left[\left(\frac{1}{c} \partial_t + \frac{2iq}{\hbar c} V \right) \left(\frac{a_4 + b_4}{2} \right)_{\sigma\tau,\mu\nu} - \right.$$

$$\left. - \sum_k^3 \left(\partial_k - \frac{2iq}{\hbar c} A_k \right) \left(\frac{a_k b_4 + a_4 b_k}{2} \right)_{\sigma\tau,\mu\nu} + 2 i k_0 (a_4 b_4)_{\sigma\tau,\mu\nu} \right] \psi^*_{\sigma\tau}.$$

Si l'on substitue ces expressions dans II. 13 on obtient

$$\left[\left(\frac{1}{c} \partial_t + \frac{iq}{\hbar c} V \right) \left(\frac{a_4 + b_4}{2} \right)_{\sigma\tau,\mu\nu} - \right.$$

$$\left. - \sum_k^3 \left(\partial_k - \frac{iq}{\hbar c} A_k \right) \left(\frac{a_4 b_k + a_k b_4}{2} \right)_{\sigma\tau,\mu\nu} + i k_0 (a_4 b_4)_{\sigma\tau,\mu\nu} \right] \psi^*_{\sigma\tau} = 0,$$

et en prenant les complexes conjugués de ces équations, on doit écrire, compte tenu de I. 8,

II. 17 $$\left[\left(\frac{1}{c} \partial_t - \frac{iq}{\hbar c} V \right) \frac{a_4 + b_4}{2} - \right.$$

$$\left. - \sum_k^3 \left(\partial_k + \frac{iq}{\hbar c} A_k \right) \frac{a_k b_4 + a_4 b_k}{2} - i k_0 a_4 b_4 \right] \psi = 0.$$

Ce sont les équations spinorielles de la particule de spin maximum 1 et charge q dans un champ donné par les potentiels électromagnétiques $\vec{A}$ et V. De par sa nature même (c'est un ensemble de 16 équations différentielles du premier ordre avec 16 fonctions $\psi_{\mu\nu}$), ce système ne soulève pas de problèmes de compatibilité. En plus, si l'on y fait $\vec{A}=V=0$ (ou $q=0$), on retombe sur les équations II. 10 dont on peut déduire le système II. 5 par le procédé dont il a été question plus haut.

§ 3. Le quadrivecteur densité-flux de courant et le tenseur densité d'énergie-impulsion.

A partir des équations II. 17 on doit chercher à savoir si l'existence de $\vec{A}$ et V n'introduit pas quelques différences dans les grandeurs physiques attachées à la particule par rapport à ces mêmes grandeurs lorsque $\vec{A}=V=0$.

La définition du 4-vecteur densité-flux de probabilité n'est pas modifiée. En effet, on vérifie aisément que les équations II. 17 impliquent toujours une relation de continuité $\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0$, avec

II. 18 $$\rho = \psi^* \frac{a_4 + b_4}{2} \psi$$

II. 19 $$\vec{j} = -c\,\psi^* \frac{\vec{a}\, b_4 + a_4 \vec{b}}{2} \psi ,$$

$i\rho$ et $\vec{j}/c$ étant les quatre composantes d'un vecteur d'Univers que nous désignerons par f_μ (*). Puisque la particule est maintenant supposée avoir une charge q on peut, à partir de $f_\mu = [i\rho\,; \vec{j}/c]$, former le 4-vecteur densité-flux de courant dont les composantes sont alors $s_\mu = q f_\mu = q\,[i\rho\,; \vec{j}/c]$, l'équation de continuité $\partial_\mu s_\mu = 0$ exprimant la conservation de la charge. On peut

(*) On emploie les coordonnées d'Univers $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$.

montrer qu'il est possible d'exprimer ce vecteur sous une autre forme qui nous sera utile par la suite. En effet, on obtient à partir du Lagrangien II. 16:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_k} = -q\,\psi^* \frac{a_4\, b_k + a_k\, b_4}{2}\,\psi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V} = -q\,\psi^* \frac{a_4 + b_4}{2}\,\psi\,,$$

et, compte tenu du fait que $\mathcal{Q}_\mu = [i V ; \vec{A}]$ est un vecteur d'Univers, on a

II. 20 $$s_\mu = q\, f_{\gamma_i} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{Q}_\mu}\,.$$

Passons maintenant à l'étude du tenseur densité d'énergie-impulsion de la particule, $T_{\mu\nu}$, et soulignons que les considérations qui vont suivre concernent n'importe quel type de particule (et pas seulement la particule de spin maximum 1) pour autant qu'elle puisse être décrite à partir d'un Lagrangien $\mathcal{L}$, fonction de certaines variables de champ γ_a, de leurs dérivées premières et de leurs complexes conjugués (*):

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(\gamma_a\,,\, \gamma_a^*\,,\ \partial_\nu \gamma_a\,, \partial_\nu \gamma_a^*)\,.$$

Supposons pour commencer que la particule soit dans un champ nul (ou que $q = 0$). Dans ce cas, le tenseur doit obéir à la condition de divergence nulle $\partial_\mu T_{\mu\nu} = 0$. Mais si, comme c'est le cas que nous allons étudier, $\vec{A} \neq 0$, $V \neq 0$ et $q \neq 0$, alors $\partial_\mu T_{\mu\nu}$ n'est plus nul mais égal à un vecteur d'Univers dont les composantes d'espace sont les trois composantes de la force de Lorentz $q\,\rho(\vec{E} - \frac{1}{c}\,\vec{H} \wedge \vec{v})$ et la composante de temps est le

(*) Le Lagrangien sera aussi fonction de $x\,y\,z\,t$ toutes fois que la particule n'est pas isolée.

travail $\frac{i}{c} q \rho \vec{E} \cdot \vec{v}$. Avec nos notations (*) ceci s'exprime par

II. 21 $$\partial_\mu T_{\mu\nu} = \mathcal{H}_{\nu\rho} s_\rho .$$

A partir de cette relation et en faisant appel à un procédé employé autrefois par Schrödinger, on peut déterminer la forme de $T_{\mu\nu}$. Pour ce faire, on commence par calculer la dérivée du Lagrangien par rapport à la coordonnée x_β:

$$\partial_\beta \mathcal{L} = \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \eta_a} \frac{\partial \eta_a}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \eta_a)} \frac{\partial^2 \eta_a}{\partial x_\beta \partial x_\sigma} + \text{conj} \right\} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\sigma} \frac{\partial \mathcal{A}_\sigma}{\partial x_\beta}.$$

Les equations de Lagrange permettent alors de poser

$$\partial_\beta \mathcal{L} = \partial_\sigma (\delta_{\sigma\beta} \mathcal{L}) = \left\{ \partial_\sigma \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \eta_a)} \right) \frac{\partial \eta_a}{\partial x_\beta} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \eta_a)} \frac{\partial^2 \eta_a}{\partial x_\beta \partial x_\sigma} + \text{conj} \right\} +$$
$$+ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\sigma} \frac{\partial \mathcal{A}_\sigma}{\partial x_\beta}$$
$$= \partial_\sigma \left\{ \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \eta_a)} \frac{\partial \eta_a}{\partial x_\beta} + \text{conj} \right\} + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\sigma} \frac{\partial \mathcal{A}_\sigma}{\partial x_\beta},$$

c'est à dire,

II. 22 $$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\sigma} \frac{\partial \mathcal{A}_\sigma}{\partial x_\beta} = \partial_\sigma \left[\delta_{\sigma\beta} \mathcal{L} - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \eta_a)} \partial_\beta \eta_a + \text{conj} \right) \right].$$

Retournons à l'équation II. 21. En vertu de l'équation de conservation de la charge, on peut écrire

$$\partial_\alpha T_{\alpha\beta} = \mathcal{H}_{\beta\sigma} s_\sigma = (\partial_\beta \mathcal{A}_\sigma - \partial_\sigma \mathcal{A}_\beta) s_\sigma = (\partial_\beta \mathcal{A}_\sigma) s_\sigma - \mathcal{A}_\beta \partial_\sigma s_\sigma - s_\sigma \partial_\sigma \mathcal{A}_\beta =$$
$$= s_\sigma \partial_\beta \mathcal{A}_\sigma - \partial_\sigma (s_\sigma \mathcal{A}_\beta),$$

(*) En plus des coordonnées d'Univers $x_1 = x$, $x_2 = y$, $x_3 = z$, $x_4 = ict$ nous avons déjà défini le vecteur potential d'Univers $\mathcal{A}_\mu = [iV; \vec{A}]$. On définira le tenseur de champ électromagnétique par $\mathcal{H}_{\mu\nu}$: $\mathcal{H}_{14} = -iE_x$, $\mathcal{H}_{24} = -iE_y$, $\mathcal{H}_{34} = -iE_z$, $\mathcal{H}_{12} = \mathcal{H}_z$, $\mathcal{H}_{31} = H_y$, $\mathcal{H}_{23} = H_x$ ($\mathcal{H}_{\mu\nu} = -\mathcal{H}_{\nu\mu}$). En conséquence, les relations de définition des champs, $\vec{E} = -\frac{1}{c} \partial_t \vec{A} - \text{grad } V$ et $\vec{H} = \text{rot } \vec{A}$ s'écrivent $\mathcal{H}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathcal{A}_\nu - \partial_\nu \mathcal{A}_\mu$.

et compte tenu de II. 20 et II. 22, on obtient finalement

$$\partial_\alpha T_{\alpha\beta} = \partial_\sigma \left[\delta_{\sigma\beta} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\sigma} \mathcal{A}_\beta - \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\sigma \eta_a)} \frac{\partial \eta_a}{\partial x_\beta} + \text{conj} \right) \right].$$

Cette relation conduit à définir le tenseur $T_{\alpha\beta}$ de densité d'énergie-impulsion de la particule décrite par le Lagrangien $\mathcal{L}(\eta_a, \eta_a^* \cdots)$ et se déplaçant dans un champ électromagnétique de potentiel $\mathcal{A}_\mu$ de la façon suivante,

$$\text{II. 23} \qquad T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\alpha} \mathcal{A}_\beta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \eta_a)} \frac{\partial \eta_a}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \eta_a^*)} \frac{\partial \eta_a^*}{\partial x_\beta}.$$

Si maintenant on considère le cas de la particule de spin maximum 1 décrite par le Lagrangien II. 16, fonction des grandeurs spinorielles $\psi_{\mu\nu}$, on obtient

$$\text{II. 24} \quad T_{\alpha\beta} = \delta_{\alpha\beta} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{A}_\alpha} \mathcal{A}_\beta - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \psi_{\mu\nu})} \frac{\partial \psi_{\mu\nu}}{\partial x_\beta} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\alpha \psi_{\mu\nu}^*)} \frac{\partial \psi_{\mu\nu}^*}{\partial x_\beta}.$$

Cette expression a symétrique se réduit bien à la forme connue de $T_{\mu\nu}$ donnée par M. de Broglie pour le cas où $\mathcal{A}_\mu = 0$ (ou $q = 0$) [8].

§ 4. Les équations tensorielles de la particule de spin maximum 1 et de charge q.

Dans ce paragraphe nous allons présenter la forme tensoriel le des équations spinorielles II. 17,

$$\text{II. 25} \quad \left[\left(\frac{1}{ic} \partial_t + \frac{iq}{\hbar c} i V \right) \frac{a_4 + b_4}{2} + i \left(\vec{\nabla} + \frac{iq}{\hbar c} \vec{A} \right) \cdot \frac{\vec{a} b_4 + \vec{b} a_4}{2} - \right.$$
$$\left. - k_0 a_4 b_4 \right] \psi = 0 .$$

Pour commencer, et en partant de I. 9 e I. 10 e I. 11, on vérifie aisément que

$$a_4 b_4 (a_4 + b_4) = a_4 + b_4$$
$$a_4 b_4 (a_4 b_k + a_k b_4) = a_4 a_k + b_4 b_k \qquad (k = 1, 2, 3)$$
$$a_4 b_4 \cdot a_4 b_4 = I .$$

Par conséquent, si on multiplies II. 25 à gauche par $a_4 b_4$, on obtient

II. 26 $$\left[\left(\frac{1}{ic}\partial_t + \frac{iq}{hc} iV\right)\frac{a_4 + b_4}{2} + i\left(\vec{\nabla} + \frac{iq}{hc}\vec{A}\right)\cdot \right.$$
$$\left. \cdot \frac{a_4 \vec{a} + b_4 \vec{b}}{2} - k_0\right]\psi = 0 .$$

Définissons maintenant, à partir du potentiel $\mathcal{a}_\mu = [i V; \vec{A}]$ et du gradient $\partial_\mu = \left[\frac{1}{ic}\partial_t; \vec{\nabla}\right]$, le vecteur d'Univers

II. 27 $$P_\mu = i\hbar\,\partial_\mu - \frac{q}{c}\mathcal{a}_\mu .$$

Les équations II. 26 prennent alors la forme

II. 28 $$\left[a_4 P_4 + \sum_{k=1}^{3} i\, a_4 a_k P_k - 2\, i\, m_0 c\right]\psi +$$
$$+ \left[b_4 P_4 + \sum_{k}^{3} i\, b_4 b_k P_k\right]\psi = 0 .$$

Introduisons la matrice 4×4 Ψ formée avec les composantes $\psi_{\mu\nu}$ de la matrice colonne ψ, disposées selon I. 17. On vérifie ainsi, en tenant compte de I. 5, que les équations II. 28 peuvent s'écrire

$$\left[\alpha_4 P_4 + \sum_{k=1}^{3} i\,\alpha_4 \alpha_k P_k - 2\, i\, m_0 c\right]\Psi +$$
$$+ \left(\left[\alpha_4 P_4 + \sum_{k}^{3} i\,\alpha_4 \alpha_k P_k\right]\Psi^T\right)^T = 0 ,$$

c'est à dire, en employant les matrices γ_μ définies en I. 16,

$$\left[\sum_{\mu}^{4} \gamma_\mu P_\mu - 2\, i\, m_0 c\right]\Psi + \sum_{\mu}^{4} P_\mu \Psi \gamma_\mu^T = 0 .$$

Si on multiplie à droite ce système par la matrice Γ introduite en I. 20 nous avons, par I. 21,

$$\text{II. 29} \qquad \left[\sum_{\mu}^{4} \gamma_\mu P_\mu - 2\, i\, m_0\, c\right] \Psi\,\Gamma - \sum_{\mu}^{4} P_\mu \Psi\,\Gamma\,\gamma_\mu = 0\,.$$

Or la matrice $\Psi\Gamma$, comme d'ailleurs toute matrice 4×4, peut être exprimée comme une combinaison linéaire des $16\ \gamma_a$ qui forment le système complet engendré par les quatre matrices γ_μ de von Neumann, et dont il a été question en I. 23. Posons alors, avec certains coefficients φ_a,

$$\text{II. 30} \qquad \begin{aligned} \Psi\,\Gamma = \sum_{a}^{16} \varphi_a \gamma_a = \varphi_0 \gamma_0 + \sum_{\mu}^{4} \varphi_\mu \gamma_\mu + \sum_{\substack{\mu,\nu=1,2,3,4 \\ \mu<\nu}} \varphi_{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu} \,+ \\ + \sum_{\substack{\mu,\nu,\rho=1,2,3,4 \\ \mu<\nu<\rho}} \varphi_{\mu\nu\rho} \gamma_{\mu\nu\rho} + \varphi_{1234}\gamma_{1234}\ (^*)\,. \end{aligned}$$

En introduisant le développement II. 30 dans les équations II. 29 et en y égalant à zéro les coefficients des seize matrices γ_a (car elles sont linéairement indépendantes), le calcul nous conduit aux équations suivantes,

$$\text{II. 31} \qquad \begin{aligned} P_\mu \varphi_{\mu\nu} &= m_0\, c\, \varphi_\nu \\ P_\mu \varphi_\nu - P_\nu \varphi_\mu &= -\, m_0\, c\, \varphi_{\mu\nu} \end{aligned}$$

$$\text{II. 32} \qquad \begin{aligned} &\varphi_0 = 0 \\ &P_\mu \varphi_{\mu\nu\rho\sigma} = -\, m_0\, c\, \varphi_{\nu\rho\sigma} \\ &P_\mu \varphi_{\nu\rho\sigma} - P_\nu \varphi_{\rho\sigma\mu} + P_\rho \varphi_{\sigma\mu\nu} - P_\sigma \varphi_{\mu\nu\rho} = m_0\, c\, \varphi_{\mu\nu\rho\sigma}\,. \end{aligned}$$

Si l'on tient compte de la définition II. 27 de l'opérateur P_μ, on peut écrire ces équations sous la forme explicite

---

(*) Pour ce qui est des propriétés de variance des φ_a, nous renvoyons au Chapitre I, § 2.

II. 33
$$\begin{cases} \partial_\mu \varphi_{\mu\nu} + \dfrac{iq}{\hbar c} \mathcal{A}_\mu \varphi_{\mu\nu} = - i k_0 \varphi_\nu \\ \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu + \dfrac{iq}{\hbar c} (\mathcal{A}_\mu \varphi_\nu - \mathcal{A}_\nu \varphi_\mu) = i k_0 \varphi_{\mu\nu} \end{cases}$$

$$(k_0 = m_0 c / \hbar)$$

II. 34
$$\begin{cases} \varphi_0 = 0 \\ \partial_\mu \varphi_{\mu\nu\rho\sigma} + \dfrac{iq}{\hbar c} \mathcal{A}_\mu \varphi_{\mu\nu\rho\sigma} = i k_0 \varphi_{\nu\rho\sigma} \\ \partial_\mu \varphi_{\nu\rho\sigma} - \partial_\nu \varphi_{\rho\sigma\mu} + \partial_\rho \varphi_{\sigma\mu\nu} - \partial_\sigma \varphi_{\mu\nu\rho} + \\ \dfrac{iq}{\hbar c} (\mathcal{A}_\mu \varphi_{\nu\rho\sigma} - \mathcal{A}_\nu \varphi_{\rho\sigma\mu} + \mathcal{A}_\rho \varphi_{\sigma\mu\nu} - \mathcal{A}_\sigma \varphi_{\mu\nu\rho}) = - i k_0 \varphi_{\mu\nu\rho\sigma}. \end{cases}$$

Ce sont les équations tensorielles de la particule de spin maximum 1 et charge q dans un champ $\mathcal{A}_\mu$, équivalentes aux équations spinorielles II. 17. A l'instar de ce qui arrivait déjà dans la théorie non généralisée (voir équations I. 26, I. 27), la description de la particule de spin 0 et celle de la particule de spin 1 sont indépendantes; les trois dernières équations traduisent le comportement de la particule de spin 0, tandis que les deux premières concernent la particule de spin 1.

La parenté des équations II. 33 avec les équations maxwelliennes de M. de Broglie est évidente. En effet, en prenant $\mathcal{A}_\mu = 0$ (ou $q = 0$) on obtient deux de ces équations maxwelliennes,

$$\partial_\mu \varphi_{\mu\nu} = - i k_0 \varphi_\nu, \qquad \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\nu \varphi_\mu = i k_0 \varphi_{\mu\nu}.$$

Or de la première on déduit que $- i k_0 \partial_\nu \varphi_\nu = \partial_\nu \partial_\mu \varphi_{\mu\nu} = 0$, c'est à dire,

$$\partial_\nu \varphi_\nu = 0;$$

tandis que la deuxième nous donne $i k_0 (\partial_\mu \varphi_{\nu\rho} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} + \partial_\rho \varphi_{\mu\nu}) =$
$= i k_0 (\partial_\mu \partial_\nu \varphi_\rho - \partial_\mu \partial_\rho \varphi_\nu + \partial_\nu \partial_\rho \varphi_\mu - \partial_\nu \partial_\mu \varphi_\rho + \partial_\rho \partial_\mu \varphi_\nu - \partial_\rho \partial_\nu \varphi_\mu) = 0$,
c'est à dire,

$$\partial_\mu \varphi_{\nu\rho} + \partial_\nu \varphi_{\rho\mu} + \partial_\rho \varphi_{\mu\nu} = 0.$$

On retrouve ainsi toutes les équations maxwelliennes I. 26. Des raisonnements identiques ont lieu en ce qui concerne les équations II. 34 vis-à-vis des équations non maxwelliennes I. 27.

§ 5. Le formalisme lagrangien exprimé en grandeurs tensorielles.

Dans ce paragraphe nous déterminons la forme du Lagrangien lorsqu'on l'exprime en grandeurs tensorielles, c'est à dire, lorsqu'on remplace les spineurs $\psi_{\mu\nu}$ de II. 16 par leurs expressions en combinaisons linéaires des φ_a, donnés par II. 30. Pour ce faire, on construit d'abord la matrice Γ et les seize matrices γ_a définies en I. 20 et I. 23, et ceci en employant la forme I. 19 adoptée pour les α_μ. Une fois Γ et les γ_a obtenues et introduites dans le développement II. 30, on arrive aux relations suivantes,

$$
\begin{array}{ll}
\psi_{11} = -\varphi_1 + i\varphi_2 + i\varphi_{14} + \varphi_{24} & \psi_{12} = \varphi_3 - i\varphi_{34} - \varphi_{123} - i\varphi_{1234} \\
\psi_{21} = \varphi_3 - i\varphi_{34} + \varphi_{123} + i\varphi_{1234} & \psi_{22} = \varphi_1 + i\varphi_2 - i\varphi_{14} + \varphi_{24} \\
\psi_{31} = -\varphi_{13} + i\varphi_{23} + \varphi_{134} - i\varphi_{234} & \psi_{32} = i\varphi_0 - i\varphi_4 - i\varphi_{12} + i\varphi_{124} \\
\psi_{41} = -i\varphi_0 + i\varphi_4 - i\varphi_{12} + i\varphi_{124} & \psi_{42} = -\varphi_3 - i\varphi_{23} + \varphi_{134} + i\varphi_{234}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ll}
\psi_{13} = -\varphi_{13} + i\varphi_{23} - \varphi_{134} + i\varphi_{234} & \psi_{14} = i\varphi_0 + i\varphi_4 - i\varphi_{12} - i\varphi_{124} \\
\psi_{23} = -i\varphi_0 - i\varphi_4 - i\varphi_{12} - i\varphi_{124} & \psi_{24} = -\varphi_{13} - i\varphi_{23} - \varphi_{134} - i\varphi_{234} \\
\psi_{33} = \varphi_1 - i\varphi_2 + i\varphi_{14} + \varphi_{24} & \psi_{34} = -\varphi_3 - i\varphi_{34} + \varphi_{123} - i\varphi_{1234} \\
\psi_{43} = -\varphi_3 - i\varphi_{34} - \varphi_{123} + i\varphi_{1234} & \psi_{44} = -\varphi_1 - i\varphi_2 - i\varphi_{14} + \varphi_{24}
\end{array}
$$

Ce sont ces valeurs des $\psi_{\mu\nu}$ que l'on doit substituer dans le Lagrangien II. 16. Après un calcul long mais sans difficulté, on obtient l'expression de $\mathcal{L}$ en grandeurs tensorielles. On trouve alors que $\mathcal{L}$ possède la forme

II. 35 $$\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(1)} + \mathcal{L}^{(0)}$$

où $\mathcal{L}^{(1)}$ est un fonction réelle des grandeurs de champ décrivant la particule de spin 1 (le vecteur φ_μ et le tenseur antisymétrique $\varphi_{\mu\nu}$), de leurs dérivées premières et de leurs conjugués, et $\mathcal{L}^{(0)}$ est unc fonction réelle de $\varphi_0, \varphi_{\mu\nu\rho}$ et φ_{1234} (grandeurs de champ associées à la particule de spin 0), de leurs dérivées premières et de leurs complexes conjugués. L'expression exacte de $\mathcal{L}^{(1)}$ s'écrit

$$\text{II. 36} \qquad \mathcal{L}^{(1)} = -2c\left[\sum_{\mu}^{4} \varphi_{\mu}^{*}\left(\sum_{\nu}^{4} P_{\nu}\,\varphi_{\mu\nu} + m_0\,c\,\varphi_{\mu}\right) - \right.$$

$$\left. -\frac{1}{2}\sum_{\mu,\nu=1}^{4} \varphi_{\mu\nu}^{*}(m_0\,c\,\varphi_{\mu\nu} + P_{\mu}\,\varphi_{\nu} - P_{\nu}\,\varphi_{\mu})\right] + \text{conj}$$

$$\left(P_{\mu} = i\hbar\,\partial_{\mu} - \frac{q}{c}\,\mathfrak{A}_{\mu}\right)$$

et celle de $\mathcal{L}^{(0)}$ vient égale à

$$\text{II. 37} \qquad \mathcal{L}^{(0)} = -2c\,\varphi_{1234}^{*}(P_1\,\varphi_{234} - P_2\,\varphi_{134} + P_3\,\varphi_{124} - P_4\,\varphi_{123}) -$$

$$-2c\,(\varphi_{234}^{*}\,P_1\,\varphi_{1234} - \varphi_{134}^{*}\,P_2\,\varphi_{1234} + \varphi_{124}^{*}\,P_3\,\varphi_{1234} - \varphi_{123}^{*}\,P_4\,\varphi_{1234}) -$$

$$-2\,m_0\,c^2(-\varphi_0^{*}\,\varphi_0 - \varphi_{1234}^{*}\,\varphi_{1234} + \varphi_{123}^{*}\,\varphi_{123} + \varphi_{124}^{*}\,\varphi_{124} +$$

$$+\varphi_{134}^{*}\,\varphi_{134} + \varphi_{234}^{*}\,\varphi_{234}) + \text{conj}.$$

En partant de II. 36, II. 37, on peut calculer les 16 équations tensorielles de Lagrange,

$$\sum_{\nu=1}^{4} \partial_{\nu}\,\frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,(\partial_{\nu}\,\varphi_a)} = \frac{\partial\,\mathcal{L}}{\partial\,\varphi_a}$$

$$(\varphi_a = \varphi_0\,, \varphi_{\mu}\,, \varphi_{\mu\nu}\,, \varphi_{\mu\nu\rho}\,, \varphi_{1234}\,;\ \mu\,, \nu\,, \rho = 1\,, 2\,, 3\,, 4\,;\ \mu < \nu < \rho),$$

lesquelles, comme il fallait s'y attendre, redonnent bien II. 33, II. 34. C'est d'ailleurs en introduisant ces équations dans les expressions II. 36, II. 37 que l'on voit que

$$\text{II. 38} \qquad \mathcal{L} \equiv \mathcal{L}^{(1)} \equiv \mathcal{L}^{(0)} \equiv 0\,,$$

comme c'était déjà le cas dans la théorie non généralisée.

En considérant l'expression II. 35 de $\mathcal{L}$, on voit que l'étude de la particule de spin 0 peut se faire séparément de la particule de spin 1, et inversement. En effet, lorsqu'on veut étudier seulement la particule de spin 1 on considérera que la particule de spin 0 n'existe pas, ce qui revient à prendre $\varphi_0 = \varphi_{\mu\nu\rho} = \varphi_{1234} = 0$ et donc $\mathcal{L}^{(0)} = 0$ et $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(1)}$. Inversement, on posera $\varphi_{\mu} = \varphi_{\mu\nu} = 0$

si seule la particule de spin 0 nous intéresse. En conséquence, on aura alors $\mathcal{L}^{(1)} = 0$ et donc $\mathcal{L} = \mathcal{L}^{(0)}$. Les équations de Lagrange étant linéaires, on peut s'assurer que cette séparation se maintiendra tout au long de la théorie, pour autant que l'on emploie toujours les grandeurs tensorielles. C'est ce que nous montrent les définitions II. 20 et II. 23 du 4-vecteur densité-flux de courant et du tenseur densité d'énergie-impulsion:

II. 39 $$s_\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{a}_\mu}$$

II. 40 $$T_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} \mathcal{L} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \mathcal{a}_\mu} \mathcal{a}_\nu - \left(\sum_a^{16} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \varphi_a)} \partial_\nu \varphi_a + \text{conj} \right) . (^*)$$

En effet, compte tenu de la forme II. 35 du Lagrangien, s_μ vient donné par une somme de deux vecteurs, $s_\mu^{(0)}$ et $s_\mu^{(1)}$, le premier étant une fonction des grandeurs de champ se rapportant à la particule de spin 0 et le second ne contenant que les grandeurs qui décrivent la particule de spin 1:

$$s_\mu = s_\mu^{(0)} + s_\mu^{(1)} .$$

Des considérations analogues sont valables pour $T_{\mu\nu}$ qui, en grandeurs tensorielles, prend la forme

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}^{(0)} + T_{\mu\nu}^{(1)} .$$

D'une façon plus précise et en partant de II. 36, II. 37, II. 39, le calcul donne pour $s_\mu^{(1)}$:

II. 41 $$s_\mu^{(1)} = 4\, q\, \varphi_\nu^* \varphi_{\nu\mu} + \text{conj} ,$$

et l'on trouve pour $s_\mu^{(0)}$:

$$s_\mu^{(0)} = 4\, q\, \varphi_{1234}^* \varphi_{\nu\rho\sigma} + \text{conj}$$

($\mu\nu\rho\sigma$ en permutation circulaire de 1, 2, 3, 4).

(*) La sommation sur a est étundue à l'ensemble des 16 grandeurs tensorielles de champ équivalentes aux 16 $\psi_{\mu\nu}$: $\varphi_0, \varphi_\mu, \varphi_{\mu\nu}, \varphi_{\mu\nu\rho}, \varphi_{1234}$ $(\mu, \nu, \rho = 1, 2, 3, 4 ; \mu < \nu < \rho)$.

On obtient de même les expressions de $T^{(1)}_{\mu\nu}$ et $T^{(0)}_{\mu\nu}$ dont la somme est égale à $T_{\mu\nu}$. Le tenseur $T^{(1)}_{\mu\nu}$ s'écrit

II. 42 $$T^{(1)}_{\mu\nu} = - s^{(1)}_{\mu} \mathcal{A}_{\nu} - 2\, i\, c\, \hbar\, (\varphi_{\sigma\mu}\, \partial_{\nu}\, \varphi^{*}_{\sigma} + \varphi_{\sigma}\, \partial_{\nu}\, \varphi^{*}_{\sigma\mu} - \text{conj}),$$

et $T^{(0)}_{\mu\nu}$ possède la forme

$$T^{(0)}_{\mu\nu} = - s^{(0)}_{\mu} \mathcal{A}_{\nu} - 2\, i\, c\, \hbar \left(\varphi^{*}_{\alpha\beta\gamma}\, \partial_{\nu}\, \varphi_{1234} + \varphi^{*}_{1234} \sum_{\substack{\delta, \varepsilon, \eta = 1 \\ \delta < \varepsilon < \eta}}^{4} \partial_{\nu}\, \varphi_{\delta\varepsilon\eta} - \text{conj} \right)$$

($\mu, \alpha, \beta, \gamma$ en permutation circulaire de 1, 2, 3, 4).

§ 6. Comparaison avec les équations de Proca.

Pour terminer ce chapitre nous devons comparer quelques uns des résultats ci-dessus exposés avec des résultats correspondants dûs à M. Proca. En effet, les équations II. 33 (*) que nous avons obtenues comme décrivant un cas particulier (celui du spin 1) dans la théorie généralisée de la particule de spin maximum 1 ont été jadis étudiées par M. Proca qui les avait introduites par une autre voie [13].

Pour procéder à la comparaison, nous considérerons seulement le cas de la particule de spin 1. Par conséquent, le 4-vecteur s_{μ} sera maintenant égal à $s^{(1)}_{\mu}$ et le tenseur $T_{\mu\nu}$ se réduira à $T^{(1)}_{\mu\nu}$ (II. 41 et II. 42, respectivement). En plus, le Lagrangien prend la forme $\mathcal{L}^{(1)}$ (II. 36) d'où découlent les seulesé quations II. 33, c'est à dire

II. 43
$$a) \qquad \partial_{\mu}\, \varphi_{\mu\nu} + \frac{i\, q}{\hbar\, c} \mathcal{A}_{\mu}\, \varphi_{\mu\nu} = - i\, k_0\, \varphi_{\nu}$$

$$b) \qquad i\, k_0\, \varphi_{\mu\nu} = \partial_{\mu}\, \varphi_{\nu} - \partial_{\nu}\, \varphi_{\mu} + \frac{i\, q}{\hbar\, c} (\mathcal{A}_{\mu}\, \varphi_{\nu} - \mathcal{A}_{\nu}\, \varphi_{\mu}).$$

On voit de par ces équations que si l'on considère *b*) comme servant à définir $\varphi_{\mu\nu}$ au moyen de φ_{μ}, la particule peut aussi

(*) Ou plutôt, les équations II. 44 que nous déduirons par la suite et qui leur sont équivalentes.

bien être décrite par le 4-vecteur φ_μ seulement, et ceci au moyen de l'équation *a*) où l'on substitue $\varphi_{\mu\nu}$ par son expression déduite de *b*). C'est à dire que l'équation d'évolution devient alors

$$\text{II. 44} \quad \left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c}\mathcal{A}_\mu\right)\left[\left(\partial_\mu + \frac{iq}{\hbar c}\mathcal{A}_\mu\right)\varphi_\nu - \left(\partial_\nu + \frac{iq}{\hbar c}\mathcal{A}_\nu\right)\varphi_\mu\right] = k_0^2\,\varphi_\nu\,,$$

ce qui est la forme sous laquelle M. Proca a présenté ses équations.

On pourrait donc essayer de trouver une théorie vectorielle pour la particule de spin 1, théorie qui n'employerait que le seul vecteur d'Univers φ_μ. En particulier, le lagrangien de cette théorie doit être une function réelle de φ_μ, de ses dérivées premières et de leurs conjugués, l'équation de Lagrange qui en découle devant être égale à II. 44. Nous remarquerons tout de suite que ce lagrangien n'est pas celui que l'on obtient de $\mathcal{L}^{(1)}$ en y remplaçant $\varphi_{\mu\nu}$ par son expression en φ_ν tirée de II. 43b, et ceci parce que $\mathcal{L}^{(1)}$ deviendrait alors une fonction de $\varphi_\mu, \varphi_\mu^*$ et de leurs dérivées premières et *secondes*.

Or ce qui caractérise fondamentalement la théorie de M. Proca est le fait qu'elle n'utilise qu'un vecteur d'Univers pour la description de la particule, φ_μ. On doit donc s'attendre à ce que sa théorie découle d'un lagrangien différent de $\mathcal{L}^{(1)}$. Et en effet, son lagrangien est

$$\text{II. 45} \quad \mathcal{L}^{Pr} = \frac{c^2}{2}(P_\mu P_\nu - P_\nu \varphi_\mu)^*(P_\mu \varphi_\nu - P_\nu \varphi_\mu) + m_0^2 c^4 \varphi_\mu^* \varphi_\mu$$

$$\left(P_\mu = i\hbar\,\partial_\mu - \frac{q}{c}\mathcal{A}_\mu\right),$$

et l'on peut vérifier que l'équation de Lagrange qui s'en déduit est bien l'équation II. 44.

Si l'on considère maintenant le 4-vecteur densité-flux de courant, on voit que les résultats des deux théories coincident. En effet, par l'introduction de l'expression II. 45 de $\mathcal{L}^{Pr}$ dans la définition II. 39, on obtient

$$s_\mu^{Pr} = \frac{\partial \mathcal{L}^{Pr}}{\partial \mathcal{A}_\mu} = q\,c\,\varphi_\nu^*(P_\nu \varphi_\mu - P_\mu \varphi_\nu) + \text{conj}\,,$$

ce qui, à une constante près, rejoint II. 41 calculé en partant du lagrangien $\mathcal{L}^{(1)}$.

Mais en passant à l'étude du tenseur $T_{\mu\nu}$, nous allons trouver des écarts entre les deux théories, et ceci malgré le fait que M. Proca avait adopté la même définition II. 23 ci-dessus présentée. D'une façon plus précise et en partant de II. 23 et II. 45, le calcul donne pour le tenseur T^{Pr} de M. Proca l' expression symmétrique

$$T^{Pr}_{\mu\nu} = c^2 (P_\mu \varphi_\sigma - P_\sigma \varphi_\mu)^* (P_\sigma \varphi_\nu - P_\nu \varphi_\sigma) + m_0^2 c^4 \varphi^*_\mu \varphi_\nu + \text{conj} + \delta_{\mu\nu} \mathcal{L}^{Pr},$$

qui diffère du tenseur asymétrique

II. 46 $$T^{(1)}_{\mu\nu} = \frac{2\hbar}{i m_0} [P_\mu \varphi_\sigma - P_\sigma \varphi_\mu)^* \partial_\nu \varphi_\sigma - \\ - \varphi^*_\sigma \partial_\nu (P_\sigma \varphi_\mu - P_\mu \varphi_\sigma) - \text{conj}] - s^{(1)}_\mu \mathfrak{a}_\nu,$$

que l'on trouve pour la particule de spin 1 en partant du lagrangien II. 43(*). On voit ainsi que la question de savoir laquelle des deux théories s'adapte mieux à la descriptíon de la particule de spin 1, se ramène à celle de savoir lequelle des deux tenseurs ($T^{(1)}_{\mu\nu}$ ou $T^{Pr}_{\mu\nu}$) décrit mieux les propriétés de l'énergie et de l'impulsion de la particule. Ce problème a été abordé par M. Costa de Beauregard qui a donné dans sa thèse [14] des arguments en faveur du tenseur asymétrique. En complément, nous nous bornerons ici à signaler que des expériences récentes paraissent confirmer la superiorité d'un tenseur asymétrique pour traduire les propriétés de la particule de spin 1 [15].

Il semble donc bien que l'emploi d'un seul vecteur d'Univers pour la description de la particule n'est pas justifié et qu'il doive être remplacé par l'utilisation d'un vecteur φ_μ et d'un tenseur $\varphi_{\mu\nu}$.

(*) Plus précisément, II. 46 est la forme que prend le tenseur II. 42 lorsque l'on y substitue $\varphi_{\mu\nu}$ par sa valeur en φ_μ, tirée de II. 43b.

CHAPITRE III

Les passage des théories relativistes aux théories non relativistes correspondantes

§ 1. Le groupe de Lorentz et le groupe de Galilée.

Ce chapitre a trait au problème général du passage des théories relativistes aux théories non relativistes correspondantes, question qui sera abordée ici par l'étude du raccord entre le groupe de Lorentz et le groupe de Galilée.

Pour simplifier, on considère dans ce qui suit le cas d'une transformation simple de Lorentz entre deux référentiels $K(x\,y\,z\,t)$ et $K'(x'\,y'\,z'\,t')$. Dans cette transformation, $y'=y$, $z'=z$ et l'axe $O'X'$ glisse sur l'axe OX avec la vitesse $v=\beta c$. Les équations de transformation de Lorentz sont, comme il est bien connu,

$$\text{III. 1} \qquad \begin{cases} x' = (x - v\,t)(1-\beta^2)^{-1/2} \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right)(1-\beta^2)^{-1/2}. \end{cases}$$

Introduisons le développement de $(1-\beta^2)^{-1/2}$ en série de puissances de β,

$$\text{III. 2} \qquad \begin{cases} x' = (x - v\,t)\left(1 + \dfrac{1}{2}\beta^2 + \dfrac{3}{8}\beta^4 + \cdots\right) = \\ \quad = x - v\,t + \dfrac{1}{2}(x - v\,t)\beta^2 + \dfrac{3}{8}(x - v\,t)\beta^4 + \cdots \\ t' = \left(t - \dfrac{v}{c^2}x\right)\left(1 + \dfrac{1}{2}\beta^2 + \dfrac{3}{8}\beta^4 + \cdots\right) = \\ \quad = t - \dfrac{\beta^2}{v}x + \dfrac{1}{2}\left(t\beta^2 - \dfrac{x}{v}\beta^4\right) + \dfrac{3}{8}\left(t\beta^4 - \dfrac{x}{v}\beta^6\right) + \cdots, \end{cases}$$

et prenons l'approximation en β^2 de ces équations (*). On obtient alors

$$\text{III. 3} \qquad \begin{cases} x' = (x - v\,t)\left(1 + \dfrac{1}{2}\beta^2\right) \\ t' = t\left(1 + \dfrac{1}{2}\beta^2\right) - \beta^2 \dfrac{x}{v}\,. \end{cases}$$

Il est évident que l'on ne retrouve pas ainsi les formules de transformation de Galilée, savoir,

$$\text{III. 4} \qquad x' = x - v\,t\,; \qquad t' = t\,.$$

En passant, on peut d'ailleurs se rendre compte du fait que, contrairement à ce qui arrive avec les équations de Lorentz (III. 1) et de Galilée (III. 4), aucune approximation en β^n des équations du groupe de transformations III. 1 ne possède les propriétés de groupe, exception faite de celle en β^1 ou, ce qui revient au même, en β^0, car il n'y a pas de termes en β^1 dans III. 2. Nous allons vérifier cette affirmation en prenant le cas simple de l'approximation en β^2, l'étude du cas général en β^n ne présentant guère plus de difficultés. Considérons alors une autre transformation du type III. 3,

$$\text{III. 5} \qquad \begin{cases} x'' = (x' - \bar{v}\,t')\left(1 + \dfrac{1}{2}\bar{\beta}^2\right) \\ t'' = t'\left(1 + \dfrac{1}{2}\bar{\beta}^2\right) - \bar{\beta}^2 \dfrac{x'}{\bar{v}} \end{cases} \qquad (\bar{\beta} = \bar{v}/c)\,.$$

Pour montrer que ces équations ne définissent pas un groupe, nous allons vérifier que l'application successive de III. 3, III. 5 n'est pas une transformation de la forme III. 3. En effet, on a

---

(*) Nous employons l'expression «approximation en β^n» pour indiquer que dans les développements finaux en série de puissances de $\beta = \dfrac{v}{c}$ on retient les termes jusqu'à l'ordre de β^n en négligeant ceux qui sont d'un ordre supérieur. Ceci revient à dire que dans une «approximation en β^n» on aura $\beta^k \neq 0$ $(k \leqq n)$, $\beta^k \simeq 0$ $(k > n)$.

$$x'' = (x - (v + \bar{v})\, t)\left(1 + \frac{1}{2}(\beta + \bar{\beta})^2\right) + f_1(\beta^2, \beta\bar{\beta}, \beta^2\bar{\beta}^2)$$

$$t'' = t\left(1 + \frac{1}{2}(\beta + \bar{\beta})^2\right) - (\beta + \bar{\beta})^2 \frac{x}{v + \bar{v}} + f_2(\bar{\beta}^2, \beta\bar{\beta}, \beta^2\bar{\beta}^2),$$

avec

$$f_1 = \beta^2 x \frac{\bar{v}}{v} - \beta\bar{\beta}(x - (v + \bar{v})\, t) + \frac{\beta^2\bar{\beta}^2}{4}\left(x - (v + \bar{v})\, t + 2\, x \frac{\bar{v}}{v}\right)$$

$$f_2 = \bar{\beta}^2 t \frac{v}{\bar{v}} - \beta\bar{\beta}\, t + \frac{\beta^2\bar{\beta}^2}{4}\left(t - \frac{2}{\bar{v}}(x - v\, t) - 2\frac{x}{v}\right).$$

Or cette transformation n'a pas la forme III. 3 par suite de l'existence des termes de f_1 et f_2. On peut donc dire, en retournant à III. 1 et III. 4, que le groupe de Galilée s'obtient à partir du groupe de Lorentz par une approximation qui est, au plus, en β. Et effectivement, en prenant $\beta^n \simeq 0\,(n \geqq 2)$ dans III. 2, on obtient les équations III. 4 du groupe de Galilée.

Remarquons cepedant que, étant donné qu'il n'y a pas de termes en β dans III. 2, on pourrait tout aussi bien dire que le groupe de Lorentz, par une approximation en β^0, redonne le groupe de Galilée. On doit dont chercher à savoir laquelle des deux approximations (en β ou en β^0) pssède un sens physique. Pour autant que l'on se tienne dans le cadre de la Mécanique, on n'aura pas la possibilité de départager ces deux hypothèses, ceci étant dû au fait que les deux Mécaniques (Relativiste et Newtonienne) diffèrent par des effets en β^2 et non en β. Si cependant on passe au domaine de l'optique, on y trouve des phénomènes physiques qui font intervenir des effets en $\beta = v/c$. C'est ce que traduisent les termes de l'ordre de β dans certaines équations, notamment dans celles de l'effet Döppler ou dans la formule d'Einstein pour l'abérration de la lumière. Or si l'on se borne aux seuls effets en β (en négligeant ceux d'un ordre supérieur), tous ces phénomènes peuvent être correctement décrits par la théorie newtonienne (*). C'est là un fait qui a été souligné par plusieurs auteurs, notamment par Lorentz [17] et von Laue [16].

(*) Ou, plus précisément, par l'ancienne Théorie des Electrons, laquelle suppose fondamentalement la mécanique classique newtonienne.

En tenant compte de ce qui précède, il semble donc licite de conclure que c'est l'approximation en β qni possède un sens physique et qui donne le raccord correct entre les théories relativistes et non relativistes.

Remarquons que ceci peut paraitre en contradiction avec la façon habituellement utilisée pour passer de l'énergie totale relativiste à l'énergie newtonienne $\left(\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}} \text{ et } \frac{1}{2} m_0 v^2, \text{ respectivement}\right)$. En effet, il semble naturel de penser que pour obtenir le raccord entre ces deux expressions l'on doive développer la première en série de puissances de β et y négliger tous les termes qui sont d'un ordre supérieur à $\beta^2 = v^2/c^2$. C'est à dire :

III. 6
$$m_0 c^2 (1-\beta^2)^{-1/2} = m_0 c^2 (1 + 1/2\, \beta^2 + 3/8\, \beta^2 + \cdots) \cong$$
$$\cong m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2} \beta^2\right) = \frac{1}{2} m_0 v^2 + m_0 c^2 .$$

L'énergie newtonienne n'étant définie qu'à une constante près, on dit alors que l'existence de la constante $m_0 c^2$ n'est pas un empêchement pour retrouver l'expression voulue, $\frac{1}{2} m_0 v^2$. Mais on remarque que III. 6 n'est à vrai dire, qu'une fausse approximation en β^2. Pour avoir une approximation correcte en β^2 il faudrait retenir le terme en β^2 dans le développement final de $m_0 c^2 (1-\beta^2)^{-1/2}$, et pas dans celui de $(1-\beta^2)^{-1/2}$. C'est à dire que l'approximation en β^2 de l'énergie relativiste est la suivante,

$$m_0 c^2 (1-\beta^2)^{-1/2} = m_0 c^2 \left(1 + \frac{1}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\beta^4 + \cdots\right) \cong$$
$$\cong \underbrace{m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2}_{\text{Terme en } \beta^0} + \underbrace{\frac{3}{8} m_0 v^2 \beta^2}_{\text{Terme en } \beta^2} .$$

Or cette expression n'est pas celle que la mécanique newtonienne donne pour l'énergie et ceci amène à penser que le passage des théories relativistes aux théories non relativistes se fait en retenant des termes qui sont, au plus, de l'ordre de β. D'ailleurs, et pour nous confirmer dans cette voie, il suffirait d'examiner quelques équations de transformation en Relativité. Il est bien connu, en effet, que les formules relativistes qui relient les valeurs des grandeurs physiques (mécaniques et autres) attachées à un système au repos avec ces mêmes grandeurs dans un référentiel où le système est animé d'une vitesse $v = \beta c$, font intervenir les facteurs $(1-\beta^2)^{1/2}$ ou $(1-\beta^2)^{-1/2}$. Ainsi, pour un observateur immobile, une barre ayant la longueur l_0 au repos possède la longueur $l_0\sqrt{1-\beta^2}$ lorsqu'elle se trouve animée d'une vitesse $v = \beta c$, c'est à dire que $l = l_0\sqrt{1-\beta^2}$. Des relations analogues existent pour la quantité de chaleur Q_0 fournie au système, sa température propre T_0 [18], la période τ_0 d'une horloge, la masse m_0 d'une particule, etc:

$$Q = Q_0\sqrt{1-\beta^2}, \quad T = T_0\sqrt{1-\beta^2}, \quad \tau = \frac{\tau_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \quad m = \frac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}, \text{ etc.}$$

En développant en séries de puissances de β les seconds membres de ces formules,

$$l = l_0(1-\beta^2)^{1/2} = l_0 - \frac{l_0}{2}\beta^2 - \frac{l_0}{8}\beta^4 - \cdots$$

$$\tau = \tau_0(1-\beta^2)^{-1/2} = \tau_0 + \frac{\tau_0}{2}\beta^2 + \frac{3}{8}\tau_0\beta^4 + \cdots \quad \text{etc,}$$

on voit derechef qu'une approximation en β^2 ne nous conduit pas aux prévisions de la théorie newtonienne, selon laquelle une barre en mouvement ne raccourcit pas, une horloge en mouvement ne ralentit pas, etc. Il faudra donc prendre $\beta^2 \simeq 0$ pour obtenir le passage correct à la théorie non relativiste, c'est à dire, pour avoir $l = l_0$, $\tau = \tau_0$, $m = m_0$, etc.

A partir des conclusions précédantes, on tire l'expression bien connue de l'approximation non relativiste de l'impulson $\vec{p}$. Par définition, on a

$$\text{III. 7} \qquad \vec{p} = m_0\vec{v}(1-\beta^2)^{-1/2} = m_0\vec{v} + \frac{1}{2}m_0\beta^2\vec{v} + \frac{3}{8}m_0\beta^4\vec{v} + \cdots$$

et si l'on prend l'approximation en β $(\beta^n \simeq 0; n \geqq 2)$ (*), on obtient

$$\vec{p} = m_0\vec{v}.$$

(*) Cette approximation coincide d'ailleurs avec celle en β^0 puisqu'il n'y a pas de terme en $\frac{v}{c}$ dans III. 7.

Examinons finalement la relation relativiste

$$\text{III. 8} \qquad \frac{E_r^2}{c^2} = \vec{p}_r^{\,2} + m_0^2 c^2 ,$$

où E_r représente l'énergie totale. Nous avons, en désignant par E_n l'énergie non relativiste,

$$\vec{p}_r^{\,2} = \frac{E_r^2}{c^2} - m_0^2 c^2 = m_0^2 c^2 (1 + \beta^2 + \beta^4 + \cdots) - m_0^2 c^2 =$$

$$= 2\, m_0 \left(\frac{1}{2}\, m_0\, v^2\right) + \frac{4}{c^2}\left(\frac{1}{2}\, m_0\, v^2\right)^2 + \frac{8}{m_0\, c^4}\left(\frac{1}{2}\, m_0\, v^2\right)^3 + \cdots$$

$$= 2\, m_0\, E_n + \frac{4}{c^2} E_n^2 + \frac{8}{m_0\, c^4} E_n^3 + \cdots .$$

Si l'on procède à l'approximation en β, c'est à dire, si l'on prend $\beta^n \cong 0$ $(n \geqq 2)$, on est alors conduit à

$$E_n = \frac{\vec{p}_n^{\,2}}{2\, m_0} ,$$

relation bien connue de la mécanique newtonienne.

§ 2. L'approximation non relativiste en Mécanique Ondulatoire. L'équation de Klein-Gordon et l'équation de Schrödinger.

Dans les paragraphes qui suivent on étudie l'approximation non relativiste des équations d'évolution de la Mécanique Ondulatoire, c'est à dire, le passage de l'équation de Klein-Gordon à celle de Schrödinger, et le passage des équations de Dirac aux équations de Pauli.

Auparavant, nous devons souligner le fait que l'on emploiera dans tout ce qui suit la correspondance II. 2, valable aussi bien dans le cas relativiste que dans le cas non relativiste (*),

$$\text{III. 10} \qquad \begin{matrix}\text{grandeurs}\\ \text{physiques}\end{matrix} \left\{ \begin{matrix} E \longleftrightarrow E_{op} = - i\hbar\,\partial_t \\ \vec{p} \longleftrightarrow p_{op} = \quad i\hbar\vec{\nabla} \end{matrix} \right\} \text{opérateurs.}$$

Pour schématiser le procédé d'approximation non relativiste d'une équation d'évolution de la Mécanique Ondulatoire, on remarquera qu'une telle équation fait intervenir, appliquée à une fonction d'état ψ (qui peut avoir plusieurs composantes), un opérateur f, fonction de $\partial_t \partial_x \partial_y \partial_z$,

$$\text{III. 11} \qquad f(\partial_t, \partial_x, \partial_y, \partial_z)\psi = 0\,.$$

Ceci revient à dire, en tenant compte de III. 10, que f est l'opérateur correspondant à la grandeur physique qui s'obtient de f en remplaçant ∂_t par $\frac{i}{\hbar}E$ et $\vec{\nabla}$ par $-\frac{i}{\hbar}\vec{p}$. Par conséquent, on peut écrire

$$\left[f\left(\frac{i}{\hbar}E,\ \frac{-i}{\hbar}p_x,\ \frac{-i}{\hbar}p_y,\ \frac{-i}{\hbar}p_z\right)\right]_{op}\psi = 0\,,$$

où f désigne maintenant une fonction des grandeurs relativistes E et $\vec{p}$, et c'est avec l'équation d'évolution écrite sous cette forme que l'on entreprend l'approximation non relativiste. Pour cela, on remplace E et $\vec{p}$ par leurs développements en puissances de β et dans la forme finale du développement on retient seulement les puissances de β jusqu'à un certain ordre. On a vu plus haut que cet ordre doit être celui de β, les $\beta^n\,(n \gtrless 2)$ devant être négligés. On est ainsi conduit à une certaine fonction f' de E_n et $\vec{p}_n$, différente de f (E_n et $\vec{p}_n$ désignent les grandeurs énergie et impulsion non relativiste),

$$[f'(E_n,\ p_{xn},\ p_{yn},\ p_{zn})]_{op}\,\psi = 0\,.$$

(*) La grandeur E qui est en correspondance avec l'opérateur $-i\hbar\,\partial_t$ est l'énergie totale, c'est à dire, si la particule est libre, $\frac{1}{2}m_0 v^2$ (cas non relativiste) ou $\frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-\beta^2}}$ (cas relativiste).

En employant à nouveau la correspondance III. 10 on obtient l'equation d'évolution non relativiste qui est l'approximation de l'équation relativiste III. 11:

$$f'(-i\hbar\partial_t,\ i\hbar\partial_x,\ i\hbar\partial_y,\ i\hbar\partial_z)\psi=0.$$

En particularisant le schéma antérieur, étudions maintenant l'équation relativiste de Klein-Gordon. On pourrait envisager le cas général d'une particule chargée se déplaçant dans un champ électromagnétique; néanmoins, il suffit d'étudier le cas plus simple de la particule en absence de champ, car les deux études sont identiques en ce qui concerne les aspects qui nous intéressent et le cas générale ne ferait qu'alourdir le formalisme sans aucune utilité (*). L'équation de Klein-Gordon s'écrit ainsi

$$\left[\Delta-\frac{1}{c^2}\partial_t^2-\left(\frac{m_0 c}{\hbar}\right)^2\right]\psi=0 \qquad (\Delta=\partial_x^2+\partial_y^2+\partial_z^2),$$

ψ étant une fonction d'onde scalaire, soit encore, par III. 10,

$$[E^2/c^2-\vec{p}^{\,2}-m_0^2c^2]_{op}\,\psi=0.$$

On voit ainsi que dans le cas de l'équation de Klein-Gordon, le calcul de l'approximation non relativiste se ramène à celui de la relation relativiste $E_r^2/c^2=\vec{p}_r^{\,2}+m_0^2c^2$, examiné en III. 8 et III. 9. On obtient alors, pour une approximation en β,

$$\left[E_n-\frac{\vec{p}_n^{\,2}}{2m_0}\right]_{op}\psi=0,$$

c'est à dire, par III. 10, l'équation de Schrödinger

III. 12
$$\left[\frac{i\hbar}{2m_0}\Delta+\partial_t\right]\psi=0.$$

(*) Tel ne sera évidemment plus le cas lors du passage des équations de Dirac aux équations de Pauli, qui seul a de l'intérêt si l'on considère la particule comme étant chargée et se déplaçant dans un champ électromagnétique.

Une conséquence bien connue de l'équation de Schrödinger est l'établissement de la relation de continuité

III. 13 $$\partial_t \rho_S + \vec{\nabla} \cdot \vec{j}_S = 0 ,$$

avec les définitions de la densité et du flux de probabilité

III. 14 $$\rho_S = \psi^* \psi$$

III. 15 $$\vec{j}_S = \frac{i\hbar}{2\,m_0} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) .$$

Quant à l'équation de Klein-Gordon, elle permet aussi d'établir une relation de continuité III. 13, les définitions de ρ et $\vec{j}$ étant maintenant

III. 16 $$\rho_{KG} = \frac{i\hbar}{2\,m_0\,c^2} (\psi\,\partial_t \psi^* - \psi^*\,\partial_t \psi)$$

III. 17 $$\vec{j}_{KG} = \frac{i\hbar}{2\,m_0} (\psi^* \vec{\nabla} \psi - \psi \vec{\nabla} \psi^*) .$$

Pour ce qui est du passage des grandeurs relativistes III. 16 et III. 17 aux grandeurs correspondantes III. 14 et III. 15 définies dans la théorie non relativiste, il se fait très aisément. Les deux définitions de $\vec{j}$ coincident, d'ailleurs, et quant à ρ_{KG} il s'écrit

$$\rho_{KG} = \frac{1}{2\,m_0\,c^2} [\psi^* (-i\hbar\,\partial_t \psi) + \psi (-i\hbar\,\partial_t \psi)^*] ,$$

c'est à dire, en vertu de III. 10,

$$\rho_{KG} = \frac{1}{2} \left[\psi^* \left(\frac{E}{m_0\,c^2} \right)_{op} \psi + \psi \left(\left(\frac{E}{m_0\,c^2} \right)_{op} \psi \right)^* \right] .$$

Or l'approximation en β de $\dfrac{E}{m_0\,c^2}$ donne

$$\frac{E}{m_0\,c^2} = \frac{1}{m_0\,c^2} \left(m_0\,c^2 + \frac{1}{2}\,m_0\,v^2 + \cdots \right) = 1 + \frac{1}{2}\,\beta^2 + \cdots \simeq 1 ,$$

de sorte que l'on a $\left(\dfrac{E}{m_0 c^2}\right)_{op} \simeq I$ et, par conséquent,

$$\rho_{KG} \simeq \frac{1}{2}(\psi^* \psi + \psi \psi^*) = \psi^* \psi = \rho_S .$$

Nous achèverons cette étude du raccord entre la théorie de Klein-Gordon et celle de Schrödinger en calculant l'approximation non relativiste du lagrangien de Klein-Gordon. Ce lagrangien a la forme

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{\hbar^2}{2 m_0}\left[\vec{\nabla}\psi^* \cdot \vec{\nabla}\psi - \frac{1}{c^2}\partial_t \psi^* \cdot \partial_t \psi + \frac{m_0^2 c^2}{\hbar^2}\psi^* \psi\right],$$

soit encore, par III. 10,

$$\mathcal{L}_{KG} = \frac{1}{2 m_0}\left[(\vec{p}\,\psi)^* \cdot \vec{p}\,\psi - \left(\frac{E\psi}{c}\right)^* \cdot \frac{E\psi}{c} + m_0^2 c^2 \psi^* \psi\right].$$

Or à l'approximation en β nous avons $\dfrac{E_r}{c} \simeq \dfrac{E_n + m_0 c^2}{c}$, de sorte que $\mathcal{L}_{KG}$ devient

$$\mathcal{L}_{KG} \simeq \frac{1}{2 m_0}\left[(\vec{p}\,\psi)^* \cdot (\vec{p}\,\psi) - \left(\frac{E_n \psi}{c}\right)^* \left(\frac{E_n \psi}{c}\right) - m_0 (E_n \psi)^* \psi - - m_0 \psi^* (E_n \psi)\right]$$

$$\simeq \frac{1}{2 m_0}[(\vec{p}\,\psi)^* \cdot (\vec{p}\,\psi) - m_0((E_n \psi)^* \psi + \psi^* (E_n \psi))],$$

$\left(\dfrac{E_n \psi}{c}\right)^* \dfrac{E_n \psi}{c}$ étant de l'ordre de β^2 par rapport aux autres termes de $\mathcal{L}_{KG}$: Compte tenu de III. 10 on a alors

$$\mathcal{L}_{KG} \simeq \frac{\hbar^2}{2 m_0}\vec{\nabla}\psi^* \cdot \vec{\nabla}\psi + \frac{i\hbar}{2}(\psi^* \partial_t \psi - \psi\, \partial_t \psi^*) = \mathcal{L}_S ,$$

l'expression obtenue étant celle du lagrangien de Schrödinger.

§ 3. Les équations de Dirac et les équations de Pauli.

L'approximation non relativiste des équations de Dirac rentre aussi dans le schéma général décrit au paragraphe précédent, ψ étant maintenant une fonction à quatre composantes de variance spinorielle et f faisant intervenir, en plus des opérateurs $-i\hbar\partial_t$ et $i\hbar\vec{\nabla}$, les quatre matrices 4×4 α_μ. En considérant le cas général d'une particule de charge q se déplaçant au sein d'un champ électromagnétiqne de potentiels $\vec{A}$ et V, les équations de Dirac s'écrivent

$$\text{III.18} \qquad \left[\frac{1}{c}\partial_t - \frac{iq}{\hbar c}V - \left(\vec{\nabla} + \frac{iq}{\hbar c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\alpha} - \frac{i m_0 c}{\hbar}\alpha_4\right]\psi = 0,$$

c'est à dire, en vertu de III.10,

$$\text{III.19} \qquad \left[\frac{1}{c}(E - qV) + \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\alpha} - m_0 c\,\alpha_4\right]_{op}\psi = 0.$$

On prendra les matrices α_μ telles qu'elles ont été définies en I.19(*),

$$\text{III.20} \qquad \alpha_k = \begin{bmatrix} 0 & -\sigma_k \\ -\sigma_k & 0 \end{bmatrix} \quad (k=1,2,3) \qquad \alpha_4 = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{bmatrix},$$

de sorte que l'on est conduit à écrire III.19 sous la forme

$$\text{III.21} \qquad \begin{cases} a) \left[\frac{1}{c}(E - qV) - m_0 c\right]_{op}\chi_1 = \left[\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]_{op}\chi_2 \\ b) \left[\frac{1}{c}(E - qV) + m_0 c\right]_{op}\chi_2 = \left[\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]_{op}\chi_1, \end{cases}$$

(*) $\sigma_1\,\sigma_2\,\sigma_3$ sont les trois matrices de Pauli

$$\sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

que nous désignerons souvent d'une façon abrégée par $\vec{\sigma}$.

avec

$$\text{III.22} \qquad \chi_1 = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}, \qquad \chi_2 = \begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} \qquad \text{et donc} \quad \psi = \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix}.$$

Les équations III.21 *b* permettent d'obtenir χ_2 en fonction de χ_1, et l'introduction de cette expression en III.21 *a* conduit à

III. 23

$$a) \quad \left\{\frac{E-qV}{c} - m_0 c - \left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma} - \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{\sigma}\right)\left(\frac{E-qV}{c} + m_0 c\right)^{-1}\left(\vec{p}\cdot\vec{\sigma} - \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\vec{\sigma}\right)\right\}_{op} \chi_1 = 0$$

$$b) \quad \chi_2 = \left\{\left[\frac{1}{c}(E-qV) + m_0 c\right]^{-1}\left[\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]\right\}_{op} \chi_1 .$$

On a ainsi substitué au système III.19 de 4 équations différentielles du premier ordre, un système différentiel d'ordre infini formé par les deux équations III.23 *a*. En effet, la forme III.23 des équations de Dirac montre que la théorie peut se faire — du moins en principe — en employant seulement deux des quatre composantes de ψ. Ces composantes sont données par l'intégration de III.23 *a*, les deux autres s'en obtenant au moyen de III.23 *b*. On verra par la suite que III.23 *b* exprime que les deux composantes $\begin{bmatrix} \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix} = \chi_2$ sont de l'ordre de β par rapport à $\begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix} = \chi_1$.

En procédant maintenant à l'approximation des équations III.23, le calcul donne

$$\text{III.24} \qquad \begin{aligned} & m_0 c^2 (1-\beta^2)^{-1/2} - qV - m_0 c^2 = \\ & = \left(m_0 c^2 + \frac{1}{2} m_0 v^2 + \frac{3}{8} m_0 v^2 \beta^2 + \cdots\right) - qV - m_0 c^2 \\ & \cong \frac{1}{2} m_0 v^2 - qV = E_n - qV, \end{aligned}$$

car l'approximation doit se faire en β, comme il a été discuté plus haut. En plus, on a

$$\text{III.25} \qquad \begin{aligned} & c\left[\frac{m_0 c}{\sqrt{1-\beta^2}} - \frac{qV}{c} + m_0 c\right]^{-1} = \\ & = (2 m_0)^{-1}\left[1 - \frac{qV}{2 m_0 c^2} + \left(\frac{1}{4}\beta^2 + \frac{3}{16}\beta^4 + \cdots\right)\right]^{-1} = \\ & = (2 m_0)^{-1} - \frac{E_n - qV}{4 m_0^2 c^2} + \cdots \cong \frac{1}{2 m_0}, \end{aligned}$$

et la substitution de III. 24 et III. 25 en III. 23 conduit aux équations approchées en β:

$$\left[E_n - qV - \frac{1}{2m_0}\left(\left(\vec{p}_n - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right)^2\right]_{op}\chi_1 = 0$$

$$\chi_2 = \frac{1}{2m_0 c}\left[\left(\vec{p}_n - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]_{op}\chi_1 .$$

Or un calcul simple donne

$$\text{III. 26} \qquad \left[\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]^2_{op} = \left[\left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]^2 =$$

$$= \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2_{op} + \frac{\hbar q}{c}\vec{\sigma}\cdot\vec{H}, \quad (\vec{H} = \mathrm{rot}\,\vec{A}).$$

de sorte que l'on est conduit à poser

$$\text{III. 27} \quad \begin{cases} a) \; \left[E_n - qV - \frac{1}{2m_0}\left(\vec{p}_n - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{\hbar q}{2m_0 c}\vec{\sigma}\cdot\vec{H}\right]_{op}\chi_1 = 0 \\ b) \; \chi_2 = \frac{1}{2m_0 c}\left[\left(\vec{p}_n - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]_{op}\chi_1 , \end{cases}$$

l'équation III. 27 *b* exprimant clairement que χ_2 est de l'ordre de β par rapport à χ_1. En prenant les opérateurs correspondants de E_n et p_n (III. 10), on obtient la forme finale des équations,

$$\text{III. 28} \quad \begin{cases} a) \; \left[\frac{1}{2m_0}\left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + qV + \frac{\hbar q}{2m_0 c}\vec{\sigma}\cdot\vec{H}\right]\chi_1 = \\ \qquad = -i\hbar\,\partial_t\chi_1 \\ b) \; \chi_2 = \frac{1}{2m_0 c}\left[\left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\sigma}\right]\chi_1 , \end{cases}$$

où III. 28 *a* est l'équation bien connue de Pauli.

Les équations III. 28 *b* qui donnent l'évolution de χ_2 au moyen de χ_1 sont généralement négligées dans la plupart des exposés qui s'occupent de l'étude non relativiste des équations de Dirac. En tenant compte de la discussion du § 1 il semble, au contraire, qu'il y a lieu de les garder car elles définissent une entité mathématique de l'ordre de β. Nous allons d'ailleurs voir l'importance de III. 28 *b* pour obtenir correctement le raccord entre le formalisme de la théorie de Dirac et celui de la théorie de Pauli.

Passons ainsi à l'étude comparée de la densité de probabilité ρ et du flux de probabilité $\vec{j}$. Comme il est bien connu, on peut toujours, en partant soit des équations III. 18 de Dirac soit de celles de Pauli, III. 28 *a*, établir une relation de continuité

$$\partial_t \rho + \operatorname{div} \vec{j} = 0,$$

avec les définitions:

dans la théorie de Pauli:

III. 29 / III. 30
$$\begin{cases} \rho_P = \chi_1^* \chi_1 \\ \vec{j}_P = \dfrac{i\hbar}{2\,m_0}(\chi_1^* \;\vec{\nabla} \chi_1 - \chi_1 \vec{\nabla} \chi_1^*) - \dfrac{q}{m_0 c} \chi_1^* \chi_1 \vec{A} \end{cases}$$

$$\left(\chi_1 = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{bmatrix}\right);$$

dans la théorie de Dirac:

III. 31 / III. 32
$$\begin{cases} \rho_D = \psi^* \psi \\ \vec{j}_D = -c\,\psi^* \vec{\alpha}\, \psi \end{cases}$$

$$\left(\psi = \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \\ \psi_4 \end{bmatrix}\right).$$

Avant de poursuivre, on doit souligner le fait que les définitions de ρ et $\vec{j}$ ne sont pas, pour ainsi dire, une conséquence directe des équations d'évolution. Nous voulons dire par là que ce qui découle directement des équations d'évolution de la Mécanique Ondulatoire (Schrödinger, Klein-Gordon, Pauli, Dirac, etc.)

est uniquement une relation de continuité, c'est à dire, une équation de la forme

III. 33 $$\vec{\nabla} \cdot \vec{f}(\psi, \psi^*, \cdots) + \partial_t g(\psi, \psi^*, \cdots) = 0 .$$

Ce n'est qu'en partant de celle-ci que l'on postule ensuite les expressions pour la densité de probabilité et le flux de probabilité:

$$\rho = g(\psi, \psi^*, \cdots)$$
$$\vec{j} = \vec{f}(\psi, \psi^*, \cdots).$$

Or il est clair que l'adoption de ces expressions pour ρ et $\vec{j}$ ne va pas sans un certain arbitraire, quoique cette liberté dans le choix n'ait pas de conséquence physique. Effectivement, et en dehors du fait que au lieu de g et $\vec{f}$ on pourrait tout aussi bien prendre cg et $c\vec{f}$ (c étant une constante arbitraire), rien ne nous empêcherait de prendre pour la définition du flux de probabilité $\vec{j}$, au lieu de $\vec{f}$, le vecteur $\vec{f} + \vec{v}$, $\vec{v}$ étant un vecteur de divergence nulle. En effet, on retombe toujours sur la même équation III. 33, laquelle est bien assurée en vertu même des équations d'évolution de la Mécanique Ondulatoire.

Ceci dit, étudions le raccord entre III. 29, III. 30 et III. 31, III. 32. Pour obtenir le passage de ρ_D à ρ_P, posons

III. 34 $$\rho_P = \psi^* \psi = \chi_1^* \chi_1 + \chi_2^* \chi_2 ,$$

et rappelons que, comme il a été dit plus haut, χ_2 est de l'ordre de β. Le terme $\chi_2^* \chi_2 = \psi_3^* \psi_3 + \psi_4^* \psi_4$ est donc de l'ordre de β^2 par rapport à $\chi_1^* \chi_1 = \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2$ et en le négligeant dans III. 34 on retrouve l'expression de ρ donnée en théorie de Pauli:

$$\rho_D = \chi_1^* \chi_1 + \chi_2^* \chi_2 \simeq \chi_1^* \chi_1 = \psi_1^* \psi_1 + \psi_2^* \psi_2 = \rho_P .$$

Passons maintenant à l'étude comparée de III. 30 et III. 32. En tenant compte de la forme III. 20 des matrices α_μ, on doit écrire

$$\vec{j}_D = -c\,[\chi_1^* \; \chi_2^*] \begin{bmatrix} -0 & -\vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \chi_1 \\ \chi_2 \end{bmatrix} = c\,(\chi_1^* \vec{\sigma} \chi_2 + \chi_2^* \vec{\sigma} \chi_1) ,$$

c'est à dire, en vertu de l'hermiticité des matrices $\vec{\sigma}$ $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$,

$$\vec{j}_D = c\, \chi_1^* \vec{\sigma} \chi_2 + \text{conj.}$$

Si nous introduisons dans cette formule l'équation III. 28 *b* qui donne l'expression de χ_2 en fonction de χ_1, $\vec{j}_D$ prend la forme approchée en β

$$\text{III. 35} \quad \vec{j}_D \cong \frac{i\hbar}{2\, m_0} \chi_1^* \vec{\sigma} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) \chi_1 - \frac{q}{2\, m_0 c} \chi_1^* \vec{\sigma} (\vec{A} \cdot \vec{\sigma}) \chi_1 + \text{conj}.$$

Compte tenu des propriétés de commutation des matrices σ_k $(k = 1, 2, 3)$, la première composante du vecteur

$$-\frac{q}{2\, m_0 c} \chi_1^* \vec{\sigma} (\vec{A} \cdot \vec{\sigma}) \chi_1 + \text{conj}$$

peut s'écrire

$$-\frac{q}{2\, m_0 c} \chi_1^* \sigma_1 (A_1 \sigma_1 + A_2 \sigma_2 + A_3 \sigma_3) \chi_1 + \text{conj} =$$

$$= -\frac{q}{2\, m_0 c} \chi_1^* (A_1 + i\, A_2 \sigma_3 - i\, A_3 \sigma_2) \chi_1 + \text{conj} =$$

$$= -\frac{q}{2\, m_0 c} (\chi_1^* \chi_1 A_1 + i\, A_2 \chi_1^* \sigma_3 \chi_1 - i\, A_3 \chi_1^* \sigma_2 \chi_1 +$$

$$+ \chi_1^* \chi_1 A_1 - i\, A_2 \chi_1 \sigma_3^* \chi_1^* + i\, A_3 \chi_1 \sigma_2^* \chi_1^*),$$

et les σ_k étant hermitiques, cette expression vient encore

$$-\frac{q}{2\, m_0 c} (\chi_1^* \chi_1 A_1 + \chi_1^* \chi A_1) = -\frac{q}{m_0 c} \chi_1^* \chi_1 A_1 .$$

Pour les deux autres composantes le résultat est identique, de sorte que l'on peut poser

$$\text{III. 36} \qquad -\frac{q}{2\, m_0 c} \chi_1^* \vec{\sigma} (\vec{A} \cdot \vec{\sigma}) \chi_1 + \text{conj} = -\frac{q}{m_0 c} \chi_1^* \chi_1 \vec{A}.$$

Considérons maintenant le vecteur $\dfrac{i\hbar}{2\, m_0} \chi_1^* \vec{\sigma} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) \chi_1 + \text{conj}$, ou plutôt sa première composante, l'étude des deux autres étant analogue. Nous avons

$$\frac{i\hbar}{2m_0}\chi_1^* \sigma_1 (\partial_1 \sigma_1 + \partial_2 \sigma_2 + \partial_3 \sigma_3) \psi_1 + \text{conj} =$$

$$= \frac{i\hbar}{2m_0}[\chi_1^* \partial_1 \chi_1 + i\chi_1^* (\partial_2 \sigma_3 - \partial_3 \sigma_2) \chi_1] + \text{conj} =$$

$$= \frac{i\hbar}{2m_0}[\chi_1^* \nabla_1 \chi_1 + i\chi_1^* (\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma})_1 \psi_1] + \text{conj},$$

en désignant par $\text{rot}\,\vec{\sigma} = \vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}$ l'opérateur matriciel à trois composantes

III. 37
$$\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma} \begin{cases} \partial_2 \sigma_3 - \partial_3 \sigma_2 \\ \partial_3 \sigma_1 - \partial_1 \sigma_3 \\ \partial_1 \sigma_2 - \partial_2 \sigma_1 . \end{cases}$$

On peut donc poser

III. 38
$$\frac{i\hbar}{2m_0}\chi_1^* \vec{\sigma} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) \chi_1 + \text{conj} = \frac{i\hbar}{2m_0}(\chi_1^* \vec{\nabla} \chi_1 - \chi_1 \vec{\nabla} \chi_1^*) -$$
$$- \frac{\hbar}{2m_0}(\chi_1^* \,\text{rot}\,\vec{\sigma}\, \chi_1 + \text{conj}),$$

et en substituant III. 36 et III. 38 dans III. 35, on obtient l'expression finale de l'approximation en β de $\vec{j}_D$,

III. 39
$$\vec{j}_D \cong \frac{i\hbar}{2m_0}(\chi_1^* \vec{\nabla} \chi_1 - \chi_1 \vec{\nabla} \chi_1^*) - \frac{q}{2m_0 c}\chi_1^* \chi_1 \vec{A} -$$
$$- \frac{\hbar}{2m_0}[\chi_1^* (\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}) \chi_1 + \text{conj}].$$

Si maintenant on compare III. 39 à l'expression III. 30, on voit que l'approximation en β de $\vec{j}_D$ ne conduit pas à la définition du flux $\vec{j}_P$ donnée en théorie de Pauli, mais qu'elle en diffère par un terme

III. 40
$$\vec{v} = -\frac{\hbar}{2m_0}\chi_1^* (\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}) \chi_1 + \text{conj}.$$

Pourtant, si l'on se rappelle ce qui a été dit plus haut concernant la définition de $\vec{j}$, on peut affirmer que le raccord entre $\vec{j}_D$ et $\vec{j}_P$ sera correct pour autant que $\vec{\nabla} \cdot \vec{v} = 0$. Or c'est bien ce qui arrive, car nous avons

$$\begin{aligned}\nabla \cdot [\chi_1^* \operatorname{rot} \vec{\sigma}\, \chi_1 + \text{conj}] = {} & \partial_1 [\chi_1^* (\partial_2 \sigma_3 - \partial_3 \sigma_2) \chi_1 + \chi_1 (\partial_2 \sigma_3 - \partial_3 \sigma_2)^* \chi_1^*] \\ & + \partial_2 [\chi_1^* (\partial_3 \sigma_1 - \partial_1 \sigma_3) \chi_1 + \chi_1 (\partial_3 \sigma_1 - \partial_1 \sigma_3)^* \chi_1^*] \\ & + \partial_3 [\chi_1^* (\partial_1 \sigma_2 - \partial_2 \sigma_1) \chi_1 + \chi_1 (\partial_1 \sigma_2 - \partial_2 \sigma_1)^* \chi_1^*]\end{aligned}$$

ce qui, compte tenu de l'hermiticité de $\vec{\sigma}$, peut s'écrire aussi

$$\begin{aligned}& \partial_1 \chi^* \sigma_3 \partial_2 \chi + \chi^* \sigma_3 \partial_1 \partial_2 \chi - \partial_1 \chi^* \sigma_2 \partial_3 \chi - \chi^* \sigma_2 \partial_1 \partial_3 \chi + \partial_1 \partial_2 \chi^* \sigma_3 \chi + \\ & + \partial_2 \chi^* \sigma_3 \partial_1 \chi - \partial_1 \partial_3 \chi^* \sigma_2 \chi - \partial_3 \chi^* \sigma_2 \partial_1 \chi + \partial_2 \chi^* \sigma_1 \partial_3 \chi + \\ & + \chi^* \sigma_1 \partial_2 \partial_3 \chi - \partial_2 \chi^* \sigma_3 \partial_1 \chi - \chi^* \sigma_3 \partial_1 \partial_2 \chi + \partial_2 \partial_3 \chi^* \sigma_1 \chi + \\ & + \partial_3 \chi^* \sigma_1 \partial_2 \chi - \partial_1 \partial_2 \chi^* \sigma_3 \chi - \partial_1 \chi^* \sigma_3 \partial_2 \chi + \partial_3 \chi^* \sigma_2 \partial_1 \chi + \\ & + \chi^* \sigma_2 \partial_1 \partial_3 \chi - \partial_3 \chi^* \sigma_1 \partial_2 \chi - \chi^* \sigma_1 \partial_2 \partial_3 \chi + \partial_1 \partial_3 \chi^* \sigma_2 \chi + \\ & + \partial_1 \chi^* \sigma_2 \partial_3 \chi - \partial_2 \partial_3 \chi^* \sigma_1 \chi - \partial_2 \chi^* \sigma_1 \partial_3 \chi = 0\end{aligned}$$

c. q. f. d.

Passons maintenant à l'étude non relativiste du lagrangien de Dirac. Comme il a été dit en II § 2, ce lagrangien a la forme

$$\mathcal{L}_D = \frac{c}{2} \psi^* \left[\left(-\frac{i h}{c} \partial_t - \frac{q}{c} V \right) + \left(i h \vec{\nabla} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{\alpha} - m_0 c \alpha_4 \right] \psi + \text{conj},$$

c'est à dire, par III. 10,

$$\mathcal{L}_D = \frac{c}{2} \psi^* \left[\frac{E_r - qV}{c} + \left(\vec{p}_r - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{\alpha} - m_0 c \alpha_4 \right] \psi + \text{conj}.$$

A l'approximation non relativiste nous avons $E_r \cong E_n + m_0 c^2$, de sorte que l'on peut écrire

$$\mathcal{L}_D \cong \frac{c}{2} \left\{ \psi^* \frac{E_n}{c} \psi - \frac{q}{c} V \psi^* \psi + m_0 c \psi^* \psi + \psi^* \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{\alpha} \psi - \right.$$
$$\left. - m_0 c \psi^* \alpha_4 \psi \right\} + \text{conj}.$$

En vertu de III. 20 et III. 22, cette expression devient encore

$$\mathcal{L}_D \cong \frac{c}{2}\Big\{\chi_1^* \frac{E_n}{c}\chi_1 - \frac{q}{c} V\chi_1^*\chi_1 + 2\, m_0 c\,\chi_2^*\chi_2 - \chi_1^*\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\chi_2 - \chi_2^*\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\chi_1 +$$

$$+\frac{q}{c}\vec{A}\cdot\chi_1^*\vec{\sigma}\chi_2 + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\chi_2^*\vec{\sigma}\chi_1 + \chi_2^*\frac{E_n}{c}\chi_2 - \frac{q}{c}V\chi_2^*\chi_2\Big\} + \text{conj}\,.$$

Or, χ_2 étant de l'ordre de β par rapport à χ_1, on doit dans $\mathcal{L}_D$ négliger les deux derniers termes qui sont de l'ordre de β^2. En tenant compte de III. 10, on arrive ainsi à l'approximation en β de $\mathcal{L}_D$,

III. 41
$$\mathcal{L}_D \cong \mathcal{L}_P \equiv \frac{c}{2}\Big\{-\frac{i\hbar}{c}\chi_1^*\,\partial_t\chi_1 + 2\, m_0 c\,\chi_2^*\chi_2 - i\hbar\,\chi_1^*\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\chi_2 -$$

$$- i\hbar\,\chi_2^*\vec{\nabla}\cdot\vec{\sigma}\chi_1 - \frac{q}{c}V\chi_1^*\chi_1 + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot(\chi_1^*\vec{\sigma}\chi_2 + \chi_2^*\vec{\sigma}\chi_1)\Big\} + \text{conj}\,.$$

Si l'on se rappelle maintenant la forme du lagrangien habituellement utilisé en théorie de Pauli,

III. 42
$$\mathcal{L}_P' = \frac{\hbar^2}{2\, m_0}\vec{\nabla}\chi_1^*\cdot\vec{\nabla}\chi_1 + \frac{i\hbar}{2}(\chi_1^*\,\partial_t\chi_1 - \chi_1\,\partial_t\chi_1^*) +$$

$$+\frac{\hbar q}{2\, m_0 c}\chi_1^*\vec{\sigma}\cdot\vec{H}\chi_1 + \frac{i\hbar q}{2\, m_0 c}\vec{A}\cdot(-\chi_1^*\vec{\nabla}\chi_1 + \chi_1\vec{\nabla}\chi^*) +$$

$$+\left(qV + \frac{q^2}{2\, m_0 c^2}\vec{A}^2\right)\chi_1^*\chi_1\,,$$

on voit que les deux expressions sont différentes. D'ailleurs, $\mathcal{L}_P$ étant fonction de $\psi_1\,\psi_2\,\psi_3\,\psi_4$, il donne lieu à quatre équations de Lagrange, tandis que $\mathcal{L}_P'$, fonction des seules variables $\psi_1\,\psi_2$, conduit à obtenir deux équations de Lagrange, lesquelles sont précisément les équations de Pauli III. 28*a*. On peut néanmoins voir que les équations de Lagrange découlant de $\mathcal{L}_P$ sont équivalentes aux équations de Pauli, si bien que le raccord entre les deux formalismes lagrangiens est correct. En effet, le calcul donne:

$$\frac{\partial\mathcal{L}_P}{\partial(\partial_k\chi_1^*)} = \frac{c}{2}\, i\hbar\,\sigma_k\chi_2 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}_P}{\partial(\partial_t\chi_1^*)} = \frac{c}{2}\,\frac{i\hbar}{c}\chi_1$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_P}{\partial\chi^*} = \frac{c}{2}\left(-\frac{i\hbar}{c}\partial_t\chi_1 - i\hbar\vec{\sigma}\cdot\vec{\nabla}\chi_2 - \frac{2q}{c}V\chi_1 + \frac{2q}{c}\vec{A}\cdot\vec{\sigma}\chi_2\right)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_k \chi_2^*)} = \frac{c}{2} i \hbar \sigma_k \chi_1 \qquad \frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial (\partial_t \chi_2^*)} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_P}{\partial \chi_2^*} = \frac{c}{2} \left(4 m_0 c \chi_2 - i \hbar \vec{\sigma} \cdot \vec{\nabla} \chi_1 + 2 \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{\sigma} \chi_1 \right),$$

de sorte que les équations de Lagrange découlant de $\mathcal{L}_P$ s'écrivent

III. 43 $\quad a)$
$$i \hbar \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \chi_2 - \frac{q}{c} \vec{A} \cdot \vec{\sigma} \chi_2 = - \frac{i \hbar}{c} \partial_t \chi_1 - \frac{q V}{c} \chi_1$$

$b)$
$$\chi_2 = \frac{i \hbar}{2 m_0 c} \vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma} \chi_1 - \frac{q}{2 m_0 c^2} \vec{A} \cdot \vec{\sigma} \chi_1 .$$

En introduisant III. 43 b dans III. 43 a on obtient

$$- \frac{\hbar^2}{2 m_0} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma})^2 \chi_1 - \frac{i \hbar q}{2 m_0 c} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) (\vec{A} \cdot \vec{\sigma}) \chi_1 - \frac{i \hbar q}{2 m_0 c} (\vec{A} \cdot \vec{\sigma}) (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) \chi_1 +$$

$$+ \frac{q^2}{2 m_0 c^2} (\vec{A} \cdot \vec{\sigma})^2 \chi_1 = - i \hbar \partial_t \chi_1 - q V \chi_1 ,$$

soit encore, par III. 10,

$$\frac{1}{2 m_0} \left[\left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right) \cdot \vec{\sigma} \right]^2 \chi_1 = - i \hbar \partial_t \chi_1 - q V \chi_1 .$$

En vertu de III. 26, cette égalité s'écrit aussi

$$\frac{1}{2 m_0} \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)^2 \chi_1 + \frac{\hbar q}{2 m_0 c} \vec{\sigma} \cdot \vec{H} \chi_1 = - i \hbar \partial_t \chi_1 - q V h_1 ,$$

ce qui est précisément l'équation de Pauli.

Avant de finir ce paragraphe, nous voulons encore souligner une propriété du lagrangien $\mathcal{L}_P$, savoir, que par suite des équations de Lagrange III. 43 on a $\mathcal{L}_P \equiv 0$, à l'instar de ce qui arrive pour le lagrangien de Dirac (Signalons que tel n'est pas le cas de $\mathcal{L}'_P$). Pour le voir, il suffit d'introduire III. 43 b dans $\mathcal{L}_P$ (III. 41) ce qui donne, avec $\vec{\pi} \equiv \left(\vec{p} - \frac{q}{c} \vec{A} \right)_{op}$,

$$\mathcal{L}_P = \frac{c}{2}\left\{\chi_1^* \frac{E}{c}\chi_1 + \frac{1}{2\,m_0\,c}(\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}\,\chi_1)^*(\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}\,\chi_1) - \chi_1^*(\vec{p}\cdot\vec{\sigma})\,\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}}{2\,m_0\,c}\,\chi_1 - \right.$$

$$- \left(\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}}{2\,m_0\,c}\chi_1\right)^*\vec{p}\cdot\vec{\sigma}\,\chi_1 - \frac{q\,V}{c}\chi_1^*\chi_1 + \frac{q}{c}\vec{A}\cdot\left[\chi_1^*\vec{\sigma}\left(\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}}{2\,m_0\,c}\chi_1\right) + \right.$$

$$\left.\left. + \left(\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}}{2\,m_0\,c}\chi_1\right)\vec{\sigma}\,\chi_1\right]\right\} + \mathrm{conj} =$$

$$= \frac{c}{2}\,\chi_1^*\left\{\frac{E}{c}\chi_1 - \left(\frac{\vec{\pi}\cdot\vec{\sigma}}{2\,m_0\,c}\right)^2\chi_1 - \frac{q\,V}{c}\chi_1\right\} + \mathrm{conj} = 0\,.$$

CHAPITRE IV

L'approximation non relativiste de la theorie généralisée de la particule de spin maximum 1

§ 1. Calcul de l'approximation non relativiste des équations spinorielles généralisées.

Dans le présent paragraphe nous allons calculer l'approximation non relativiste des équations spinorielles de la particule de spin maximum 1 et charge q se déplaçant dans un champ éxtérieur défini par les potentiels électromagnétiques $\vec{A}$ et V (équations II. 17) [19]. L'approximation en β discutée au chapitre antérieur demeure ici valable de même que l'expression de l'approximation non relativiste de certains opérateur que nous y avons étudiés.

Commençons par rappeler les équations généralisées II. 17 lesquelles, en introduisant les opérateurs

IV. 1 $$\varepsilon_{op} \equiv (E - q\,V)_{op} = -i\hbar\,\partial_t - q\,V$$

IV. 2 $$\vec{\pi}_{op} \equiv \left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)_{op} = i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\,,$$

prennent la forme

IV. 3 $$\left[\frac{\varepsilon}{c}\,\frac{a_4 + b_4}{2} + \sum_{k=1}^{3} \pi_k \frac{a_4\,b_k + a_k\,b_4}{2} - m_0\,c\,a_4\,b_4\right]\psi = 0\,.$$

En outre nous garderons toujours la définition I. 19 des α_μ, à partir dequels on construit les matrices 16×16 a_μ et b_μ (I. 5). Une fois a_μ et b_μ introduits dans IV. 3 on obtient la forme explicite de ces équations, qui est la suivante

$$2\left(\frac{\varepsilon}{c} - m_0\, c\right)\psi_{11} - \pi_z(\psi_{13} + \psi_{31}) + (-\pi_x + i\,\pi_y)(\psi_{14} + \psi_{41}) = 0$$

$$2\left(\frac{\varepsilon}{c} - m_0\, c\right)\psi_{12} + \pi_z(\psi_{14} - \psi_{32}) - \pi_x(\psi_{13} + \psi_{42}) + i\,\pi_y(\psi_{42} - \psi_{13}) = 0$$

$$2\left(\frac{\varepsilon}{c} - m_0\, c\right)\psi_{21} + \pi_z(\psi_{41} - \psi_{23}) - \pi_x(\psi_{24} + \psi_{31}) + i\,\pi_y(\pi_{24} - \pi_{31}) = 0$$

$$2\left(\frac{\varepsilon}{c} - m_0\, c\right)\psi_{22} + \pi_z(\psi_{24} + \psi_{42}) + (-\pi_x - i\,\pi_y)(\psi_{23} + \psi_{32}) = 0$$

$$2\left(-\frac{\varepsilon}{c} - m_0\, c\right)\psi_{33} + \pi_z(\psi_{13} + \psi_{31}) + (\pi_x - i\,\pi_y)(\psi_{23} + \psi_{32}) = 0$$

$$2\left(-\frac{\varepsilon}{c} - m_0\, c\right)\psi_{34} + \pi_z(\psi_{14} - \psi_{32}) + \pi_x(\psi_{24} + \psi_{31}) - i\,\pi_y(\psi_{24} - \psi_{31}) = 0$$

$$2\left(-\frac{\varepsilon}{c} - m_0\, c\right)\psi_{43} + \pi_z(\psi_{41} - \psi_{23}) + \pi_x(\psi_{42} + \psi_{13}) + i\,\pi_y(\psi_{13} - \psi_{42}) = 0$$

$$2\left(-\frac{\varepsilon}{c} - m_0\, c\right)\psi_{44} - \pi_z(\psi_{24} + \psi_{42}) + (\pi_x + i\,\pi_y)(\psi_{14} + \psi_{41}) = 0$$

$$2\, m_0\, c\, \psi_{13} + \pi_z(\psi_{33} - \psi_{11}) + (\pi_x - i\,\pi_y)(\psi_{43} - \psi_{12}) = 0$$

$$2\, m_0\, c\, \psi_{14} + \pi_z(\psi_{12} + \psi_{34}) + \pi_x(\psi_{44} - \psi_{11}) - i\,\pi_y(\psi_{44} + \psi_{11}) = 0$$

$$2\, m_0\, c\, \psi_{23} - \pi_z(\psi_{43} + \psi_{21}) + \pi_x(\psi_{33} - \psi_{22}) + i\,\pi_y(\psi_{22} + \psi_{33}) = 0$$

$$2\, m_0\, c\, \psi_{24} + \pi_z(\psi_{22} - \psi_{44}) + (\pi_x + i\,\pi_y)(\psi_{34} - \psi_{21}) = 0$$

$$2\, m_0\, c\, \psi_{31} + \pi_z(\psi_{33} - \psi_{11}) + (\pi_x - i\,\pi_y)(\psi_{34} - \psi_{21}) = 0$$

$$2\, m_0\, c\, \psi_{32} - \pi_z(\psi_{12} + \psi_{34}) + \pi_x(\psi_{33} - \psi_{22}) + i\,\pi_y(\psi_{22} + \psi_{33}) = 0$$

$$2\, m_0\, c\, \psi_{41} + \pi_z(\psi_{21} + \psi_{43}) + \pi_x(\psi_{44} - \psi_{11}) - i\,\pi_y(\psi_{11} + \psi_{44}) = 0$$

$$2\, m_0\, c\, \psi_{42} + \pi_z(\psi_{22} - \psi_{44}) + (\pi_x + i\,\pi_y)(\psi_{43} - \psi_{12}) = 0.$$

Nous présentons ici la forme explicite de IV. 3 parce qu'à partir des équations antérieures on vérifie aisément que IV. 3 peut s'écrire sous la forme équivalente

$$\text{IV. 4} \quad \begin{cases} a) & \left(\frac{\varepsilon}{c} - m_0 c\right) \chi_1 + \frac{1}{2}(-\theta_2 \chi_2 - \theta_1 \chi_3) = 0 \\ b) & \left(-\frac{\varepsilon}{c} - m_0 c\right) \chi_4 + \frac{1}{2}(\theta_1 \chi_2 + \theta_2 \chi_3) = 0 \\ c) & m_0 c \chi_2 + \frac{1}{2}(-\theta_2 \chi_1 + \theta_1 \chi_4) = 0 \\ d) & m_0 c \chi_3 + \frac{1}{2}(-\theta_1 \chi_1 + \theta_2 \chi_4) = 0, \end{cases}$$

où $\chi_1 \chi_2 \chi_3 \chi_4$ désignent les matrices colonnes

$$\text{IV. 5} \quad \chi_1 = \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{bmatrix}, \ \chi_2 = \begin{bmatrix} \psi_{13} \\ \psi_{14} \\ \psi_{23} \\ \psi_{24} \end{bmatrix}, \ \chi_3 = \begin{bmatrix} \psi_{31} \\ \psi_{32} \\ \psi_{41} \\ \psi_{42} \end{bmatrix}, \ \chi_4 = \begin{bmatrix} \psi_{33} \\ \psi_{34} \\ \psi_{43} \\ \psi_{44} \end{bmatrix},$$

tandis que θ_1 et θ_2 représentent les deux matrices

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} \pi_z & 0 & \pi_x - i\pi_y & 0 \\ 0 & \pi_z & 0 & \pi_x - i\pi_y \\ \pi_x + i\pi_z & 0 & -\pi_z & 0 \\ 0 & \pi_x + i\pi_z & 0 & -\pi_z \end{bmatrix},$$

$$\theta_2 = \begin{bmatrix} \pi_z & \pi_x - i\pi_y & 0 & 0 \\ \pi_x + i\pi_y & -\pi_z & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \pi_z & \pi_x - i\pi_y \\ 0 & 0 & \pi_x + i\pi_y & -\pi_z \end{bmatrix}$$

c'est à dire, en vertu de I. 2,

$$\text{IV. 6} \quad \theta_1 = \begin{bmatrix} \pi_z & \pi_x - i\pi_y \\ \pi_x + i\pi_y & -\pi_z \end{bmatrix} \times I, \ \theta_2 = I \times \begin{bmatrix} \pi_z & \pi_x - i\pi_y \\ \pi_x + i\pi_y & -\pi_z \end{bmatrix}$$

La forme IV. 4 des équations spinorielles de la particule de spin maximum 1 et charge q s'avère être la plus adéquate comme point de départ de notre calcul. Ainsi, et pour commencer, les équations IV. $4c$ et IV. $4d$ déterminent χ_2 et χ_3 en fonction de χ_1 et χ_4,

$$\chi_2 = \frac{1}{2\,m_0\,c}(\theta_2\,\chi_1 - \theta_1\,\chi_4)$$

$$\chi_3 = \frac{1}{2\,m_0\,c}(\theta_1\,\chi_1 - \theta_2\,\chi_4),$$

et par conséquent,

$$\begin{aligned} -\theta_2\,\chi_2 - \theta_1\,\chi_3 &= -(2\,m_0\,c)^{-1}[(\theta_1^2+\theta_2^2)\,\chi_1 - (\theta_1\,\theta_2+\theta_2\,\theta_1)\,\chi_4] \\ \theta_1\,\chi_2 + \theta_2\,\chi_3 &= \quad (2\,m_0\,c)^{-1}[(\theta_1\,\theta_2+\theta_2\,\theta_1)\,\chi_1 - (\theta_1^2+\theta_2^2)\,\chi_4]. \end{aligned}$$

En introduisant ces expressions dans IV. $4a$ et IV. $4b$, on obtient

$$\text{IV. 7} \quad \begin{aligned} &a) \left[\frac{\varepsilon}{c} - m_0\,c - \frac{1}{4\,m_0\,c}(\theta_1^2+\theta_2^2)\right]\chi_1 = -\frac{1}{4\,m_0\,c}(\theta_1\,\theta_2+\theta_2\,\theta_1)\,\chi_4 \\ &b) \left[\frac{\varepsilon}{c} + m_0\,c + \frac{1}{4\,m_0\,c}(\theta_1^2+\theta_2^2)\right]\chi_4 = \quad \frac{1}{4\,m_0\,c}(\theta_1\,\theta_2+\theta_2\,\theta_1)\,\chi_1. \end{aligned}$$

Grâce à IV. $7b$ on peut exprimer χ_4 en fonction de χ_1, ce qui donne

$$\chi_4 = (4\,m_0\,c)^{-1}\left[\frac{\varepsilon}{c} + m_0\,c + \frac{1}{4\,m_0\,c}(\theta_1^2+\theta_2^2)\right]^{-1}(\theta_1\,\theta_2+\theta_2\,\theta_1)\,\chi_1,$$

et par la substitution de cette expression dans IV. $7a$ on est finalement conduit au système

$$\text{IV. 8} \quad \begin{aligned} &a) \left\{\varepsilon - m_0\,c^2 - \frac{\theta_1^2+\theta_2^2}{4\,m_0} + \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\theta_1\,\theta_2+\theta_2\,\theta_1}{16\,m_0^2\,c}\left[\frac{\varepsilon}{c} + m_0\,c + \frac{\theta_1^2+\theta_2^2}{4\,m_0\,c}\right]^{-1} \theta_1\,\theta_2+\theta_2\,\theta_1)\right\}\chi_1 = 0 \\ &b) \ \chi_4 = \left[\frac{\varepsilon}{c} + m_0\,c + \frac{\theta_1^2+\theta_2^2}{4\,m_0\,c}\right]^{-1}\frac{\theta_1\,\theta_2+\theta_2\,\theta_1}{4\,m_0\,c}\,\chi_1 \\ &c) \ \chi_2 = (2\,m_0\,c)^{-1}(-\theta_1\,\chi_4 + \theta_2\,\chi_1) \\ &d) \ \chi_3 = (2\,m_0\,c)^{-1}(-\theta_2\,\chi_4 + \theta_1\,\chi_1). \end{aligned}$$

Les équations obtenues sont équivalentes aux équations relativistes initiales IV. 3. Elles montrent, en particulier, que l'étude des équations de la particule de spin maximum 1 peut être ramenée — du moins en principe — à celle d'un ensemble de quatre équations différentielles d'ordre infini, les équations IV. 8 *a*. Les équations IV. 8 *bcd* ne font alors qu'exprimer χ_2, χ_3 et χ_4 en fonction de χ_1, donné par l'intégration de IV. 8 *a*.

C'est sur la forme IV. 8 des équations que nous allons calculer l'approximation non relativiste. D'une façon identique à ce qui fut fait en III. 24, on peut voir que l'opérateur $\frac{\varepsilon_r}{c} - m_0 c$ devient, à l'approximation non relativiste,

IV. 9 $$\frac{\varepsilon_r}{c} - m_0 c \simeq \frac{1}{c}(E_n - qV) = \frac{\varepsilon_n}{c}.$$

En plus, on a aussi

$$\left[\frac{\varepsilon}{c} + m_0 c + \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{4 m_0 c}\right]^{-1} =$$

$$= (2 m_0 c)^{-1} \left[1 - \frac{E_n - qV}{2 m_0 c^2} - \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{8 m_0^2 c^2} + \cdots\right],$$

expression qui devient, à l'approximation en β,

IV. 10 $$\left[\frac{\varepsilon}{c} + m_0 c + \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{4 m_0 c}\right]^{-1} \simeq \frac{1}{2 m_0 c}.$$

En effet, si on tient compte des définitions IV. 6 de θ_1 et θ_2, fonctions de $\vec{p}$, le terme $(8 m_0^2 c^2)^{-1} (\theta_1^2 + \theta_2^2)$ est de l'ordre de $\beta^2 = \vec{p}^2 / m_0^2 c^2$ et doit donc être négligé. Nous verrons d'ailleurs, par la suite, la forme explicite de $\theta_1^2 + \theta_2^2$.

Si donc on introduit IV. 10, IV. 9 dans IV. 8, on arrive au système d'équations

IV. 11

$$a) \quad \left[\varepsilon - \frac{\theta_1^2 + \theta_2^2}{4 m_0} + \frac{(\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1)^2}{32 m_0^3 c^2}\right] \chi_1 = 0$$

$$b) \quad \chi_4 = \frac{\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1}{8 m_0^2 c^2} \chi_1$$

$$\text{IV. 11} \qquad c) \quad \chi_2 = \frac{\theta_2 \chi_1 - \theta_1 \chi_4}{2 m_0 c}$$

$$d) \quad \chi_3 = \frac{\theta_1 \chi_1 - \theta_2 \chi_4}{2 m_0 c}.$$

Retournons maintenant à la définition IV. 6 des matrices θ_1 et θ_2. Si on emploie les trois matrices de Pauli,

$$\text{IV. 12} \qquad \sigma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_2 = \begin{bmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{bmatrix}, \qquad \sigma_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

on voit que l'on peut poser

$$\begin{bmatrix} \pi_z & \pi_x - i\pi_y \\ \pi_x + i\pi_y & -\pi_z \end{bmatrix} = \pi_x \sigma_1 + \pi_y \sigma_2 + \pi_z \sigma_3 = \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}.$$

En conséquence, on a

$$\theta_1 = (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \times I, \qquad \theta_2 = I \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}),$$

l'opérateur $\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1$ s'écrivant alors

$$\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1 = [(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \times I][I \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})] + [I \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})][(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \times I] =$$

$$= [(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})] + [(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})] =$$

$$= 2\left[\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) \cdot \vec{\sigma}\right] \times \left[\left(\vec{p} - \frac{q}{c}\vec{A}\right) \cdot \vec{\sigma}\right].$$

En vertu de cette égalité, l'équation IV. 11b exprime alors que χ_4 est de l'ordre de $\beta^2 = \vec{p}^2 / m_0^2 c^2$ par rapport à χ_1, et doit donc être négligé:

$$\chi_4 \cong 0.$$

En outre, ceci nous conduit à simplifier les équations IV. 11 *cd* qui deviennent

$$\chi_2 = \frac{1}{2\, m_0\, c}\, \theta_2\, \chi_1$$

$$\chi_3 = \frac{1}{2\, m_0\, c}\, \theta_1\, \chi_1 ,$$

ces formules exprimant clairement que χ_2 et χ_3 sont de l'ordre de $\beta = p / m_0 c$ par rapport à χ_1.

En passant maintenant à l'équation IV. 11 *a* on voit, en vertu de ce qui précède, que le terme $(32\, m_0^3 c^2)^{-1} (\theta_1 \theta_2 + \theta_2 \theta_1)^2$ doit être négligé, son ordre de grandeur étant celui de $\beta^2 = p^2 / m_0^2 c^2$. Quant à l'opérateur $\theta_1^2 + \theta_2^2$ on peut l'écrire comme suit,

$$\begin{aligned}\theta_1^2 + \theta_2^2 &= [(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \times I]\, [(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \times I] + [I \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})]\, [I \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})] \\ &= [(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})^2 \times I] + [I \times (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})^2] \\ &= \left[\left(\vec{\pi}^2 + \frac{\hbar q}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{H}\right) \times I\right] + \left[I \times \left(\vec{\pi}^2 + \frac{\hbar q}{c} \vec{\sigma} \cdot \vec{H}\right)\right],\end{aligned}$$

$\vec{H} = \operatorname{rot} \vec{A}$ étant le champ magnétique. On est ainsi conduit à

$$\theta_1^2 + \theta_2^2 = 2\, \vec{\pi}^2 + \frac{\hbar q}{c} [(\vec{\sigma} \times I) + (I \times \vec{\sigma})] \cdot \vec{H}.$$

Bref, l'approximation en β des équations IV. 11 s'écrit

IV. 13

$$a) \quad \left\{ \varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2\, m_0} - \frac{\hbar q}{2\, m_0\, c} \left[\frac{(\vec{\sigma} \times I) + (I \times \vec{\sigma})}{2} \right] \cdot \vec{H} \right\}_{op} \chi_1 = 0$$

$$b) \quad \chi_2 = \frac{1}{2\, m_0\, c}\, \theta_2\, \chi_1 = (2\, m_0\, c)^{-1} (I \times \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})\, \chi_1$$

$$c) \quad \chi_3 = \frac{1}{2\, m_0\, c}\, \theta_1\, \chi_1 = (2\, m_0\, c)^{-1} (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} \times I)\, \chi_1$$

$$d) \quad \chi_4 \cong 0$$

soit encore, en introduisant la forme explicite des opérateurs ε, $\vec{\pi}$, θ_1 et θ_2 donnée respectivement par IV. 1, IV. 2 et IV. 6, IV.14

a) $$\left[i\hbar\,\partial_t + qV + \frac{1}{2m_0}\left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + \frac{\hbar q}{2m_0 c}\,\frac{(\vec{\sigma}\times I)+(I\times\vec{\sigma})}{2}\cdot\vec{H}\right]\begin{bmatrix}\psi_{11}\\ \psi_{12}\\ \psi_{21}\\ \psi_{22}\end{bmatrix} = 0$$

b) $$\begin{bmatrix}\psi_{13}\\ \psi_{14}\\ \psi_{23}\\ \psi_{24}\end{bmatrix} = (2m_0c)^{-1}\left(I\times\begin{bmatrix} i\hbar\,\partial_z - \frac{q}{c}A_z & i\hbar(\partial_x - i\,\partial_y) - \frac{q}{c}(A_x - i A_y)\\ i\hbar(\partial_x + i\,\partial_y) - \frac{q}{c}(A_x + iA_y) & -i\hbar\,\partial_z + \frac{q}{c}A_z\end{bmatrix}\right)\begin{bmatrix}\psi_{11}\\ \psi_{12}\\ \psi_{21}\\ \psi_{22}\end{bmatrix}$$

c) $$\begin{bmatrix}\psi_{31}\\ \psi_{32}\\ \psi_{41}\\ \psi_{42}\end{bmatrix} = (2m_0c)^{-1}\left(\begin{bmatrix} i\hbar\,\partial_z - \frac{q}{c}A_z & i\hbar(\partial_x - i\,\partial_y) - \frac{q}{c}(A_x - i A_y)\\ i\hbar(\partial_x + i\,\partial_y) - \frac{q}{c}(A_x + iA_y) & -i\hbar\,\partial_z + \frac{q}{c}A_z\end{bmatrix}\times I\right)\begin{bmatrix}\psi_{11}\\ \psi_{12}\\ \psi_{21}\\ \psi_{22}\end{bmatrix}$$

d) $\psi_{33} = \psi_{34} = \psi_{43} = \psi_{44} \cong 0\,.$

Ce système spinoriel représente l'approximation non relativiste des équations IV. 3 de la particule de spin maximum 1 et charge q se déplaçant dans un champ extérieur défini par les potentiels électromagnétiques $\vec{A}$ et V. L'évolution au cours du temps de l'état de la particule est régie simplement par l'équation IV. 14 *a* dont l'intégration nous donne $\psi_{11}\,\psi_{12}\,\psi_{21}\,\psi_{22}$, les équations IV. 14 *b c* ne faisant qu'exprimer $\psi_{13}\,\psi_{14}\,\psi_{23}\,\psi_{24}\,\psi_{31}\,\psi_{32}\,\psi_{41}$ et ψ_{42} en fonction de $\psi_{11}\,\psi_{12}\,\psi_{21}\,\psi_{22}$. Ces composantes $\psi_{13}\,\psi_{14}\,\psi_{23}\cdots\psi_{42}$ sont d'ailleurs de l'ordre de β par rapport à $\psi_{11}\,\psi_{12}\,\psi_{21}\,\psi_{22}$(*). Quant à IV. 14 *d*, elle exprime que $\psi_{33}\,\psi_{34}\,\psi_{43}\,\psi_{44}$ sont de l'ordre de β^2.

L'étude non relativiste de l'évolution dans le temps de l'état de la particule de spin maximum 1 se ramène donc à celui de la seule équation IV. 14*a* laquelle possède des liens de ressemblance bien frappants avec l'équation de Pauli (voir Chapitre III § 6),

IV. 15

$$\left[i\hbar\,\partial_t + q\,V + \frac{1}{2\,m_0}\left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 + \frac{\hbar\,q}{2\,m_0\,c}\,\vec{\sigma}\cdot\vec{H}\right]\begin{bmatrix}\psi_1\\ \psi_2\end{bmatrix} = 0 .$$

On peut effectivement dire que IV. 14*a* s'obtient formellement de IV. 15 en remplaçant dans cette équation la fonction d'onde à deux composantes par une function d'onde à $2\times 2 = 4$ composantes et en y substituant les matrices $\vec{\sigma}$ et $\sigma_4 \equiv I$ par $\dfrac{(\vec{\sigma}\times I) + (I\times\vec{\sigma})}{2}$ et I, respectivement. D'une façon abrégée, ceci revient à dire que les quatre matrices $\Theta = \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4$ sont remplacées par

$$\text{IV. 16} \qquad \frac{(\Theta\times I)\,(I\times\sigma_4) + (I\times\Theta)\,(\sigma_4\times I)}{2} .$$

Rappelons-nous maintenant les deux points fondamentaux de la méthode de la fusion de M. Broglie, permettant d'obtenir les équations relativistes de la particule de spin maximum 1

(*) Au chapitre antérieur nous avions déjà souligné l'importance des équations du genre de IV. 14 *b c*, sans lesquelles il n'est pas possible d'établir le raccord correct entre le formalisme suscité par IV. 3 et celui qui découle de IV. 14 *a*. Par la suite nous examinerons de plus près cette question.

à partir des équations de Dirac. On peut dire que pour y parvenir il suffit de prendre dans les équations de Dirac au lieu d'une fonction d'onde à 4 composantes, une fonction d'onde à $4 \times 4 = 16$ composantes, et d'y remplacer les matrices $\Theta = \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, I$ par

IV. 17 $$\frac{(\Theta \times I)(I \times \alpha_4) + (I \times \Theta)(\alpha_4 \times I)}{2}.$$

(En vertu de I. 5, ceci équivaut à dire que les matrices $\vec{\alpha}$, α_4 et I viennent remplaçées par $\dfrac{\vec{a}\, b_4 + \vec{b}\, a_4}{2}$, $a_4 b_4$ et $\dfrac{a_4 + b_4}{2}$, respectivement).

On voit de par la comparaison de IV. 16 et IV. 17 que le parallélisme du procédé dans les deux cas est tout à fait satisfaisant. On peut ainsi conclure que la méthode de fusion de M. de Broglie demeure aussi valable au niveau non relativiste, en ce sens que la même démarche formelle permet de fusionner deux corpuscules de Pauli et de parvenir aux équations non relativistes de la particule de spin maximum 1.

§ 2. Le formalisme non relativiste.

Pour obtenir une équation de continuité en partant des équations non relativistes de la particule de spin maximum 1, nous multiplions IV. 14 a à gauche par $\chi_1^* = [\psi_{11}^* \psi_{12}^* \psi_{21}^* \psi_{22}^*]$ et retranchons de l'équation obtenue son équation conjuguée. Après quoi un calcul simple nous conduit à une relation de la forme $\partial_t \rho_n + \operatorname{div} j_n = 0$, avec

IV. 18 $$\rho_n = \chi_1^* \chi_1$$

IV. 19 $$\vec{j}_n = \frac{i\hbar}{2 m_0} (\chi_1^* \vec{\nabla} \chi_1 - \chi_1 \vec{\nabla} \chi_1^*) - \frac{q}{2 m_0 c} \chi_1^* \chi_1 \vec{A}.$$

Nous admettons que IV. 18 et IV. 19 sont, respectivement, les expressions non relativistes de la densité de probabilité et du vecteur flux de probabilité de la particule de spin maximum 1 et charge q.

On peut d'ailleurs retrouver ces mêmes expressions en calculant directement l'approximation non relativiste sur les définitions relativistes II. 18 et II. 19, procédé où interviennent essentiellement les équations IV. 14 *bc*. En effet, en partant de ρ_r donné par II. 18 et compte tenu de I. 5, I. 19 et IV. 14 *d*, nous avons (*):

$$\rho_r = \psi_{11}^* \psi_{11} + \psi_{12}^* \psi_{12} + \psi_{21}^* \psi_{21} + \psi_{22}^* \psi_{22} - \psi_{33}^* \psi_{33} - \psi_{34}^* \psi_{34} - \psi_{43}^* \psi_{43} - \psi_{44}^* \psi_{44}$$

$$\cong \psi_{11}^* \psi_{11} + \psi_{12}^* \psi_{12} + \psi_{21}^* \psi_{21} + \psi_{22}^* \psi_{22} = \chi_1^* \chi_1 = \rho_n ,$$

et l'on retrouve ainsi l'expression non relativiste IV. 18 de la densité de probabilité.

Prenons maintenant la définition relativiste II. 19 du vecteur flux de probabilité, ou plutôt la première composante de ce vecteur, l'étude des deux autres étant analogue. Si l'on construit la matrice $a_1 b_4 + a_4 b_1$ à partir de la forme I. 19 adoptée pour les α_μ et si l'on tient compte de IV. 14 *d*, le calcul conduit à poser

$$\begin{aligned} \frac{2}{c} j_{1_r} &\cong \psi_{11}^* (\psi_{14} + \psi_{41}) + \psi_{12}^* (\psi_{13} + \psi_{42}) + \psi_{21}^* (\psi_{24} + \psi_{31}) + \\ &\quad + \psi_{22}^* (\psi_{23} + \psi_{32}) + \text{conj} \\ &= [\psi_{11}^* \, \psi_{12}^* \, \psi_{21}^* \, \psi_{22}^*] \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{13} \\ \psi_{14} \\ \psi_{23} \\ \psi_{24} \end{bmatrix} + \\ &\quad + [\psi_{11}^* \, \psi_{12}^* \, \psi_{21}^* \, \psi_{22}^*] \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{31} \\ \psi_{32} \\ \psi_{41} \\ \psi_{42} \end{bmatrix} + \text{conj}, \end{aligned}$$

c'est à dire, en vertu de IV. 5 et IV. 12,

$$\frac{2}{c} j_{1_r} \cong \chi_1^* (I \times \sigma_1) \chi_2 + \chi_1^* (\sigma_1 \times I) \chi_3 + \text{conj} .$$

(*) Les indices r et n se réfèrent aux expressions relativistes et non relativistes, respectivement.

Introduisons ici les expressions non relativistes IV. 13 *b c* de χ_2 et χ_3. On a alors:

$$4\, m_0\, j_{1_r} \simeq \chi_1^* \,(I \times \sigma_1)(I \times \vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})\, \chi_1 + \chi_1^* \,(\sigma_1 \times I)(\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma} \times I)\, \chi_1 + \text{conj}$$

$$= 2\, \chi_1^* \left\{ \frac{(I \times \sigma_1 (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})) + (\sigma_1 (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma}) \times I)}{2} \right\} \chi_1 + \text{conj}\,,$$

et, étant donné IV. 2 et IV. 12, un bref calcul conduit à écrire

$$4\, m_0\, j_{1_r} \simeq 2\, i\, \hbar\, (\psi_{11}^*\, \partial_1\, \psi_{11} + \psi_{12}^*\, \partial_1\, \psi_{12} + \psi_{21}^*\, \partial_1\, \psi_{21} + \psi_{22}^*\, \partial_1\, \psi_{22} - \text{conj}) +$$

$$- \frac{4\, q}{c}\, A_1\, (\psi_{11}^*\, \psi_{11} + \psi_{12}^*\, \psi_{12} + \psi_{21}^*\, \psi_{21} + \psi_{22}^*\, \psi_{22}) -$$

$$- \hbar\, \{ \psi_{11}^*\, [2\, \partial_2\, \psi_{11} + i\, \partial_3\, (\psi_{12} + \psi_{21})] + i\, \psi_{12}^*\, \partial_3\, (-\psi_{11} + \psi_{22}) +$$

$$+ i\, \psi_{21}^*\, \partial_3\, (-\psi_{11} + \psi_{22}) + \psi_{22}^*\, [-i\, \partial_3\, (\psi_{12} + \psi_{21}) - 2\, \partial_2\, \psi_{22}] + \text{conj} \}\,.$$

Or on vérifie aisément que la dernière parenthèse de cette expression est égale à

$$[\psi_{11}^*\, \psi_{12}^*\, \psi_{21}^*\, \psi_{22}^*] \begin{bmatrix} 2\, \partial_2 & i\, \partial_3 & i\, \partial_3 & 0 \\ -i\, \partial_3 & 0 & 0 & i\, \partial_3 \\ -i\, \partial_3 & 0 & 0 & i\, \partial_3 \\ 0 & -i\, \partial_3 & -i\, \partial_3 & -2\, \partial_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{bmatrix} + \text{conj} = 0$$

$$= \chi_1^* \left\{ \left(\mathrm{I} \times \begin{bmatrix} \partial_2 & i\, \partial_3 \\ -i\, \partial_3 & -\partial_2 \end{bmatrix} \right) + \left(\begin{bmatrix} \partial_2 & i\, \partial_3 \\ -i\, \partial_3 & -\partial_2 \end{bmatrix} \times \mathrm{I} \right) \right\} \chi_1 + \text{conj}$$

$$= \chi_1^*\, [(\mathrm{I} \times (\partial_2\, \sigma_3 - \partial_3\, \sigma_2)) + ((\partial_2\, \sigma_3 - \partial_3\, \sigma_2) \times \mathrm{I})]\, \chi_1 + \text{conj}.$$

La définition III. 37 de l'opérateur $\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}$ et le fait qne l'étude des deux autres composantes de $\vec{j_r}$ est identique, amènent alors à poser

$$4\, m_0\, j_r \simeq (2\, i\, \hbar\, \chi_1^*\, \vec{\nabla}\, \chi_1 + \text{conj}) - \frac{4\, q}{c}\, \vec{A}\, \chi_1^*\, \chi_1 -$$

$$- \hbar\, \{ \chi_1^*\, [(\mathrm{I} \times (\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma})) + ((\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}) \times \mathrm{I})]\, \chi_1 + \text{conj} \}\,,$$

ce qui nous conduit à la forme finale de l'approximation non relativiste de $\vec{j}_r$,

$$\vec{j}_r \simeq \frac{i\hbar}{2\,m_0}(\chi_1^* \vec{\nabla} \chi_1 - \chi_1 \vec{\nabla} \chi_1^*) - \frac{q}{m_0\,c} \vec{A} \chi_1^* \chi_1 + \vec{u},$$

avec

$$\text{IV. 20} \qquad \vec{u} = -\frac{\hbar}{2\,m_0} \chi_1^* \frac{(\mathrm{I} \times (\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma})) + ((\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}) \times \mathrm{I})}{2} \chi_1 + \text{conj}.$$

On voit allors que l'expression IV. 19 de $\vec{j}_n$ ne coincide pas avec l'approximation non relativiste de $\vec{j}_r$, les deux expressions différant d'un vecteur $\vec{u}$, donné par IV. 20. Or nous avions déjà souligné un fait analogue en étudiant au Chapitre III § 3 l'approximation non relativiste de la théorie de Dirac, et il est intéressant de comparer ici les deux vecteurs (III. 40 et IV. 20) qui, dans chaque cas, sont à l'origine de cette anomalie. On voit clairement que $\vec{u}$ s'obtient formellement de III. 40 en substituant les matrices $\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}$ par $\dfrac{(\mathrm{I} \times (\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma})) + ((\vec{\nabla} \wedge \vec{\sigma}) \times \mathrm{I})}{2}$, ce qui semble confirmer à nouveau le procédé de fusion auquel nous avons souvent fait référence dans ce travail.

En renvoyant alors à la discussion de la fin du Chapitre III on peut dire que le raccord entre $\vec{j}_r$ et $\vec{j}_n$ sera correct si $\vec{\nabla} \cdot \vec{u} = 0$. Or c'est bien ce qui arrive et qui peut être vérifié directement à partir de l'expression IV. 20 de $\vec{u}$. Nous omettrons ce calcul qui est sans difficulté.

Passons ensuite à l'étude non relativiste du lagrangien II. 16 de la particule de spin maximum 1 lequel, en vertu de IV. 1 et IV. 2 s'écrit

$$\text{IV. 21} \quad \mathcal{L} = \frac{c}{2} \psi^* \left[\frac{\varepsilon}{c} \, \frac{a_4 + b_4}{2} + \vec{\pi} \cdot \frac{a_4 \vec{b} + \vec{a} b_4}{2} - m_0\, c\, a_4\, b_4 \right] \psi + \text{conj}.$$

On peut vérifier qu'il est possible de donner à cette expression la forme

IV. 22 $$\mathcal{L}=\frac{c}{2}\left\{\chi_1^*\left(\frac{\varepsilon}{c}-m_0 c\right)\chi_1+\frac{1}{2}\chi_1^*(-\theta_2\chi_2-\theta_1\chi_3)+\right.$$

$$+\chi_4^*\left(-\frac{\varepsilon}{c}-m_0 c\right)\chi_4+\frac{1}{2}\chi_4^*(\theta_1\chi_2+\theta_2\chi_3)+m_0 c\,\chi_2^*\chi_2+$$

$$\left.+\frac{1}{2}\chi_2^*(-\theta_2\chi_1+\theta_1\chi_4)+m_0 c\,\chi_3^*\chi_3+\frac{1}{2}\chi_3^*(-\theta_1\chi_1+\theta_2\chi_4)\right\}+\text{conj},$$

le passage de IV. 21 à IV. 22 étant identique à celui de IV. 3 à IV. 4. Or à l'approximation non relativiste on a $\frac{\varepsilon_r}{c}-m_0 c\simeq\frac{\varepsilon_n}{c}$ et $-\frac{\varepsilon_r}{c}-m_0 c\simeq-\frac{\varepsilon_n}{c}-2\,m_0 c$ de sorte que $\mathcal{L}$ devient

$$\mathcal{L}=\frac{c}{2}\left\{\chi_1^*\frac{\varepsilon}{c}\chi_1+\frac{1}{2}\chi_1^*(-\theta_2\chi_2-\theta_1\chi_3)+m_0 c(\chi_3^*\chi_3+\chi_2^*\chi_2)-\right.$$

$$-\frac{1}{2}(\chi_2^*\theta_2\chi_1+\chi_3^*\theta_1\chi_1)+\frac{1}{2}(\chi_2^*\theta_1\chi_4+\chi_3^*\theta_2\chi_4)-$$

$$\left.-\chi_4^*\frac{\varepsilon}{c}\chi_4-2\,m_0 c\,\chi_4^*\chi_4+\frac{1}{2}\chi_4^*(\theta_1\chi_2+\theta_2\chi_3)\right\}+\text{conj}.$$

Dans cette expression on ne doit garder que les seuls termes en β^0 et β^1, c'est à dire que les quatre derniers termes dans la parenthèse doivent être négligés, leur ordre de grandeur étant celui de β^2. La forme approchée de $\mathcal{L}$ est donc

$$\mathcal{L}\simeq\chi_1^*\frac{\varepsilon}{2}\chi_1+\frac{m_0 c^2}{2}(\chi_2^*\chi_2+\chi_3^*\chi_3)-$$

$$-\frac{c}{4}(\chi_1^*\theta_2\chi_2+\chi_1^*\theta_1\chi_3+\chi_2^*\theta_2\chi_1+\chi_3^*\theta_1\chi_1)+\text{conj},$$

soit encore, par IV. 1, IV. 2 et IV. 6,

IV. 23 $$\mathcal{L}\simeq\mathcal{L}_n\equiv-\frac{i\hbar}{2}\chi_1^*\partial_t\chi_1-\frac{q}{2}V\chi_1^*\chi_1+\frac{m_0 c^2}{2}(\chi_2^*\chi_2+\chi_3^*\chi_3)-$$

$$-\frac{i\hbar c}{4}[\chi_1^*(I\times\vec{\sigma})\cdot\vec{\nabla}\chi_2+\chi_1^*(\vec{\sigma}\times I)\cdot\vec{\nabla}\chi_3+$$

$$+\chi_2^*(I\times\vec{\sigma})\cdot\vec{\nabla}\chi_1+\chi_3^*(\vec{\sigma}\times I)\cdot\vec{\nabla}\chi_1]+$$

$$+\frac{q}{4}\vec{A}\cdot[\chi_1^*(I\times\vec{\sigma})\chi_2+\chi_1^*(\vec{\sigma}\times I)\chi_3+$$

$$+\chi_2^*(I\times\vec{\sigma})\chi_1+\chi_3^*(\vec{\sigma}\times I)\chi_1]+\text{conj.}$$

Telle est l'approximation non relativiste du lagrangien de la particule de spin maximum 1, et l'on peut vérifier que les équations de Lagrange qui en decoulent sont bien les équations IV. 14. En effet, on a

$$\frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial(\partial_k\chi_1^*)}=\frac{i\hbar c}{4}(I\times\sigma_k)\chi_2+\frac{i\hbar c}{4}(\sigma_k\times I)\chi_3 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial(\partial_t\chi_1^*)}=\frac{i\hbar}{2}\chi_1$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial\chi_1^*}=-\frac{i\hbar}{2}\partial_t\chi_1-q\,V\chi_1-\frac{i\hbar c}{4}(I\times\vec{\sigma})\cdot\vec{\nabla}\chi_2-$$

$$-\frac{i\hbar c}{4}(\vec{\sigma}\times I)\cdot\vec{\nabla}\chi_3+\frac{q}{2}\vec{A}\cdot[(I\times\vec{\sigma})\chi_2+(\vec{\sigma}\times I)\chi_3]$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial(\partial_k\chi_2^*)}=\frac{i\hbar c}{4}(I\times\sigma_k)\chi_1 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial(\partial_t\chi_2^*)}=0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial\chi_2^*}=m_0c^2\chi_2-\frac{i\hbar c}{4}(I\times\vec{\sigma})\cdot\vec{\nabla}\chi_1+\frac{q}{2}\vec{A}\cdot(I\times\vec{\sigma})\chi_1$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial(\partial_k\chi_3^*)}=\frac{i\hbar c}{4}(\sigma_k\times I)\chi_1 \qquad \frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial(\partial_t\chi_3^*)}=0$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_n}{\partial\chi_3^*}=m_0c^2\chi_3-\frac{i\hbar c}{4}(\vec{\sigma}\times I)\cdot\vec{\nabla}\chi_1+\frac{q}{2}\vec{A}\cdot(\vec{\sigma}\times I)\chi_1,$$

de sorte que les équations de Lagrange prennent la forme

$$a)\quad \frac{i\hbar c}{2}(I\times\vec{\sigma})\cdot\vec{\nabla}\chi_2+\frac{i\hbar c}{2}(\vec{\sigma}\times I)\cdot\vec{\nabla}\chi_3=-i\hbar\,\partial_t\chi_1-$$

$$-q\,V\chi_1+\frac{q}{2}\vec{A}\cdot[(I\times\vec{\sigma})\chi_2+(\vec{\sigma}\times I)\chi_3]$$

IV. 24

$$b)\quad \chi_2=\frac{i\hbar}{2m_0c}(I\times\vec{\sigma})\cdot\vec{\nabla}\chi_1-\frac{q}{2m_0c^2}\vec{A}\cdot(I\times\vec{\sigma})\chi_1$$

$$c)\quad \chi_3=\frac{i\hbar}{2m_0c}(\vec{\sigma}\times I)\cdot\vec{\nabla}\chi_1-\frac{q}{2m_0c^2}\vec{A}\cdot(\vec{\sigma}\times I)\chi_1.$$

On retrouve ainsi les équations IV. 14 *b c*, et par la substitution de IV. 24 *b c* dans IV. 24 *a* on obtient

$$\frac{1}{4\,m_0}\left(I\times\vec{\sigma}\cdot\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\right)^2\chi_1+$$
$$+\frac{1}{4\,m_0}\left(\vec{\sigma}\cdot\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)\times I\right)^2\chi_1=-\,i\hbar\,\partial_t\chi_1-q\,V\chi_1\,,$$

c'est à dire, par I. 3 et III. 26,

$$\left[\frac{1}{2\,m_0}\left(i\hbar\vec{\nabla}-\frac{q}{c}\vec{A}\right)^2+\frac{\hbar q}{2\,m_0\,c}\,\frac{(I\times\vec{\sigma})+(\vec{\sigma}\times I)}{2}\cdot\vec{H}\right]\chi_1=$$
$$=-\,i\hbar\,\partial_t\chi_1-q\,V\chi_1\,,$$

ce qui est bien l'équation IV. 14 *a*. On a ainsi démontré que le système IV. 14 peut se déduire du lagrangien $\mathcal{L}_n$ défini en IV. 23 et obtenu par l'approximation en β de $\mathcal{L}$. En plus, et par l'introduction des équations de Lagrange IV. 24 *b c* dans IV. 23 on vérifie aisément que $\mathcal{L}_n\equiv 0$.

Nous signalons encore que la seule équation IV. 14 *a* peut aussi être obtenue à partir d'un autre lagrangien qui n'est fonction que de quatre variables.

$$\mathcal{L}'_n=\frac{\hbar^2}{2\,m_0}\vec{\nabla}\chi_1^*\cdot\vec{\nabla}\chi_1+\frac{i\hbar}{2}(\chi_1^*\,\partial_t\chi_1-\chi_1\,\partial_t\chi_1^*)+$$
$$+\frac{\hbar q}{2\,m_0\,c}\chi_1^*\frac{(\vec{\sigma}\times I)+(I\times\vec{\sigma})}{2}\chi_1+$$
$$+\frac{i\hbar q}{2\,m_0\,c}\vec{A}\cdot(\vec{\nabla}\chi_1^*\cdot\chi_1-\chi_1^*\cdot\vec{\nabla}\chi_1)+\left(q\,V+\frac{q^2}{2\,m_0\,c^2}\vec{A}^2\right)\chi_1^*\chi_1\,.$$

On trouve ici une nouvelle confirmation de la méthode de fusion, ce lagrangien pouvant s'obtenir formellement de $\mathcal{L}_P$ (III. 42) en substituant $\vec{\sigma}$ par $\dfrac{(\vec{\sigma}\times I)+(I\times\vec{\sigma})}{2}$ et en faisant intervenir, au lieu d'une fonction d'onde à 2 composantes, une fonction d'onde à $2\times 2=4$ composantes.

§ 3. La forme vectorielle des équations.

Les équations IV. 14 donnent la description non relativiste de la particule de spin maximum 1, c'est à dire qu'elles traduisent le comportement d'une particnle susceptible de prendre l'une des deux valeurs du spin, 0 ou 1. Ce fait sera nettement mis en évidence une fois que l'on parviendra à mettre IV. 14 sous sa forme vectorielle équivalente, cette étude faisant l'objet du présent paragraphe.

Nous commencerons par écrire explicitement IV. 14 *a* en utilisant les matrices $\vec{\sigma}$ définies en IV. 12 ce qui donne

$$\frac{4\,m_0\,c}{\hbar\,q}\left(\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2\,m_0}\right)_{op}\psi_{11}+(H_x-i\,H_y)\,(\psi_{12}+\psi_{21})+2\,H_z\,\psi_{11}=0$$

$$\frac{4\,m_0\,c}{\hbar\,q}\left(\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2\,m_0}\right)_{op}\psi_{12}+H_x\,(\psi_{11}+\psi_{22})+i\,H_y\,(\psi_{11}-\psi_{22})=0$$

$$\frac{4\,m_0\,c}{\hbar\,q}\left(\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2\,m_0}\right)_{op}\psi_{21}+H_x\,(\psi_{11}+\psi_{22})+i\,H_y\,(\psi_{11}-\psi_{22})=0$$

$$\frac{4\,m_0\,c}{\hbar\,q}\left(\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2\,m_0}\right)_{op}\psi_{22}+(H_x+i\,H_y)\,(\psi_{12}+\psi_{21})-2\,H_z\,\psi_{22}=0\,,$$

soit encore

$$\frac{4\,m_0\,c}{\hbar\,q}\left(\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2\,m_0}\right)_{op}\begin{bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12}\\ \psi_{21} & \psi_{22}\end{bmatrix}+H_x\begin{bmatrix}\psi_{12}+\psi_{21} & \psi_{11}+\psi_{22}\\ \psi_{11}+\psi_{22} & \psi_{12}+\psi_{21}\end{bmatrix}+$$

$$+\,i\,H_y\begin{bmatrix}-\psi_{12}-\psi_{21} & \psi_{11}-\psi_{22}\\ \psi_{11}-\psi_{22} & \psi_{12}+\psi_{21}\end{bmatrix}+H_z\begin{bmatrix}2\,\psi_{11} & 0\\ 0 & -2\,\psi_{22}\end{bmatrix}=0\,.$$

En introduisant la matrice 2×2 $\overline{\Psi}=\begin{bmatrix}\psi_{11} & \psi_{12}\\ \psi_{21} & \psi_{22}\end{bmatrix}$, et en tenant compte de IV. 12, on voit aisément que les équations précédentes peuvent se mettre sous la forme

$$\text{IV. 25}\qquad \frac{4\,m_0\,c}{\hbar\,q}\left(\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2\,m_0}\right)_{op}\overline{\Psi}+\sum_{k=1}^{3}H_k\,(\sigma_k\,\overline{\Psi}+\overline{\Psi}\,\sigma_k^T)=0\,.$$

Or on vérifie que les matrices $\vec{\sigma}$ (IV 12) sont telles que $\sigma_k^T \sigma_2 = -\sigma_2 \sigma_k$ $(k = 1, 2, 3)$ et par conséquent, si l'on multiplie IV.25 par σ_2 à droite, on obtient

$$\text{IV.26} \qquad \frac{4 m_0 c}{\hbar q}\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right)_{op} \overline{\Psi}\,\sigma_2 + \sum_{k=1}^{3} H_k (\sigma_k \overline{\Psi}\,\sigma_2 - \overline{\Psi}\,\sigma_2 \sigma_k) = 0 .$$

Rappelons-nous maintenant que le système de quatre matrices formé par l'identité I et les trois $\vec{\sigma}$ est un système complet pour l'ensemble des matrices 2×2, c'est à dire que toute matrice 2×2 peut être écrite comme combinaison linéaire de I, σ_1, σ_2, σ_3. En particulier, on peut poser pour $\overline{\Psi}\,\sigma_2$:

$$\text{IV.27} \qquad \overline{\Psi}\,\sigma_2 = \begin{bmatrix} i\psi_{12} & -i\psi_{11} \\ i\psi_{22} & -i\psi_{12} \end{bmatrix} =$$

$$= \Omega_0 I + \Omega_1 \sigma_1 + \Omega_2 \sigma_2 + \Omega_3 \sigma_3 = \Omega_0 I + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma} .$$

En introduisant alors cette expression de $\overline{\Psi}\,\sigma_2$ dans les équations IV.26 il vient, en vertu des propriétés de commutations des σ_k (*),

$$0 = \frac{4 m_0 c}{\hbar q}\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right)_{op} (\Omega_0 I + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}) + \sum_k H_k [\sigma_k (\Omega_0 I + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}) -$$

$$- (\Omega_0 I + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}) \sigma_k] =$$

$$= \frac{4 m_0 c}{\hbar q}\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right) (\Omega_0 I + \vec{\Omega} \cdot \vec{\sigma}) +$$

$$+ 2 i [\sigma_1 (H_2 \Omega_3 - H_3 \Omega_2) + \sigma_2 (H_3 \Omega_1 - H_1 \Omega_3) + \sigma_3 (H_1 \Omega_2 - H_2 \Omega_1)] =$$

$$= \frac{4 m_0 c}{\hbar q} I \left\{\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right) \Omega_0\right\} +$$

$$+ \sigma_1 \left\{\frac{4 m_0 c}{\hbar q}\left(\varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2 m_0}\right) \Omega_1 + 2 i (H_2 \Omega_3 - H_3 \Omega_2)\right\} +$$

(*) $\sigma_k^2 = I$, $\sigma_k \sigma_l = -\sigma_l \sigma_k$ $(k, l = 1, 2, 3)$; $\sigma_k \sigma_l = i \sigma_m$ (*klm* en permutation circulaire de 123).

$$+\sigma_2\left\{\frac{4\,m_0\,c}{\hbar\,q}\left(\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2\,m_0}\right)\Omega_2+2\,i\,(H_3\,\Omega_1-H_1\,\Omega_3)\right\}+$$

$$+\sigma_3\left\{\frac{4\,m_0\,c}{\hbar\,q}\left(\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2\,m_0}\right)\Omega_3+2\,i\,(H_1\,\Omega_2-H_2\,\Omega_1)\right\}.$$

Puisque les matrices I, σ_1, σ_2, σ_3 sont linéairements indépendentes, leurs coefficients sont nuls, et il en résulte les quatre équations

IV.28

$$a)\quad \left[\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2\,m_0}\right]_{op}\Omega_0=0$$

$$b)\quad \left[\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2\,m_0}\right]_{op}\vec{\Omega}+\frac{i\,\hbar\,q}{2\,m_0\,c}\vec{H}\wedge\vec{\Omega}=0\,.$$

La seconde de ces équations peut se mettre sous une forme plus suggestive en remarquant que $i\vec{H}\wedge\vec{\Omega}$ s'écrit aussi

IV.29

$$i\vec{H}\wedge\vec{\Omega}=\begin{vmatrix}0 & -i\,H_z & i\,H_y\\ i\,H_z & 0 & -i\,H_x\\ -i\,H_y & i\,H_x & 0\end{vmatrix}\begin{vmatrix}\Omega_1\\ \Omega_2\\ \Omega_3\end{vmatrix}=$$

$$=(H_1J_1+H_2J_2+H_3J_3)\vec{\Omega}=(\vec{H}\cdot\vec{J})\vec{\Omega},$$

les $\vec{J}$ $(J_1\,J_2\,J_3)$ étant les trois matrices

$$J_1=\begin{vmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & -i\\ 0 & i & 0\end{vmatrix}\qquad J_2=\begin{vmatrix}0 & 0 & i\\ 0 & 0 & 0\\ -i & 0 & 0\end{vmatrix}\qquad J_3=\begin{vmatrix}0 & -i & 0\\ i & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{vmatrix}.$$

Les relations IV.28 viennent alors

IV.30

$$a)\quad \left[\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2\,m_0}\right]_{op}\Omega_0=0$$

$$b)\quad \left[\varepsilon-\frac{\vec{\pi}^2}{2\,m_0}+\frac{\hbar\,q}{2\,m_0\,c}\vec{J}\cdot\vec{H}\right]_{op}\vec{\Omega}=0,$$

ce qui est la forme vectorielle des équations IV. 14 *a*. Ajoutons que si l'on veut dans la dernière équation — qui est une équation vectorielle de Pauli — mettre en évidence les valeurs $\hbar$, 0 et $-\hbar$ de la composante du spin selon OZ, il suffit de la multiplier à gauche par la matrice unitaire $U = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & -i & 0 \end{bmatrix}$.

Alors, en définissant

$$\sqrt{2} \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -i & 0 \\ 0 & 0 & -\sqrt{2} \\ -1 & -i & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{bmatrix} = -i \begin{bmatrix} \psi_0 \\ \frac{\psi_{12} + \psi_{21}}{\sqrt{2}} \\ \psi_{22} \end{bmatrix},$$

l'équation IV. 30 *b* prend la forme

$$\left\{ \varepsilon - \frac{\vec{\pi}^2}{2\, m_0} + \frac{\hbar\, q}{2\, m_0\, c} \vec{J}' \cdot \vec{H} \right\} \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \end{bmatrix} = 0$$

où les $\vec{J}'$ $(\vec{J}' = U \vec{J} U^{-1})$ sont les trois matrices bien connues

$$J_1' = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \qquad J_2' = \frac{\sqrt{2}}{2} \begin{bmatrix} 0 & -i & 0 \\ i & 0 & -i \\ 0 & i & 0 \end{bmatrix}$$

$$J_3' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

En passant ensuite aux équations IV. 13 *b c* on vérifie, compte tenu de I. 2, qu'elles peuvent s'écrire sous la forme

IV. 31 $$\begin{bmatrix} \psi_{13} & \psi_{23} \\ \psi_{14} & \psi_{24} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\, m_0\, c} (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})_{op} \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix}^T$$

IV. 32 $$\begin{bmatrix} \psi_{31} & \psi_{32} \\ \psi_{41} & \psi_{42} \end{bmatrix} = \frac{1}{2\, m_0\, c} (\vec{\pi} \cdot \vec{\sigma})_{op} \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix}.$$

Or comme il a été dit plus haut, toute matrice 2×2 peut être écrite comme une combinaison linéaire des quatre matrices

I, $\vec{\sigma}$; c'est à dire que l'on peut poser, avec certains coefficients Δ_k et θ_k $(k=1,2,3,0)$,

IV. 33
$$\begin{bmatrix} \psi_{13} & \psi_{23} \\ \psi_{14} & \psi_{24} \end{bmatrix} \sigma_2 = \begin{bmatrix} i\,\psi_{23} & -i\,\psi_{13} \\ i\,\psi_{24} & -i\,\psi_{14} \end{bmatrix} =$$
$$= \Delta_0\, I + \Delta_1\,\sigma_1 + \Delta_2\,\sigma_2 + \Delta_3\,\sigma_3 = \Delta_0\, I + \vec{\Delta}\cdot\vec{\sigma}$$

IV. 34
$$\begin{bmatrix} \psi_{31} & \psi_{32} \\ \psi_{41} & \psi_{42} \end{bmatrix} \sigma_2 = \begin{bmatrix} i\,\psi_{32} & -i\,\psi_{31} \\ i\,\psi_{42} & -i\,\psi_{41} \end{bmatrix} =$$
$$= \theta_0\, I + \theta_1\,\sigma_1 + \theta_2\,\sigma_2 + \theta_3\,\sigma_3 = \theta_0\, I + \vec{\theta}\cdot\vec{\sigma}.$$

Or des formules IV. 27 on tire

IV. 25
$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix}^T \sigma_2 = \begin{bmatrix} i\,\psi_{21} & -i\,\psi_{11} \\ i\,\psi_{22} & -i\,\psi_{12} \end{bmatrix} =$$
$$= \begin{bmatrix} -\Omega_0 + \ \Omega_3 & \Omega_1 - i\,\Omega_2 \\ \Omega_1 + i\,\Omega_2 & -\Omega_0 - \ \Omega_3 \end{bmatrix} = -\,\Omega_0 + \vec{\Omega}\cdot\vec{\sigma}.$$

Multiplions alors IV. 31 et IV. 32 par σ_2 à droite et introduisons dans les équations ainsi obtenues les expressions de IV. 23, IV. 34, IV. 35 et IV. 37, pour arriver aux relations

IV. 36 $$\Delta_0\,\mathrm{I} + \sum_1^3 \Delta_k\,\sigma_k = (2\,m_0\,c)^{-1} \sum_1^3 \pi_k\,\sigma_k\,(-\Omega_0\,\mathrm{I} + \Omega_1\,\sigma_1 + \Omega_2\,\sigma_2 + \Omega_3\,\sigma_3)$$

IV. 37 $$\theta_0\,\mathrm{I} + \sum_1^3 \theta_k\,\sigma_k = (2\,m_0\,c)^{-1} \sum_1^3 \pi_k\,\sigma_k\,(\ \ \Omega_0\,\mathrm{I} + \Omega_1\,\sigma_1 + \Omega_2\,\sigma_2 + \Omega_3\,\sigma_3).$$

En vertu des propriétés de multiplication des σ_k, on peut donner à IV. 36 la forme suivante,

$$\Delta_0\,\mathrm{I} + \sum_1^3 \Delta_k\,\sigma_k = (2\,m_0\,c)^{-1}\,\{-\pi_1\,\Omega_0\,\sigma_1 + \pi_1\,\Omega_1\,\mathrm{I} + i\,\pi_1\,\Omega_2\,\sigma_3 - i\,\pi_1\,\Omega_3\,\sigma_2\ -$$
$$-\,\pi_2\,\Omega_0\,\sigma_2 - i\,\pi_2\,\Omega_1\,\sigma_3 + \pi_2\,\Omega_2\,\mathrm{I} + i\,\pi_2\,\Omega_3\,\sigma_1\ -$$
$$-\,\pi_3\,\Omega_0\,\sigma_3 + i\,\pi_3\,\Omega_1\,\sigma_2 - i\,\pi_3\,\Omega_2\,\sigma_1 + \pi_3\,\Omega_3\,\mathrm{I}\} =$$
$$= (2\,m_0\,c)^{-1} \left\{ \mathrm{I}\,(\pi_1\,\Omega_1 + \pi_2\,\Omega_2 + \pi_3\,\Omega_3) + \sum_k^3 \sigma_k\,(-\pi_k\,\Omega_0 + i\,(\vec{\pi}\wedge\vec{\Omega})_k) \right\},$$

et quant à l'équation IV. 37 elle devient, après un calcul identique,

$$\theta_0 \mathrm{I} + \sum_1^3 \theta_k \sigma_k = (2\, m_0\, c)^{-1} \Big\{ \mathrm{I} (\pi_1\, \Omega_1 + \pi_2\, \Omega_2 + \pi_3\, \Omega_3) +$$

$$+ \sum_k^3 \sigma_k (\pi_k\, \Omega_0 + i (\vec{\pi} \wedge \vec{\Omega})_k) \Big\}.$$

L'indépendence des quatre matrices $\mathrm{I}, \vec{\sigma}$, nous conduit, dans les équations précédentes, à annuller les coefficients de chacune de ces matrices et par là-même à obtenir les relations

$$\Delta_0 = (2\, m_0\, c)^{-1}\, \vec{\pi} \cdot \vec{\Omega}$$

$$\vec{\Delta} = (2\, m_0\, c)^{-1} (-\vec{\pi}\, \Omega_0 + i\, \vec{\pi} \wedge \vec{\Omega})$$

$$\theta_0 = (2\, m_0\, c)^{-1}\, \vec{\pi} \cdot \vec{\Omega}$$

$$\vec{\theta} = (2\, m_0\, c)^{-1} (\vec{\pi}\, \Omega_0 + i\, \vec{\pi} \wedge \vec{\Omega}),$$

c'est à dire, en ajoutant et retranchant,

IV. 38
$$\begin{aligned} \theta_0 - \Delta_0 &= 0 \\ \vec{\theta} - \vec{\Delta} &= (m_0\, c)^{-1}\, \vec{\pi}\, \Omega_0 \end{aligned}$$

IV. 39
$$\begin{aligned} \theta_0 + \Delta_0 &= (m_0\, c)^{-1}\, \vec{\pi} \cdot \vec{\Omega} \\ \vec{\theta} + \vec{\Delta} &= i\, (m_0\, c)^{-1}\, \vec{\pi} \wedge \vec{\Omega}. \end{aligned}$$

La forme vectorielle des équations spinorielles IV. 14 est donc donnée par l'ensemble des équations IV. 30, IV. 38, IV 39 et si l'on y fait apparaitre explicitement les opérateurs ε_{op} et $\vec{\pi}_{op}$, définis en IV. 1 et IV. 2, ces équations s'écrivent

$$a) \quad \left[i\hbar\, \partial_t + q\, V + \frac{1}{2\, m_0} \left(i\hbar\, \vec{\nabla} - \frac{q}{c}\, \vec{A} \right)^2 \right] \Omega_0 = 0$$

IV. 40 $\quad b) \quad \theta_0 - \Delta_0 = 0$

$$c) \quad \vec{\theta} - \vec{\Delta} = (m_0\, c)^{-1} \left(i\hbar\, \vec{\nabla} - \frac{q}{c}\, \vec{A} \right) \Omega_0$$

$$a) \quad \left[i\hbar\, \partial_t + qV + \frac{1}{2m_0}\left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)^2 - \frac{\hbar q}{2m_0 c}\vec{J}\cdot\vec{H} \right]\vec{\Omega} = 0$$

$$\text{IV.41} \quad b) \quad \theta_0 + \Delta_0 = (m_0 c)^{-1}\left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\cdot\vec{\Omega}$$

$$c) \quad \vec{\theta} + \vec{\Delta} = i(m_0 c)^{-1}\left(i\hbar\vec{\nabla} - \frac{q}{c}\vec{A}\right)\wedge\vec{\Omega}.$$

Telle est la forme vectorielle des équations non relativistes de la particule de spin maximum 1 et charge q se déplaçant dans un champ électromagnétique de potentiels $\vec{A}$ et V. A l'instar de ce qui arrivait déjà dans le cas relativiste, les équations décrivant chaque type de particule (celle de spin 0 et celle de spin 1) apparaissent séparées, les scalaires Ω_0 et $\theta_0 - \Delta_0$ et le vecteur $\vec{\theta} - \vec{\Delta}$ se rapportant à la particule de spin 0, les vecteurs $\vec{\Omega}$ et $\vec{\theta} + \vec{\Delta}$ et le scalaire $\theta_0 + \Delta_0$ étant associés à la particule de spin 1.

L'évolution dans le temps de l'état de la particule de spin 0 vient naturellement sous la forme d'une équation de Schrödinger (IV 40a), tandis que la description dans le temps de la particule de spin 1 est traduite par l'équation IV. 41a, qui est une équation de Pauli vectorielle. Des grandeurs de champ Ω_0 et $\vec{\Omega}$ données par IV. 40a et IV. 41a on déduit les expressions pour $\vec{\theta} - \vec{\Delta}$, $\theta_0 + \Delta_0$ et $\vec{\theta} + \vec{\Delta}$ au moyen de IV. 40c et IV. 41bc.

L'indépendance des deux cas possibles de spin (celui du spin 0 et celui du spin 1) étant complète, on peut étudier séparément chaque cas en considérant que l'autre cas n'est pas réalisé dans la nature. Ainsi, s'il n'est question que de la particule de spin 0, on doit considérer que la particule de spin 1 n'existe pas et, en conséquence, prendre comme nulles les grandeurs de champ qui la décrivent, c'est à dire, $\vec{\Omega} = 0$ (et par la même, $\theta_0 + \Delta_0 = 0$ et $\vec{\theta} + \vec{\Delta} = 0$). Inversement, si l'on veut étudier la particule de spin 1 on doit poser $\Omega_0 = 0$ (on a alors aussi $\theta_0 - \Delta_0 = \vec{\theta} - \vec{\Delta} = 0$).

Ces remarques seront utiles pour démontrer un résultat dont nous avons déjà fait usage sans l'avoir toutefois prouvé, à savoir que les grandeurs Ω_0, θ_0, Δ_0, $\vec{\Omega}$, $\vec{\theta}$ et $\vec{\Delta}$ possèdent effectivement les propriétés de variance ci-dessus indiquées. Pour ce faire, envisageons d'abord le cas de la particule de spin 1 (et, par conséquent, prenons $\Omega_0 = 0$) et écrivons explicitement les équations inverses de IV. 27:

$$\text{IV. 42} \qquad \begin{array}{ll} \Omega_0 = i/2\,(\psi_{12} - \psi_{21}) & \Omega_2 = i/2\,(-i\,\psi_{11} - i\,\psi_{22}) \\ \Omega_1 = i/2\,(-\psi_{11} + \psi_{22}) & \Omega_3 = i/2\,(\psi_{12} + \psi_{21}). \end{array}$$

$\Omega_0 = 0$ implique alors $\psi_{12} = \psi_{21}$ et le spineur de rang 2 $\psi_{ik}(i, k = 1, 2)$ devient symétrique. Or, dans ces conditions, on démontre en théorie des spineurs [20] que les équations IV. 42 définissent $\Omega_1\,\Omega_2\,\Omega_3$ comme étant les composantes d'un vecteur de l'espace tri-dimensionnel.

D'autre part, et en considérant le cas de la particule de spin 0 (et donc en prenant $\vec{\Omega} = 0$), les mêmes formules IV. 42 permettent de vérifier par un raisonnement analogue que Ω_0 est effectivement un scalaire.

Avant de finir ce paragraphe, nous allons utiliser le formalisme vectoriel que l'on vient de développer pour présenter l'expression de la densité de probabilité ρ_n et du flux de probabilite $\vec{j}_n$ en fonction des grandeurs Ω_0 et $\vec{\Omega}$. Or les formules IV. 27 peuvent encore s'écrire

$$\begin{bmatrix} \psi_{11} \\ \psi_{12} \\ \psi_{21} \\ \psi_{22} \end{bmatrix} = -i \begin{vmatrix} 0 & -1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Omega_0 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{vmatrix};$$

$$|\,\psi_{11}^*\,\psi_{12}^*\,\psi_{21}^*\,\psi_{22}^*\,| = i\,|\,\Omega_0^*\,\Omega_1^*\,\Omega_2^*\,\Omega_3^*\,| \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix},$$

et, par conséquent, l'expression IV. 18 de ρ_n vient

$$\rho_n = \chi_1^*\,\chi_1 = |\,\Omega_0^*\,\Omega_1^*\,\Omega_2^*\,\Omega_3^*\,| \begin{vmatrix} 0 & 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ -i & 0 & 0 & -i \\ 0 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 0 & -1 & i & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & i & 0 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \Omega_0 \\ \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{vmatrix} =$$

$$= 2\,(\Omega_0^*\,\Omega_0 + \Omega^* \cdot \Omega).$$

D'une façon analogue et en partant de la définition IV. 19 de $\vec{j}_n$, on obtient

$$\vec{j}_n = \frac{i\hbar}{m_0}\left(\Omega_0^*\,\vec{\nabla}\,\Omega_0 + \sum_1^3 \Omega_k^*\,\vec{\nabla}\,\Omega_k - \text{conj}\right) - \frac{q}{m_0\,c}\,(\Omega_0^*\,\Omega_0 + \vec{\Omega}^* \cdot \vec{\Omega})\,\vec{A}\,.$$

CHAPITRE V

La théorie du photon à l'approximation non relativiste

§ 1. Les équations de la particule de spin maximum 1 (sans charge).

L'étude développée dans les Chapitres II, III et IV concerne le cas général d'une particule de charge q et spin 0 ou 1, se déplaçant au sein d'un champ électromagnétique. Dans le présent chapitre on va cependant restreindre la généralité des résultats précédamment obtenus. Le but principal étant d'arriver à l'approximation non relativiste des équations maxwelliennes I. 30, nous allons commencer par considérer la particule non chargée de spin maximum 1 pour nous pencher ensuite sur un cas particulier important du corpuscule de spin 1, le photon (Sur la valeur du spin du photon, voir [21]).

Les équations non relativistes de la particule de spin maximum 1 non chargée s'obtiennent de IV. 14 en posant $q=0$, ce qui donne

$$\text{V. 1} \qquad \begin{aligned} &a) \quad \left[i\hbar\,\partial_t - \frac{\hbar^2}{2\,m_0}\Delta \right] \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix} = 0 \\ &b) \quad \begin{bmatrix} \psi_{13} & \psi_{23} \\ \psi_{14} & \psi_{24} \end{bmatrix} = \frac{i\hbar}{2\,m_0\,c} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix}^T \\ &c) \quad \begin{bmatrix} \psi_{31} & \psi_{32} \\ \psi_{41} & \psi_{42} \end{bmatrix} = \frac{i\hbar}{2\,m_0\,c} (\vec{\nabla} \cdot \vec{\sigma}) \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} \\ \psi_{21} & \psi_{22} \end{bmatrix}; \end{aligned}$$

(rappelons que la variance de $\psi_{11}\,\psi_{12}\,\psi_{21}\,\psi_{22}$ est celle d'un spineur de rang 2); quant à la forme vectorielle de ces équations elle vient, par IV. 40 et IV. 41 (*),

$$
\begin{aligned}
&\theta_0 - \Delta_0 = 0 \\
&\vec{\theta} - \vec{\Delta} = \frac{i\hbar}{m_0 c} \vec{\nabla} \Omega_0 \\
\text{V. 2} \qquad &\left[i\hbar \partial_t - \frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \right] \Omega_0 = 0 . \\
&\Delta_0 + \theta_0 = \frac{i\hbar}{m_0 c} \vec{\nabla} \cdot \vec{\Omega} \\
&\vec{\theta} + \vec{\Delta} = - \frac{\hbar}{m_0 c} \vec{\nabla} \wedge \vec{\Omega} \\
&\left[i\hbar \partial_t - \frac{\hbar^2}{2m_0} \Delta \right] \vec{\Omega} = 0 .
\end{aligned}
$$

Ces équations donnent donc la description non relativiste (spinorielle ou vectorielle) d'une particule sans charge, de masse m_0 et spin maximum 1 et, en particulier, elles peuvent traduire le comportement du photon lorsque celui-ci se déplace avec une vitesse $\vec{v}$ suffisamment faible pour que l'on puisse prendre $\vec{v}^2/c^2 \cong 0$. Ce fait appelle deux remarques:

La première concerne la masse du photon lequel, selon les idées qui ont conduit M. de Broglie à sa Mécanique Ondulatoire du Photon, est supposé posséder une masse propre m_0 très petite mais qui n'est jamais rigoureusement nulle. En effet, cette Mécanique Ondulatoire du Photon étant une application particulière de la méthode générale de la fusion, il y est indispensable d'admettre que les masses des corpuscules qui fusionnent ne sont pas nulles, faut de quoi on ne saurait partir des équations de Dirac comme décrivant adéquatement ces corpuscules et «a fortiori», on ne pourrait obtenir les équations fusionnées comme il a été dit au Chapitre I. Ajoutons que l'une des conséquences de

(*) Comme il a été démontré en IV, § 3, $\vec{\Omega}$ et Ω_0 sont, respectivement, un vecteur et un scalaire de l'espace tridimensionnel. Par conséquent, θ_0 et Δ_0 sont des scalaires, $\vec{\theta}$ et $\vec{\Delta}$ étant, pour leur part, des vecteurs de l'espace à 3 dimensions.

supposer que $m_0 \neq 0$ est que les équations habituelles de l'électromagnétisme doivent être remplacées par les équations de Maxwell--de Broglie I. 30 lesquelles, si l'on y néglige certains termes très petits en m_0^2 qui y apparaissent, se réduisent exactement aux équations de Maxwell. Il est intéréssant de souligner que cette exigeance de masse propre non nulle demeure toujours indispensable au niveau non relativiste car il a été démontré au Chapitre IV que les équations de la particule de spin maximum 1 s'obtiennent par la fusion des équations de deux corpuscules de Pauli. Ici non plus, on ne saurait employer ces équations (et par là-même en obtenir les équations fusionnées) si les corpuscules étaient considérés comme possédant une masse propre rigoureusement nulle.

La remarque suivante concerne les faibles vitesses du photon. Soulignons, avant tout, qu'il y a un sens à chercher l'approximation non relativiste des équations de Maxwell ou plutôt, des équations maxwelliennes I. 30 qui doivent les remplacer au niveau quantique. En effet, s'il est bien acquis que le photon libre se déplace dans le vide avec la vitesse c il c'en reste pas moins que dans certaines circonstances sa vitesse $\vec{v}$ se trouve être bien en-deçà de cette valeur, pouvant parfois être très petite (et donc $\vec{v}^2/c^2 \simeq 0$) ou même nulle. Sans entrer dans les détails, nous allons ici rappeler brièvement deux phénomènes physiques qui semblent confirmer ces affirmations.

Le premier est celui de la propagation de la lumière dans les guides. On sait que pour n'importe quel type de guide, la vitesse de groupe(*) des ondes se propageant dans son intérieur est égale à

$$c \, | \vec{k} \, | \, (\vec{k}^2 + \alpha^2)^{-1/2} ,$$

$\vec{k}$ étant le vecteur de propagation et α une constante caractérisant chaque type de propagation possible dans le guide. Ce résultat est d'ailleurs une conséquence de la seule théorie de Maxwell habituelle, sans aucune intervention de la Mécanique Ondulatoire du Photon. On voit donc que la vitesse du photon est inférieure à c, pouvant devenir très petite pour des valeurs

(*) C'est à dire, la vitesse de propagation de l'énergie, que l'on peut identifier à la vitesse du photon dans le guide.

très élevées de α, et même nulle dans le voisinage des fréquences de coupure [22].

La deuxième expérience que nous voulons rappeler est celle dite du miroir de Wigner [23]. Cette expérience a mis en évidence l'existence de franges d'interférence dans la région de l'espace où un rayon incidant sur un miroir se superpose à son rayon réfléchi. Or, si l'on admet la localisation, il semble bien que la Mécanique Ondulatoire conduise à conclure que dans une frange d'interférence de Wigner les photons se déplacent parallèlement à la surface du miroir avec une vitesse $c\,\mathrm{sen}\,\theta$, θ étant l'angle d'incidence de la lumière. Cette valeur est donc inférieure à c, pouvant même être très petite pour des rayons incidents (et réfléchis) près de la normale au miroir.

§ 2. La signification physique des grandeurs Ω_0, $\vec{\Omega}$, θ_0, $\vec{\theta}$, Δ_0 et $\vec{\Delta}$.

Nous abordons maintenant le problème de trouver la signification physique des grandeurs Ω_0, θ_0, Δ_0, $\vec{\Omega}$, $\vec{\theta}$ et $\vec{\Delta}$. Revenons pour cela à l'étude relativiste des équations de la particule de spin maximum 1 (sans charge) exposée au Chapitre I, et considérons les définitions des grandeurs relativistes de champ à partir des composantes ψ_{ik} de la fonction d'onde. Nous avions, pour les grandeurs maxwelliennes,

$$\text{V. 3} \qquad \begin{array}{lll} H_x = K\,k_0\,\varphi_{23} & E_x = i\,K\,k_0\,\varphi_{14} & A_x = -\,i\,K\,\varphi_1 \\ H_y = K\,k_0\,\varphi_{31} & E_y = i\,K\,k_0\,\varphi_{24} & A_y = -\,i\,K\,\varphi_2 \\ H_z = K\,k_0\,\varphi_{12} & E_z = i\,K\,k_0\,\varphi_{34} & A_z = -\,i\,K\,\varphi_3 \\ V = -\,K\,\varphi_4 & \multicolumn{2}{l}{(K = \hbar/\sqrt{2\,m_0};\; k_0 = m_0\,c/\hbar),} \end{array}$$

et pour les grandeurs non maxwelliennes,

$$\text{V. 4} \qquad \begin{array}{ll} \mathrm{I}_1 = \varphi_0 & \sigma_1 = -\,i\,\varphi_{234} \\ \mathrm{I}_2 = -\,i\,\varphi_{1234} & \sigma_2 = \quad i\,\varphi_{134} \\ \sigma_4 = \varphi_{123} & \sigma_3 = -\,i\,\varphi_{124}\,, \end{array}$$

les seize φ_a $(a = 0, 1, 2, \cdots, 134, 234, 1234)$ étant des fonctions des ψ_{ik} que l'on peut déterminer facilement. En effet, par I. 24, on a

V. 5
$$\begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{bmatrix} \Gamma = \sum_a^{16} \varphi_a \, \gamma_a \, ,$$

et l'on peut vérifier, en tenant compte de I. 23, I. 19 que toutes les matrices γ_a ont leur trace nulle, à la seule exception de $\gamma_0 \equiv \mathrm{I}$ dont la trace est égale à 4. En plus, l'ensemble des seize γ_a étant complet, le produit de deux quelconques γ_a est une matrice γ_a, et l'on a aussi, pour tout γ_a, $\gamma_a^2 = \mathrm{I}$. Multiplions alors V. 5 à gauche par γ_a et prenons la trace de l'équation obtenue. En vertu de ce qui précède, on est alors conduit à

$$\mathrm{Tr}\left(\gamma_a \begin{bmatrix} \psi_{11} & \psi_{12} & \psi_{13} & \psi_{14} \\ \psi_{21} & \psi_{22} & \psi_{23} & \psi_{24} \\ \psi_{31} & \psi_{32} & \psi_{33} & \psi_{34} \\ \psi_{41} & \psi_{42} & \psi_{43} & \psi_{44} \end{bmatrix} \Gamma \right) = 4 \, \varphi_a \, .$$

On voit de par cette formule que chaque γ_a est égal à une combinaison linéaire simple de quatre ψ_{ik}, donnée par

$$\varphi_a = \frac{1}{4} \mathrm{Tr}\,(\gamma_a \Psi \Gamma) \, ,$$

où $\Gamma = i \gamma_2 \gamma_4$ et Ψ désigne la matrice 4×4 des composantes ψ_{ik} (voir I. 17 et I. 20).

Avec les matrices α_μ définies en I. 19, construisons alors la matrice Γ et les seize γ_a (I. 20, I. 23), et introduisons-les dans la formule antérieure. Compte tenu de V. 3, V. 4, on est conduit au tableau suivant

V.6

$$A_x = -\frac{K}{2}\,\frac{i}{2}\,(-\psi_{11} + \psi_{22} + \psi_{33} - \psi_{44}) \qquad \cong -\frac{K}{2}\,\frac{i}{2}\,(-\psi_{11} + \psi_{22})$$

$$A_y = -\frac{K}{2}\,\frac{i}{2}\,(-i\,\psi_{11} - i\,\psi_{22} + i\,\psi_{33} + i\,\psi_{44}) \cong -\frac{K}{2}\,\frac{i}{2}\,(-i\,\psi_{11} - i\,\psi_{22})$$

$$A_z = -\frac{K}{2}\,\frac{i}{2}\,(\psi_{12} + \psi_{21} - \psi_{34} - \psi_{43}) \qquad \cong -\frac{K}{2}\,\frac{i}{2}\,(\psi_{12} + \psi_{21})$$

$$E_x = \frac{i}{2}\,K k_0\,\frac{i}{2}\,(-\psi_{11} + \psi_{22} - \psi_{33} + \psi_{44}) \qquad \cong \frac{i}{2}\,K k_0\,\frac{i}{2}\,(-\psi_{11} + \psi_{22})$$

$$E_y = \frac{i}{2}\,K k_0\,\frac{i}{2}\,(-i\,\psi_{11} - i\,\psi_{22} - i\,\psi_{33} - i\,\psi_{44}) \cong \frac{i}{2}\,K k_0\,\frac{i}{2}\,(-i\,\psi_{11} - i\,\psi_{22})$$

$$E_z = \frac{i}{2}\,K k_0\,\frac{i}{2}\,(\psi_{12} + \psi_{21} + \psi_{34} + {}_{43}) \qquad \cong \frac{i}{2}\,K k_0\,\frac{i}{2}\,(\psi_{12} + \psi_{21})$$

$$V = -\frac{K}{2}\,\frac{i}{2}\,(\psi_{32} - \psi_{41} + \psi_{23} - \psi_{14})$$

$$H_x = \frac{K k_0}{2}\,i/2\,(-\psi_{31} + \psi_{42} - \psi_{13} + \psi_{24})$$

$$H_y = \frac{K k_0}{2}\,i/2\,(-i\,\psi_{31} - i\,\psi_{42} - i\,\psi_{13} - i\,\psi_{24})$$

$$H_z = \frac{K k_0}{2}\,i/2\,(\psi_{32} + \psi_{41} + \psi_{23} + \psi_{14})$$

$$I_2 = -\frac{i}{2}\,\frac{i}{2}\,(\psi_{12} - \psi_{21} + \psi_{34} - \psi_{43}) \qquad \cong -\frac{i}{2}\,\frac{i}{2}\,(\psi_{12} - \psi_{21})$$

$$\sigma_4 = \frac{i}{2}\,\frac{i}{2}\,(\psi_{12} - \psi_{21} - \psi_{34} + \psi_{43}) \qquad \cong \frac{i}{2}\,\frac{i}{2}\,(\psi_{12} - \psi_{21})$$

$$I_1 = \frac{1}{2}\,\frac{i}{2}\,(-\psi_{32} + \psi_{41} + \psi_{23} - \psi_{14})$$

$$\sigma_1 = -\frac{i}{2}\,\frac{i}{2}\,(\psi_{31} - \psi_{42} - \psi_{13} + \psi_{24})$$

$$\sigma_2 = -\frac{i}{2}\,\frac{i}{2}\,(i\,\psi_{31} + i\,\psi_{42} - i\,\psi_{13} - i\,\psi_{24})$$

$$\sigma_3 = -\frac{i}{2}\,\frac{i}{2}\,(-\psi_{32} - \psi_{41} + \psi_{23} + \psi_{14}).$$

Souvenons-nous maintenant de ce qui a été conclu plus haut sur l'ordre de grandeur relative des fonctions ψ_{ik} (voir notamment le Chapitre IV, § 1): avec le choix I. 19 des matrices α_μ, les composantes $\psi_{13}\,\psi_{14}\,\psi_{23}\,\psi_{24}$ $\psi_{31}\,\psi_{32}\,\psi_{41}$ et ψ_{42} sont de l'ordre de $\beta = v/c$ par rapport à $\psi_{11}\,\psi_{12}\,\psi_{21}\,\psi_{22}$, les fonctions $\psi_{33}\,\psi_{34}\,\psi_{43}\,\psi_{44}$ étant de l'ordre de β^2. C'est en vertu de ce fait qu'on a pris, dans le tableau précédent, $\psi_{33} = \psi_{34} = \psi_{43} = \psi_{44} \simeq 0$.

On voit ainsi que les vecteurs maxwelliens $\vec{A}$ et $\vec{E}$ et les grandeurs non maxwelliennes I_2 et σ_4 sont donnés par une combinaison linéaire de deux termes de l'ordre de β^0 ($\psi_{11}\,\psi_{12}\,\psi_{21}\,\psi_{22}$) et de deux termes de l'ordre de β^2. On peut dire aussi que — à une constante multiplicative près — $\vec{A}$ ne diffère de $\vec{E}$ (de même que I_2 ne diffère de σ_4) que par des termes de l'ordre de β^2 lesquels, à l'approximation non relativiste, doivent être négligés. Toutes les autres grandeurs (c'est à dire, le champ magnétique $\vec{H}$, le potentiel V et les grandeurs non maxwelliennes $\vec{\sigma}$ et I_1) sont données, aussi bien dans le cas relativiste qu'à l'approximation non relativiste, par une somme de quatre termes, tous de l'ordre de β.

Introduisons maintenant dans le tableau V. 6 les relations inverses des développements IV. 27, IV. 33, IV. 34,

$$
\begin{array}{lll}
\Omega_0 = i/2\,(\psi_{12} - \psi_{21}) & \Delta_0 = i/2\,(\psi_{23} - \psi_{14}) & \theta_0 = i/2\,(\psi_{32} - \psi_{41}) \\
\Omega_1 = i/2\,(-\psi_{11} + \psi_{22}) & \Delta_1 = i/2\,(-\psi_{13} + \psi_{24}) & \theta_1 = i/2\,(-\psi_{31} + \psi_{42}) \\
\Omega_2 = i/2\,(-i\,\psi_{11} - i\,\psi_{22}) & \Delta_2 = i/2\,(-i\,\psi_{13} - i\,\psi_{24}) & \theta_2 = i/2\,(-i\,\psi_{31} - i\,\psi_{42}) \\
\Omega_3 = i/2\,(\psi_{12} + \psi_{21}) & \Delta_3 = i/2\,(\psi_{23} + \psi_{14}) & \theta_3 = i/2\,(\psi_{32} + \psi_{41}).
\end{array}
$$

On voit alors que, à l'approximation non relativiste (symbolisée dans ce qui suit par l'indice n), les relations entre les grandeurs maxwelliennes et non maxwelliennes d'une part, et, d'autre part, les grandeurs Ω_0, θ_0, Δ_0, $\vec{\Omega}$, $\vec{\theta}$ et $\vec{\Delta}$ sont les suivantes,

$$
\text{V. 7} \qquad
\begin{array}{ll}
\vec{A}_n = -\dfrac{K}{2}\vec{\Omega} & V_n = -\dfrac{K}{2}(\Delta_0 + \theta_0) \\[2ex]
\vec{E}_n = \dfrac{iKk_0}{2}\vec{\Omega} & \vec{H}_n = \dfrac{Kk_0}{2}(\vec{\Delta} + \vec{\theta}) \\[2ex]
I_{2n} = -i/2\,\Omega_0 & I_{1n} = 1/2\,(\Delta_0 - \theta_0) \\
\sigma_{4n} = i/2\,\Omega_0 & \vec{\sigma}_n = -i/2\,(\vec{\Delta} - \vec{\theta}).
\end{array}
$$

§ 3. Comparaison avec les équations relativistes.

Puisque les formules V. 7 donnent la signification physique des grandeurs Ω_0, θ_0, Δ_0, $\vec{\Omega}$, $\vec{\theta}$ et $\vec{\Delta}$, nous sommes à même de reprendre les équations vectorielles V. 2 et de les écrire en employant comme variables de champ l'approximation non relativiste des grandeurs $\vec{A}$, V, $\vec{E}$, $\vec{H}$, I_1, I_2, σ_4 et $\vec{\sigma}$. On obtient ainsi:

équations maxwelliennes

V. 8
$$\begin{aligned} &\left[-i\hbar\,\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right]\vec{A}_n = 0 \\ &\operatorname{div}\vec{E}_n = -k_0^2\,V_n \\ &\vec{E}_n = -i\,k_0\,\vec{A}_n \\ &\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}_n \end{aligned}$$

équations non maxwelliennes

V. 9
$$\begin{aligned} &\left[-i\hbar\,\partial_t + \frac{\hbar^2}{2m}\Delta\right] I_{2n} = 0 \\ &I_{1n} = 0 \\ &\sigma_{4n} = -I_{2n} \\ &\operatorname{grad} I_{2n} = i\,k_0\,\vec{\sigma}_n \end{aligned}$$

On peut maintenant comparer ces équations vectorielles non relativistes avec les équations tensorielles relativistes I. 30, I. 31 d'où nous sommes partis et que nous rappelons ici (*):

(*) Signalons que dans V. 10, V. 11 les équations écrites dans la colonne de droite sont une conséquence des équations présentées à gauche, celles-ci étant indépendantes. Ainsi, et en prenant les équations maxwelliennes, *e*) est une conséquence de *a*) et *b*), tandis que *c*) et *d*) impliquent *g*). L'équation *f*) découle évidemment de *d*). Des considérations analogues on lieu pour V. 11.

équations maxwelliennes

$$\text{V. 10}\qquad \begin{aligned} &a)\quad \frac{1}{c}\,\partial_t \vec{E} = \operatorname{rot}\vec{H} + k_0^2 \vec{A} \\ &b)\quad \operatorname{div}\vec{E} = -\,k_0^2\, V \\ &c)\quad \vec{E} = -\operatorname{grad} V - \frac{1}{c}\,\partial_t \vec{A} \\ &d)\quad \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} &e)\quad \operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\,\partial_t V = 0 \\ &f)\quad \operatorname{div}\vec{H} = 0 \\ &g)\quad -\frac{1}{c}\,\partial_t \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{E} \end{aligned}$$

équations non maxwelliennes

$$\text{V. 11}\qquad \begin{aligned} & m_0\, I_1 = 0 \\ & i\,k_0\,\sigma_4 = -\frac{1}{c}\,\partial_t I_2 \\ & \operatorname{grad} I_2 = i\,k_0\,\vec{\sigma} \\ & \frac{1}{c}\,\partial_t \sigma_4 + \operatorname{div}\vec{\sigma} = i\,k_0\, I_2 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} & \operatorname{grad} I_1 = 0 \\ & \partial_t I_1 = 0 \\ & \frac{1}{c}\,\partial_t \vec{\sigma} + \operatorname{grad}\sigma_4 = 0 \\ & \operatorname{rot}\vec{\sigma} = 0\,. \end{aligned}$$

En ce qui concerne les équations maxwelliennes, la comparaison fait ressortir que les équations d'évolution pour $\vec{A}$ et $\vec{E}$ (c'est à dire, les équations où interviennent $\partial_t \vec{E}$ et $\partial_t \vec{A}$, $\frac{1}{c}\,\partial_t \vec{E} = \operatorname{rot}\vec{H} + k_0^2 \vec{A}$ et $\frac{1}{c}\,\partial_t \vec{A} = -\vec{E} - \operatorname{grad} V$), ne sont plus valables à l'approximation non relativiste. Elles sont remplacées par des équations de Schrödinger vectorielles, les vecteures $\vec{E}$ et $\vec{A}$ devenant proportionnels. Par contre, les autres équations maxwelliennes indépendantes (qui sont des équations de condition, c'est à dire, sans dérivée ∂_t, $\operatorname{div}\vec{E} = -\,k_0^2\, V$ et $\vec{H} = \operatorname{rot}\vec{A}$ demeurent inchangées à l'approximation non relativiste. Par conséquent, celles des équations maxwelliennes relativistes qui découlent seulement des équations de condition restent valables à l'approximation non relativiste. Ainsi y retrouve-t-on bien la condition de divergence nulle pour $\vec{H}$, mais ni l'équation d'évolution pour $\vec{H}\left(-\frac{1}{c}\,\partial_t \vec{H} = \operatorname{rot}\vec{E}\right)$ ni la condition de Lorentz $\left(\operatorname{div}\vec{A} + \frac{1}{c}\,\partial_t V = 0\right)$ ne sont alors valables.

Remarquons, en plus, que les potentiels $\vec{A}$ et V possèdent toujours une existence réelle. C'était d'ailleurs ce qui arrivait dans la théorie relativiste où $\vec{E}$ et $\vec{H}$ étaient donnés en fonction de $\vec{A}$ et V et, réciproquement, les valeurs de $\vec{A}$ et V étaient bien déterminées par celles de $\vec{E}$ et $\vec{H}$. A l'approximation non relativiste on voit, cependant, que la connaissance de $\vec{A}$ suffit à déterminer les valeurs du champ électromagnétique et que, inversement, les seules valeurs de $\vec{E}$ suffisent pour fixer les potentiels $\vec{A}$ et V.

En passant aux équations non maxwelliennes, on voit que les équations d'évolution pour I_2 et σ_4 sont aussi remplacées par des équations de Schrödinger et par une relation de proportionnalité entre ces deux grandeurs. Les autres équations indépendantes non maxwelliennes demeurent cependant valables, de même que celles qui en découlent. C'est à dire que l'on a toujours $\operatorname{grad} I_1 = \partial_t I_1 = 0$ mais, en revanche, les équations $\operatorname{rot} \vec{\sigma} = 0$ et $\frac{1}{c} \partial_t \vec{\sigma} + \operatorname{grad} \sigma_4 = 0$ ne sont plus présentes dans l'approximation non relativiste.

Comme on le voit aisément, toutes les grandeurs non relativistes de champ $(\vec{A}_n, V_n, \vec{E}_n, \cdots, \sigma_{4n})$ évoluent dans le temps selon des équations de Schrödinger, ce qui est à rapprocher du fait que les mêmes grandeurs, considérées au niveau relativiste, obéissent dans leur évolution à des équations de Klein-Gordon.

Soulignons encore que, tout comme c'était le cas dans la théorie relativiste, seules les grandeurs de champ attachées à la particule de spin 1 (ou, plus précisement, au photon) possèdent une signification physique bien nette: ce sont des grandeurs électromagnétiques de champ (Rappeler à ce sujet les remarques faites au Chappitre I § 3). Pour ce qui est de la particule de spin 0 les mêmes difficultés se réflètent ici, en ce sens que les grandeurs de champ qui lui sont attachées n'ont pas une signification très claire de même, d'ailleurs, que les équations qui sont censées la décrire. Tout ce qu'on peut dire à ce sujet c'est que, pour autant que la description relativiste d'une telle particule soit bien donnée par les équations V. 11, les équations V. 9 la décrivent tout aussi correctement dans le cas des petites vitesses.

§ 4. Les ondes planes monochromatiques.

Dans ce paragraphe on étudie les solutions du type onde plane monochromatique des équations non relativistes de la particule de spin maximum 1. Les résultats obtenus seront à comparer avec les solutions du même genre des équations relativistes.

En admettant, pour simplifier, que le sens de la propagation de l'onde plane coincide avec le sens positif de l'axe OZ, on est amené à prendre des solutions de la forme

$$\psi_{ik} = c_{ik} P = c_{ik} \exp \frac{i}{\hbar} (E t - z p)$$

$(i, k = 1, 2)$, où c_{ik} est une constante arbitraire et $p = |\vec{p}| = p_z$. Les équations spinorielles V. $1bc$ viennent alors

$$\psi_{13} = \frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{11} = \frac{p}{2 m_0 c} c_{11} P$$

$$\psi_{23} = \frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{21} = \frac{p}{2 m_0 c} c_{21} P$$

$$\psi_{14} = -\frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{12} = -\frac{p}{2 m_0 c} c_{12} P$$

$$\psi_{24} = -\frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{22} = -\frac{p}{2 m_0 c} c_{22} P$$

$$\psi_{31} = \frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{11} = \frac{p}{2 m_0 c} c_{11} P$$

$$\psi_{32} = \frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{12} = \frac{p}{2 m_0 c} c_{12} P$$

$$\psi_{41} = -\frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{21} = -\frac{p}{2 m_0 c} c_{21} P$$

$$\psi_{42} = -\frac{i\hbar}{2 m_0 c} \partial_z \psi_{22} = -\frac{p}{2 m_0 c} c_{22} P.$$

En partant de ces formules on peut déterminer l'expression non relativiste des grandeurs maxwelliennes et non maxwelliennes des ondes planes monochromatiques, et ceci en employant les relations du tableau V. 6. On trouve ainsi, pour les grandeurs non maxwelliennes,

$$\sigma_4 = -\frac{1}{4}(c_{12} - c_{21})\,P \qquad \sigma_x = 0$$

$$\mathrm{I}_2 = \frac{1}{4}(c_{12} - c_{21})\,P \qquad \sigma_y = 0$$

$$\mathrm{I}_1 = 0 \qquad \sigma_z = -\frac{p}{4\,m_0\,c}(c_{12} - c_{21})\,P;$$

et pour les grandeurs maxwelliennes,

$$A_x = -i\,\frac{K}{4}(-\;c_{11} + c_{22})\,P \qquad E_x = -\frac{K\,k_0}{4}(-\;c_{11} + \;c_{22})\,P$$

$$A_y = -i\,\frac{K}{4}(-ic_{11} - ic_{22})\,P \qquad E_y = -\frac{K\,k_0}{4}(-i\,c_{11} - i\,c_{22})\,P$$

$$A_z = -i\,\frac{K}{4}(\;\;c_{12} + c_{21})\,P \qquad E_z = -\frac{K\,k_0}{4}(\;\;c_{12} + \;c_{21})\,P$$

$$H_x = -i\,\frac{K\,k_0}{4\,m_0\,c}\,p\,(c_{11} + c_{22})\,P$$

$$H_y = \frac{K\,k_0}{4\,m_0\,c}\,p\,(c_{11} - c_{22})\,P \qquad V = -i\,K\,\frac{p}{4\,m_0\,c}(\;\;c_{12} + \;c_{21})\,P.$$

$$H_z = 0$$

En passant, on peut vérifier sur ces expressions que l'on a toujours $\vec{H} \cdot \vec{E} = 0$ ce qui revient à dire que même à l'approximation non relativiste les champs $\vec{E}$ et $\vec{H}$ demeurent orthogonaux; on voit de même que le vecteur $\vec{H}$ est dans le plan normal à la direction de propagation. En plus, on tire des expressions précédentes que

$$A_x + i\,A_y = -\frac{i\,K}{2}\,c_{22}\,P \qquad E_x + i\,E_y = -\frac{K\,k_0}{2}\,c_{22}\,P$$

$$A_x - i\,A_y = \frac{i\,K}{2}\,c_{11}\,P \qquad E_x - i\,E_y = \frac{K\,k_0}{2}\,c_{11}\,P$$

$$H_x + i H_y = -\frac{iK}{2} \frac{p}{m_0 c} k_0 c_{22} P$$

$$H_x - i H_y = -\frac{iK}{2} \frac{p}{m_0 c} k_0 c_{11} P.$$

En définissant maintenant les nouvelles constantes indépendantes

$$c_1 \equiv \frac{iK}{2} c_{11}$$

$$c_2 \equiv -\frac{iK}{2} c_{22}$$

$$c_3 \equiv -\frac{iK}{4} (c_{12} + c_{21})$$

$$c_4 \equiv \frac{1}{4} (c_{12} - c_{21}),$$

on trouve que la solution générale du type onde plane monochromatique est la superposition des quatre solutions indépendantes suivantes

1.° $$A_x + i A_y = c_2 P \qquad E_x + i E_y = -i k_0 c_2 P$$
$$A_x - i A_y = 0 \qquad E_x - i E_y = 0$$
$$H_x + iH_y = \frac{k_0}{m_0 c} p c_2 P$$
$$H_x - iH_y = 0,$$

(et toutes les autres grandeurs sont nulles)

2.° $$A_x + i A_y = 0 \qquad E_x + i E_y = 0$$
$$A_x - i A_y = c_1 P \qquad E_x - i E_y = -i k_0 c_1 P$$
$$H_x + i H_y = 0$$
$$H_x - i H_y = -\frac{k_0}{m_0 c} p c_1 P,$$

(toutes les autres grandeurs étant nulles)

3.° $A_z = c_3 P \qquad E_z = -i k_0 c_3 P \qquad V = \dfrac{p}{m_0 c} c_3 P$

(idem)

4.° $I_2 = c_4 P \qquad \sigma_1 = -c_4 P \qquad \sigma_3 = -\dfrac{p}{m_0 c} c_4 P.$

(idem).

Ces résultats sont à mettre en parallèle avec ceux de l'étude des solutions du type onde plane monochromatique des équations relativistes [7]. A l'approximation non relativiste on retrouve donc une onde plane polarisée circulairement à gauche (la première solution indépendante), une autre onde polarisée circulairement à droite (la deuxième solution), une onde longitudinale (la troisième) et une onde non maxwellienne (la quatrième solution). On peut d'ailleurs vérifier que ces résultats non relativistes peuvent s'obtenir formellement en partant des expressions relativistes correspondantes données en [7] et en y procédant à la seule substitution de $\dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ par m_0 (ou, plus précisément, de $k = \dfrac{c}{h} \cdot \dfrac{m_0}{\sqrt{1-\beta^2}}$ par $k_0 = \dfrac{c}{h} \cdot m_0$).

BIBLIOGRAPHIE

[1] L. DE BROGLIE, *Comptes Rendus,* **198**, 135-138 (1934).
———, *Comptes Rendus,* **199**, 445-448 (1934).
———, *Comptes Rendus,* **199**, 1165-1168 (1934).
———, *Comptes Rendus,* **200**, 361-363 (1935).
———, *Comptes Rendus,* **203**, 473-477 (1936).
———, *Comptes Rendus,* **208**, 1967-1700 (1939).

[2] M. A. TONNELAT, *Comptes Rendus,* **208**, 790-793 (1939).
———, *Comptes Rendus,* **207**, 1180-1182 (1938).

[3] GÉHÉNIAU, *Comptes Rendus,* **204**, 665-668 (1937).
———, *Comptes Rendus,* **206**, 663-665 (1938).
———, *Comptes Rendus,* **208**, 497-499 (1939).

[4] G. PÉTIAU, *Comptes Rendus,* **200**, 1829-1832 (1935).
———, *Comptes Rendus,* **206**, 991-993 (1938).
———, *Comptes Rendus,* **208**, 167-169 et 969-971 (1939).
J. de Physique et le Radium, **10**, 413-419 (1939).

[5] L. DE BROGLIE, *Comptes Rendus,* **209**, 265-268 (1939).
G. PETIAU, *Comptes Rendus,* **208**, 1709-1711 (1939).
J. de Phys. et le Radium, **10**, 487-494 (1939).

[6] L. DE BROGLIE, Une nouvelle théorie de la lumière, Hermann, 1940, vol. I.

[7] ———, Théorie générale des particules à spin, Gauthier-Villars, 1954.

[8] ———, Mécanique Ondulatoire du Photon et Théorie Quantique des Champs, Gauthier-Villars, 1957.

[9] H. BOERSCH, HAMISCH, GROHMANN, et WHOLLEBEN, *Z. Physik,* **165**, 79, (1961).

[10] D. BOHM et Y. AHARONOV, *Phys, Rev.,* **115**, 485 (1959).

[11] L. DE BROGLIE, Ondes électromagnétiques et photons, Gauthier-Villars, 1968.

[12] J. VASSALO PEREIRA, «On the Generalisation of the Theory of the spin Maximum 1 Particle to the case of a charged Particle Moving in an Electromagnetic Field», *Int. Journ. of Theor. Physics,* 1971, (sous presse).

[13] A. PROCA, *J. de Phys. et le Radium,* **7**, 347 (1936).

[14] O. COSTA DE BEAUREGARD, *Thèse,* 1943.

[15] C. IMBERT, *Comptes Rendus,* **267**, 1401-1403: C. DE BEAUREGARD et C. IMBERT, *Comptes Rendus,* **268**, 216-218 (1969).

[16] M. VON LAUE, *Ann. Phys.Lpz,* **23**, 989 (1907).

[17] H. A. LORENTZ, *Encykl. math. Wiss.* V. 13, § 21, 103 (1914 — Leipzig).

[18] L. DE BROGLIE, La thermodynamique de la particule isolée, Gauthier--Villars, 1964.

[19] J. VASSALO PEREIRA, «Non Relativistic Approximation of the Theory of the Particle of Spin Maximum 1», *Int. Journal of Theor. Physics,* 1971 (à paraître).

[20] ROMAN, Elementary Particles, North Holland, Amsterdam, 1960.

[21] R. BETH, *Phys. Rev.,* **50**, 115 (1936).

[22] L. DE BROGLIE, Problèmes de propagation guidée des ondes électromagnétiques, Gauthier-Villars, 1951.

[23] L. BRILLOUIN, Les statistiques quantiques et leurs applications, Presses de France, 1930, Vol. I.