SUR LA FORMULATION MAXWELLIENNE DE LA MÉCANIQUE DES FLUIDES INCOMPRESSIBLES

M. S. Garrido

CAUTL-INIC, BP 5176, 1704 Lisboa Codex, Portugal
Institut Maxwell, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique

(Received 14 January 1982; revised version 31 August 1982)

RÉSUMÉ — Dans un formalisme maxwellien de la mécanique des fluides incompressibles on montre comme on peut passer des équations relativistes aux équations galiléennes par la conditions $c = \infty$.

ABSTRACT — Using a maxwellian formalism of the incompressible fluid mechanics, it is shown how to pass from the relativistic equations to the galilean equations by the condition $c = \infty$.

1 — INTRODUCTION

Les équations des fluides incompressibles peuvent se mettre sous une forme analogue aux équations de l'électromagnetisme, aussi bien au niveau relativiste qu'au niveau galiléen [1]: cette possibilité constitue une extension aux milieux continus de l'analogie existant entre la théorie des circuits électriques et la mécanique des solides rigides, bien connue depuis longtemps.

Dans cette Note nous allons montrer comment, dans la formulation maxwellienne de la mécanique des fluides, on passe du niveau relativiste au niveau galiléen par la condition $c = \infty$, ce passage n'étant pas aussi immédiat en mécanique qu'en électromagnetisme.

2 — ÉQUATIONS RELATIVISTES

En vue d'inclure le phénomène de gravitation et de retrouver l'équation de Newton au niveau galiléen, nous devons considérer les équations maxwelliennes de la mécanique des fluides incompressibles au niveau de la relativité générale, donc dans un espace-temps dont la métrique est determinée par l'équation d'Einstein.

Ces équations ont été établies précedemment [1] et nous allons les reprendre directement.

Ainsi, on dispose en mécanique d'une loi d'Ohm, dont la forme la plus simple, valable pour des fluides peu visqueux avec des petits gradients de pression, est:

$$P^{\alpha}{}_{\gamma}\, J^{\gamma} = (\sigma/c)\, u_{\beta}\, F^{\alpha\beta} \tag{1}$$

oú $P_{\alpha\gamma} = g_{\alpha\gamma} + u_{\alpha}\, u_{\gamma}$ est le tenseur de projection, J^{γ} le quadricourant mécanique, u_{β} la quadrivitesse, $F^{\alpha\beta}$ le tenseur du champ mécanique et σ un paramêtre local dependant de la viscosité du fluide et transporté en accord avec l'équation de continuité de la matière.

Le champ mécanique $F_{\alpha\beta}$ satisfait les équations de Maxwell:

$$F^{\alpha\beta}{}_{;\beta} = J^{\alpha}/\varepsilon_0 \tag{2a}$$

$$F_{\alpha\beta\,;\,\gamma} + F_{\beta\gamma\,;\,\alpha} + F_{\gamma\alpha\,;\,\beta} = 0 \tag{2b}$$

où (;) represente la derivée covariante et $\varepsilon_0 = -1/4\pi\chi$ est une constante universelle obtenue à partir de la constante de gravitation χ.

On peut introduire un quadripotentiel A^{α} tel que:

$$F_{\alpha\beta} = A_{\beta\,;\,\alpha} - A_{\alpha\,;\,\beta} \tag{3}$$

Pour un fluide incompressible, ce quadripotentiel satisfait les équations:

$$A^{\alpha\,;\,\beta}{}_{\beta} - R^{\alpha}{}_{\gamma}\, A^{\gamma} = -J^{\alpha}/\varepsilon_0 \tag{4a}$$

$$A^{\alpha}{}_{;\,\alpha} = 0 \tag{4b}$$

où $R^{\alpha}{}_{\gamma}$ est le tenseur de Ricci.

Les équations précedentes, formellement analogues aux équations classiques de l'électromagnetisme [2], doivent être completées en mécanique avec une relation reliant la quadrivitesse au champ mécanique:

$$A^{\alpha} = c^2 \, I \, u^{\alpha} \tag{5}$$

où I represente l'indice du fluide.

L'indice du fluide est donné par [3]:

$$I = 1 + (i/c^2) \tag{6}$$

où i represente l'enthalpie spécifique.

Si on néglige les phénomènes thérmiques, en supposant le mouvement isentropique, on a:

$$c^2 \, dI = di = dp/\rho \tag{7}$$

où p represente la pression et ρ represente la densité de masse propre.

3 — PASSAGE À LA LIMITE GALILÉENNE

Si on se trouve dans le cadre des champs quasi-newtoniens [2], [4], le passage de l'espace-temps d'Einstein à celui de Galilée est assuré par la condition:

$$c = \infty \tag{8}$$

Pour obtenir la notation vectorielle ordinaire dans l'espace tridimensionnel, on doit définir un potentiel vecteur $\mathbf{A}^*$ et un potentiel scalaire ϕ^*, ce que nous ferons par les composantes covariantes, en posant:

$$(A_1 , A_2 , A_3 , A_0) = (c \, \mathbf{A}^*, - \phi^*) \tag{9}$$

Si on fait le passage à la limite de l'équation (5), en utilisant la métrique quasi-newtonienne $ds^2 = -(1 + 2\varphi/c^2)\, c^2 dt^2 + (1 - 2\varphi/c^2)\, d\mathbf{r}^2$, on obtient:

$$(c \, \mathbf{A}^*, -\phi^*) = (c \, \mathbf{v}, - \lim_{c \to \infty} c^2 I (1 + 2\varphi/c^2)^{1/2} (1 - v^2/c^2)^{-1/2}) \tag{10}$$

où $\mathbf{v}$ represente la vitesse ordinaire et φ le potentiel de Newton.

On obtient donc:

$$\mathbf{A}^* = \mathbf{v} \quad , \quad \phi^* = c^2 I + v^2/2 + \varphi \tag{11}$$

Nous devons remarquer que, contrairement à ce qui se passe en électromagnetisme, on obtient à la limite galiléenne $A_0 \neq - A^0$, de sorte que le choix des composantes covariantes pour introduire le potentiel scalaire n'est pas arbitraire.

En mécanique classique nous n'utilisons pas le potentiel ϕ^*, qui tends vers l'infini, mais un potentiel fini, que nous définirons par le changement de variables:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^* = \mathbf{v} \quad , \quad \phi = \phi^* - c^2 I = v^2/2 + \varphi \tag{12}$$

Compte tenu de (3), ce changement implique un changement du champ mécanique $E^*_k = F_{k0}$ $(k = 1, 2, 3)$, qui sera:

$$E_k = E^*_k + (c^2 I)_{,k} \tag{13}$$

où, d'après (7), on a $(c^2 I)_{,k} \quad p_{,k}/\rho$.

La loi d'Ohm sera donc modifiée et on obtient dans le referentiel propre:

$$J_k = (\sigma/c)\ (E_k - p_{,k}/\rho) \quad , \quad \rho_G \quad - J_0 + \varepsilon_0 \nabla \cdot (\nabla p/\rho) \tag{14}$$

le terme $- p_{,k}/\rho$ prennant la signification d'un champ appliqué E^a_k et ρ_G celle de la masse grave newtonienne.

On trouve dans ce changement de variables lors du passage à la limite galiéenne une deuxième différence formelle importante par rapport à ce qui se passe en électromagnetisme.

4 — ÉQUATIONS GALILÉENNES

Compte tenu des résultats précedents, on peut écrire les équations galiléennes de la mécanique des fluides incompressibles.

Si on associe à la constante universelle ε_0 une nouvelle constante μ_0 telle que $\varepsilon_0 \mu_0 = c^{-2}$, la condition (8) s'écrit:

$$\varepsilon_0 \mu_0 = 0 \tag{15}$$

ce qui nous conduira, comme en électromagnetisme, à considérer deux limites galiléennes d'après qu'on annule ε_0 ou μ_0.

Comme en électromagnetisme, on peut introduire deux champs mécaniques **E**, **H**, auxquels on associe deux inductions mécaniques **D**, **B** telles que:

$$\mathbf{D} = \varepsilon_0 \mathbf{E} \tag{16a}$$

$$\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} \tag{16b}$$

La loi d'Ohm prends la forme:

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B} + \mathbf{E}^a) + \rho_G \mathbf{v} \tag{17}$$

et les équations de Maxwell (2) donnent:

$$\nabla \times \mathbf{E} = - \partial \mathbf{B}/\partial t \tag{18a}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_G \tag{18b}$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D}/\partial t \tag{18c}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \tag{18d}$$

L'équation (3) donne:

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \qquad \mathbf{E} = - \partial \mathbf{A}/\partial t - \nabla \phi \tag{19}$$

Les potentiels verifient les équations:

$$\nabla^2 \mathbf{A} = - \mu_0 \mathbf{J} \qquad \nabla^2 \phi = - \rho_G/\varepsilon_0 \tag{20}$$

et la condition de Lorentz devient:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \tag{21}$$

Aux équations précedentes, analogues à celles de l'électromagnetisme, on doit ajouter les relations (12) propres à la mécanique:

$$\mathbf{A} = \mathbf{v} \qquad \phi = \mathbf{v}^2/2 + \varphi \tag{22}$$

Finalement, les équations doivent être completées avec l'équation de continuité de la matière qui est nécessaire, en particulier, pour determiner l'évolution du paramêtre σ.

Le formalisme galiléen obtenu a été étudié en détail précedemment [1] et on a montré qu'il est équivalent au formalisme classique de la mécanique des fluides incompressibles, la gravitation comprise.

5 — CONCLUSION

Nous avons passé en revue les équation maxwelliennes de la mécanique des fluides incompressibles et montré comment on passe des équations relativistes au équations pré-relativistes.

Nous avons ignoré le niveau relativiste restreint dans la mesure où celui-ci exclu la gravitation et ne peut être consideré qu'une approximation du formalisme relativiste général lorsque la courbure de l'espace-temps est negligée.

RÉFÉRENCES

[1] M. S. GARRIDO, *Técnica*, **54** (1979), 59; *Il Nuovo Cimento*, **68B** (1982), 252.

[2] C. W. MISNER, K. S. THORNE, J. A. WHEELER, *Gravitation*, ed. Freeman, 1973.

[3] A. LICHNEROWICZ, *Proc. on the first Marcel Grossman meeting on General Relatively*, ed. North Holland, 1977.

[4] L. LANDAU, E. LIFCHITZ, *Théorie des champs*, ed. MIR, 1970.